



БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ



ИНСТИТУТ ПО ИНФОРМАЦИОННИ И КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ

ДИСЕРТАЦИЯ

на

Тема: **МЕТОДИ ЗА ПОСТРОЯВАНЕ НА УЕЙВЛЕТНИ
И МУЛТИУЕЙВЛЕТНИ ФИЛТЪРНИ БАНКИ**

от

Васил Стефанов Колев

за присъждане на образователна и научна степен „доктор“

в професионално направление

4.6. Информатика и Компютърни Науки

Научен ръководител:

доц. д-р Румен Андреев

София, 2024

СЪДЪРЖАНИЕ

Благодарности	6
Списък на използваните означения	7
Речник на използвани понятия	9
Списък на таблиците	11
Списък на фигурите	12
Списък на съкращенията	14
Увод	15
Глава 1 Обзор и анализ на методите за построяване на уейвлетни и мулти - уейвлетни филтърни банки	20
1.1 Въведение	20
1.2 Теория на сплайни и Лежандър полиноми	22
1.2.1 Сплайн функции	22
1.2.2 Лежандър полиноми	25
1.3 Теория на филтърните банки	27
1.3.1 Скаларни филтърни банки	27
1.3.1.1 Обща теория	27
1.3.1.2 Построяване на мащабиращи и уейвлетни функции с параметър	32
1.3.1.3 Свойства на мащабиращи и уейвлетни функции	33
1.3.1.4 Кратномащабен анализ (КМА)	35
1.3.2 Разработване на модули без умножение за скаларна филтърна банка	37
1.3.3 Векторни филтърни (мултифилтри) банки	40
1.3.3.1 Обща теория	40
1.3.3.2 Свойства на мултимащабиращата функция	44
1.4 Теория на спектрално разлагане	46
1.5 Теория на базисни функции от сплайни	48
1.5.1 Линеен <i>B</i>-сплайн	48
1.5.2 Ермитови сплайн за интервал $[0,1]$	49
1.6 Резултати и изводи	50
Глава 2 Разработване на методи за построяване на функции за мултиуейвлетни филтърни банки от полиноми и сплайни	51

2.1	Методи за построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции	51
2.1.1	Метод чрез смяна на базиса	51
2.1.2	Директен метод	61
2.1.3	Метод на външното скалярно произведение	66
2.2	Методи за построяване на уейвлетни и мултиуейвлетни функции	73
2.3	Резултати и изводи	74
Глава 3	Разработване на методи на спектрално разлагане	75
3.1	Разработване на произведение на матричен филтър	75
3.2	Метод на квадратичните уравнения	77
3.3	Метод на корени на полиномите	77
3.4	Кепстрален метод	81
3.5	Метод на Бауер	81
3.6	Резултати и изводи	83
Глава 4	Разработване на алгоритми за бърз и точен метод на Бауер	84
4.1	Обща теория на бърз метод на Бауер	84
4.2	Разработване на Алгоритъм за бърз метод на Бауер	85
4.3	Методи за решаване на НМУ в БМБ	88
4.3.1	Метод на неподвижната точка	88
4.3.2	Метод на Нютон	88
4.3.3	Чрез използване на ОДАУР	88
4.4	Бърз метод на Бауер (Скаларен случай)	88
4.5	Бърз метод на Бауер (Векторен случай)	89
4.5.1	Разработване на мултимащабиращата функция на Алперт	89
4.5.2	Разработване на мултиуейвлетната функция на Алперт	89
4.6	Резултати и изводи	91
Глава 5	Експериментални изследвания на разработените методи за построяване на уейвлетни и мултиуейвлетни филтърни банки	93
5.1	Експериментално изследване и сравнителен анализ на класическия и бърз метод на Бауер за спектрално разлагане	93
5.1.1	Експериментално изследване на класическия метод на Бауер за скалярно спектрално разлагане (мащабираща функция на Хаар)	93

5.1.2	Експериментално изследване на класическия метод на Бауер за скаларно спектрално разлагане (мощабираща функция на Добеши 4)	94
5.1.3	Експериментално изследване на класическия метод на Бауер за матрично спектрално разлагане (мултимащабираща функция на Алперт) .	95
5.1.4	Експериментално изследване на БМБ	96
5.1.5	Сравнителен анализ на методите на Бауер	106
5.2	Приложение на ортогонални мултифилтърни банки	107
5.2.1	Разработване и приложение на лифтинг схема на филтър на Алперт. Диадична апроксимация на $\sqrt{3}$ за 2D сигнали	107
5.2.2	Сравнителен анализ на три ортогонални мултиуейвлетни филтри за обезшумяване на изображения с ниво на сиво	112
5.2.3	Сравнителен анализ на ортогонални скаларни и векторни филтри за компресия на изображения от сканирани фотографски плаки	119
5.3	Експериментално изследване на модули без умножение за 5/3 филтърна банка реализирани върху препрограмируема интегрална схема	124
5.4	Резултати и изводи	126
Заклучение		129
Възможности за бъдещо развитие		130
Научни и научно–приложни приноси в дисертационния труд		131
Списък на авторските публикации по темата на дисертационния труд		132
Цитирания на публикациите свързани с дисертационния труд		133
Декларация за оригиналност		135
Библиография		136
Приложение 1		145
Приложение 2		147
Приложение 3		150

**“... защото без Мене не можете
да вършите нищо”**

(Иоан 15:5)

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодаря на покойния доц. Божан Жечев, първия ми учител, който постави основата на научната ми дейност и запознанство с уейвлетната теория.

Бих искал да благодаря на доц. Румен Андреев, ръководител на дисертационния труд, за неговата безценна помощ, подкрепа и насърчаване.

Благодарен съм също на моите съавтори проф. Тодор Куклев (университет в Пърдю Форт Уейн, Индиана, САЩ) и доц. Фриц Кайнерт (държавен университет в Айова, Айова, САЩ) за идеите, проследяване и подобряване развитието ми в областта на научните изследвания, както и за публикуваните статии.

Много съм благодарен на г-жа Дияна Георгиева, която е готова да помогне във всеки момент, както и на всички настоящи и бивши колеги от секция КСУ, които винаги са много подкрепящи и разбиращи.

СПИСЪК НА ИЗПОЛЗВАНИТЕ ОЗНАЧЕНИЯ

\mathbb{C}	Множество на Комплексните числа (Complex numbers) $\{\alpha + i\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $i = \sqrt{-1}$
\mathbb{N}	Множество на Естествените числа (Natural numbers) $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Q}	Множество на Рационалните числа (Rational numbers) $\{p/q : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$
\mathbb{R}	Множество на Реалните числа (Real numbers) $(-\infty, +\infty)$
\mathbb{Z}	Множество на Целите числа (Integers) $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
A^T	Транспонирана матрица на матрица A ; $A = (A^{-1})^T$ или $A = A^H$
A^*	Комплексно спрегната матрица на матрицата A ;
$A^H = A^T$	Ермитово спрегната матрица на матрицата A ;
$A^* = A^T$	Когато матрицата A е реална;
$A^* = A^H$	Когато матрицата A е комплексна;
A^{-1}	Обратна матрица на неособена матрица A ;
A^t	Псевдообратна матрица на матрицата A ;
$\det(A)$	Детерминанта на квадратната матрица A ;
W^\perp	Ортогонално допълнение на подпространство W ;
C^d	d - мерно комплексно Ермитово пространство - комплексните скаларните (вътрешни и външни) произведения са d – мерни;
R^d	d - мерно реално Евклидово пространство – реалните скаларни (вътрешни и външни) произведения са d – мерни;
$l^2(\mathbb{R})$	Пространство на квадратно – сумируемите функции на реалната линия;
$L^2(\mathbb{R})$	Пространство на квадратно – интегрируеми функции на реалната линия. В него <i>скаларните произведения (вътрешно и външно)</i> на два вектора $u(t)$ и $v(t)$ се определят чрез следните интеграли: <div style="margin-left: 20px;"> $-$ <i>вътрешно скаларно произведение</i> - $\langle u(t), v(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt$; </div>

-външно (тензорно) скаларно произведение

$$\langle\langle u(t), v(t) \rangle\rangle = u(t) \otimes v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v^T(t)dt;$$

Пространство на квадратно – интегрируеми функции на реалната линия в интервал [0,1], Скаларните произведения на векторите $u(t)$ и $v(t)$ се определят чрез следните определени интеграли:

$L^2(0,1)$ - вътрешно скаларно произведение - $\langle u(t), v(t) \rangle = \int_0^1 u(t)v(t)dt;$

- външно (тензорно) скаларно произведение

$$\langle\langle u(t), v(t) \rangle\rangle = u(t) \otimes v(t) = \int_0^1 u(t)v^T(t)dt;$$

Пара – Ермитов матричен полином (или самоспрегнат)

$A^*(z) = A(z)$ $A(z) = \sum_{k=-L}^L A_k z^k$ удовлетворяващ за $\forall, z \in \mathbb{T} \{z \in \mathbb{C}: |z|=1\}$

$\mathbb{R}^{r \times r}[z, z^{-1}]$ Пръстен от $r \times r$ матрици чиито елементи са полиноми на степени z, z^{-1} с реални коефициенти

\mathbb{T} Комплексна единична окръжност, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{-i\omega}, \omega \in \mathbb{R}\}$

РЕЧНИК ИЗПОЛЗВАНИ ПОНЯТИЯ

Scaling function – Мащабираща функция - $\phi(t)$;

Wavelet function – Уейвлет функция – $\psi(t)$;

Multiscaling function – Мултимащабираща функция – $\Phi(t)$;

Multiwavelet function – Мултиуейвлетна функция – $\Psi(t)$;

Wavelet filter – Уейвлет филтър;

Multiwavelet filter – Мултиуейвлет филтър;

Dilataion – Разширение (дилатация)

Това е умножение на всяка променлива a с константа δ и се отбелязва a_δ . Тогава в Евклидовия анализ дилатацията на функция $f(x)$ в d -мерно пространство R^d се отбелязва с:

$$a_\delta f(x) = f(\delta x) \text{ и } a^\delta f(x) = \delta^{-1} f(x/\delta) ;$$

Translation – Транслация

Това е прибавяне на константа a на променлива t в Евклидовото пространство и се отбелязва чрез τ_a . Тогава в Евклидовия анализ транслацията на функция $f(x)$ се отбелязва с линейния оператор T :

$$T(\tau_a f)(x) = (\tau_a T f)(x);$$

Fejer theorem – Теорема на Фейер

Нека частично непрекъснатата (piecewise continuous) функция $f(x)$ се състои от краен брой непрекъснати криви в интервал $[-\pi, \pi]$. Ако s е крайната точка на една от тези криви, тогава съществуват границите

$$\lim_{x \rightarrow s^-} f(x) \equiv f(s^-)$$

$$\lim_{x \rightarrow s^+} f(x) \equiv f(s^+).$$

Следователно, реда на Фурие на $f(x)$ в крайната точка s е сходящ към сумата

$$[f(s^-) + f(s^+)]/2;$$

White Gaussian noise – Бял Гаусов шум

Сигнал съставен от дискретни стойности които са с нормално разпределение, средна стойност 0, и дисперсия σ^2 ;

Orthogonal complement – Ортогонално допълнение

Ако x е елемент от Хилбъртовото пространство H , тогава неговото ортогонално допълнение е

$$x^\perp = \{ y \in H: \langle x, y \rangle = 0 \}.$$

Ако елемент $e \in E$, и $E \subseteq H$ е подпространство, тогава неговото ортогонално допълнение е

$$E^\perp = \{y \in H: \langle y, e \rangle = 0, \text{ за всички } e \in E\};$$

Wavelet transformation – Уейвлетна трансформация - Разлагане на функция $f(t)$ в две пространства V_j и W_j ;

Downsampling – Намаляване на дискретизацията;

Upsampling – Увеличаване на дискретизацията;

FPGA (Field-programmable gate array) – **ПЛИС** (Препрограмируема логическа интегрална схема)

Placed – *Разполагане* на разработена цифрова схема с нейните логически елементи в ПЛИС (FPGA);

Routing – *Трасиране* на логическите елементи в съответствие с разработената цифрова схема;

Piecewise polynomial – Частичен полином;

Piecewise polynomial spline – Частично полиномиален сплайн;

Piecewise linear function – Частично линейна функция;

Scalar (matrix) product filter – Произведение на скаларен (матричен) филтър;

Short-Time Fourier transform – Кратковременна (Прозоръчна) Фурие трансформация;

СПИСЪК НА ТАБЛИЦИТЕ

Таблица 4.1 Стъпки в метод на Бауер за спектрално разлагане	86
Таблица 5.1 Влияние размерността $n = 5-65 \times 10^3$ на Тъоплецовата матрица на произведение на филтър на Хаар	147
Таблица 5.2 Влияние размерността $n = 5-65 \times 10^3$ на Тъоплецовата матрица на произведение на филтър на Добеши 4	148
Таблица 5.3 Влияние размерността $n=5-32.5 \times 10^3$ на Тъоплецовата матрица на произведение на матричен филтър на Алперт	149
Таблица 5.4 Сингулярност за примери 1-7	98
Таблица 5.5 Изчислителна сложност на БМБ за m - степенно произведение на филтър с $r \times r$ матрични коефициенти	102
Таблица 5.6 Численни грешки ε_x , ε_H , и ε_P получени при използване на вградената 'dare' функция за Maple 17 за примери 1-7	104
Таблица 5.7 Численни грешки ε_x , ε_H , и ε_P за примери 1 - 7 получени при използване на вградените 'dare' и 'idare' функции за 14 версии на Matlab	105
Таблица 5.8 2 и 3-битово квантуване на $\sqrt{3}$ и абсолютни грешки $\varepsilon_{(\bullet)} = \sqrt{3} - a/b $	108
Таблица 5.9 Сравнителни резултати на PSNR, dB за 2 и 3-битово квантуване на коефициента $\sqrt{3}$ в небалансирана и балансирана мултифилтърна банка на Алперт без обработка	108
Таблица 5.10 Сравнителни резултати на PSNR, dB на обезшумяваване на тестови изображения с адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) и дисперсия $\sigma=10$ с приложен векторен праг на $J=5$ нива на разлагане за 3 ортогонални мултифилтри (GHM, CL, Алперт)	115
Таблица 5.11 Сравнителни резултати на PSNR, dB на обезшумяваване на тестови изображения с адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) и дисперсия $\sigma=20$ с приложен векторен праг на $J=5$ нива на разлагане за 3 ортогонални мултифилтри (GHM, CL, Алперт)	116
Таблица 5.12 Сравнителни резултати на PSNR, dB на обезшумяваване на тестови изображения с адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) и дисперсия $\sigma=10$ с приложен векторен праг на $J=5$ нива на разлагане за 3 ортогонални мултифилтри (GHM, CL, Алперт)	117
Таблица 5.13 Сравнителни резултати на PSNR, dB на обезшумяваване на тестови изображения с адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) и дисперсия $\sigma=20$ с приложен векторен праг на 5 нива на разлагане за 3 ортогонални мултифилтри (GHM, CL, Алперт)	118
Таблица. 5.14 Хардуерни FPGA характеристики на модулите без умножение за анализ и възстановяване на скаларната $5/3$ филтърна банка	125

СПИСЪК НА ФИГУРИТЕ

Фигура 1.1 Пример за сплайн.....	22
Фигура 1.2 Кубични Ермитови криви	24
Фигура 1.3 Кубичен Ермитов сплайн в $[-1, 2]$	25
Фигура 1.4. Структура на M – канална скаларна филтърна банка	28
Фигура 1.5 Едностранна пирамидална структура за 3 нива на разлагане с ДУТ на изображение с ниво на сиво “Lena”	31
Фигура 1.6 Характеристики на $\delta(t)$ функция, единична синусоида, и правоъгълна функция	33
Фигура 1.7 Големина на време – честотните клетки	34
Фигура 1.8 Квадратичен уейвлет B – сплайн функция с изчезващи моменти	35
Фигура 1.9 Каскаден алгоритъм за $\phi(t)$ и $\psi(t)$ на D_4 филтърна банка	38
Фигура 1.10 Авторска обща структура на скаларна филтърна банка	39
Фигура 1.11 Авторски модули без множител	39
Фигура 1.12 Двуканална мултифилтърна банка	40
Фигура 1.13 Разлагане на изображение на 1 ниво	40
Фигура 2.1 Квадратичен B –сплайн $B(t)$	54
Фигура 2.2 Основи на разширените и преместени версии на базовите функции $B(2t \pm *)$ за квадратичен сплайн	55
Фигура 2.3 Мащабираща функция “Шапка”	68
Фигура 2.4 Мултимащабираща функция на кубичен Ермитов сплайн с основа $[0,2]$ разделен на четири подинтервала $[0, 1/2], [1/2, 1], [1, 3/2], [3/2, 2]$	70
Фигура 3.1 Разположение на корените спрямо единичната окръжност	78
Фигура 4.1 Алгоритъм 1: Бърз метод на Бауер	87
Фигура 4.2 Алгоритъм 2: Точен метод на Бауер	87
Фигура 4.3 Ортогонален филтър на Алперт	91
Фигура 5.1 Влияние размерността n на Тъоплецовата матрица за произведение на филтъра на Хаар	94
Фигура 5.2 Влияние размерността n на Тъоплецовата матрица за произведение на филтъра на Добеши 4	95
Фигура 5.3 Влияние размерността n на Тъоплецовата матрица върху точноста на матричното спектрално разлагане	96

Фигура 5.4 Авторски ортогонални суперкомпактни мултимащабиращи $\Phi(t) = [\phi_0, \phi_1]^T$ (червено) и мултиуейвлетни функции $\Psi(t) = [\psi_0, \psi_1]^T$ (синьо)	101
Фигура 5.5. Численни грешки по метода на неподвижната точка за БМБ	103
Фигура 5.6. Численни грешки по метода на Нютон за БМБ	103
Фигура 5.7 Влияние нивата на разлагане $J=1-6$ в <i>небалансирана</i> филтърна банка на Алперт без обработка с <i>2-битово</i> квантуване на коефициента $\sqrt{3}(\sqrt{3} \approx 7/4)$	109
Фигура 5.8 Влияние нивата на разлагане $J=1-6$ в <i>балансирана</i> филтърна банка на Алперт без обработка с <i>2-битово</i> квантуване на коефициента $\sqrt{3}(\sqrt{3} \approx 7/4)$	110
Фигура 5.9 Влияние нивата на разлагане $J=1-6$ <i>небалансирана</i> филтърна банка на Алперт без обработка с <i>3-битово</i> квантуване на коефициента $\sqrt{3}(\sqrt{3} \approx 7/4)$	111
Фигура 5.10 Влияние нивата на разлагане $J=1-6$ в <i>балансирана</i> филтърна банка на Алперт без обработка с <i>3-битово</i> квантуване на коефициента $\sqrt{3}(\sqrt{3} \approx 7/4)$	112
Фигура 5.11 Тестови изображения на големина 256×256 пиксела	113
Фигура 5.12 Тестови изображения на големина 512×512 пиксела	114
Фигура 5.13 Сравнения на <i>ПСШН</i> за компресия на астрономически изображения от СФП за седем нива на разлагане (1024×1024 пиксела)	121
Фигура 5.14 Сравнения на <i>ПСШН</i> за компресия на астрономически изображения от СФП за седем нива на разлагане (512×512 пиксела)	123
Фигура 5.15 Приложение на $5/3$ филтърна банка с авторските модули без умножение за едно ниво на разлагане и възстановяване с 8-битови тест сигнали	125

СПИСЪК НА СЪКРАЩЕНИЯ

ОДУ	Обикновено диференциално уравнение
ЧДУ	Частно диференциално уравнение
ДМС	Добри мултифилтърни свойства
КМА	Кратномащабен анализ
КОФБ	Квадратурно–огледална филтърна банка
ДУТ	Дискретна уейвлетна трансформация
МИМО система	Многовходна многоизходна система
БМБ	Бърз метод на Бауер
ОДАУР	Обобщено дискретно алгебрично уравнение на Рикати
АБГШ	Адитивен бял Гаусов шум
СКГ	Средно квадратичната грешка
ПСШН	Пиково сигнал/шум ниво
КУ	Коефициента на усилване
ПЛИС	Препрограмлируема логическа интегрална схема

УВОД

Актуалност на проблема

От края на 80-те години на миналия век уейвлетните функции се наложиха като незаменим инструмент в геодезията, в числения анализ, в теорията на операторите, при обезшумяване и компресия на N -D сигнали, извличане на обекти от астрономически изображения, машинно обучение, сортиране на данни, търсене в база данни, анализ на времеви редове, компютърна медицина и др. Съществуват различни техни обобщения: уейвлетни пакети (wavelet packets), риджлети (ridgelets), кривалети (curvelets), сланлети (slantlets), кадри (frames) и др.

От началото на 90-те години съществува обобщение на уейвлети – това са мултиуейвлетите съдържащи повече от една функции и притежаващи едновременно свойствата - къса основа, симетрия, и изчезващи моменти от висока степен.

Важна подобласт са ортогоналните мултиуейвлетни филтри, чието разработване изисква мултимащабираща функция да удовлетворява редица условия. Въпреки ограниченията и възникващите трудности, съвременните технологии налагат разработване и прилагане на нови методи и алгоритми за тяхното развитие.

Мотивация

Съществена трудност е съставянето на методи и алгоритми за разработване на мултимащабиращи функции удовлетворяващи по-горе изброени свойства.

Друго голямо предизвикателство е получаването на мултимащабиращи функции като спектрален фактор на спектрално разлагане на произведения на сингулярни матрични филтри с еднократни или многократни нули. Нещо повече, спектралното разлагане на такъв мултифилтър е с големи грешки или дори невъзможно.

Ето защо *основния изследователски въпрос* е свързан с разширяване на уейвлетната и мултиуейвлетната теория и нейното изследване.

В този научноизследователски труд са разработени *четири метода* за разработване на скаларни или векторни мащабиращи функции от полиноми и сплайни:

- ❖ *Директен метод ;*
- ❖ *Метод на смяна на базиса;*
- ❖ *Метод на външното скаларно произведение;*
- ❖ *Бърз метод на Байер за спектрално разлагане.*

Първите три метода се основават на базисни функции от полиноми или от различни типове сплайни. Те могат да са експоненциални функции, Лежандър

полиноми в интервал $[-1,1]$ или $[0,1]$, кубични или квинтик Ермитови (Hermite) полиноми за интервалите $[0,1]$ и $[0,2]$, Чебишев полиноми от 1 и 2 род, Хаар и Уолш функции, и др.

Четвъртият метод е разработен за получаване на машабираци (мултимашабираци) функции от скаларно (матрично) спектрално разлагане притежаващи едновременно свойствата - ортогоналност, нулеви моменти, компактен носител, и гладкост. За тази цел е разработен бърз и точен метод на Бауер.

Научна постановка на изследването

Обект на настоящата дисертация са мултимашабираци и мултиуейвлетни функции. *Предмет* на научното изследване е разработване на мултимашабираци и мултиуейвлетни функции и възможни приложения в различни (мулти)филтри.

Цел на дисертационния труд е от направения анализ на състоянието на разглежданата научна област да се разработят методи за построяване на уейвлетни и мултиуейвлетни филтърни банки.

Хипотеза

Идеята за търсене на нови методи за разработване мултиуейвлетни филтърни банки е свързана със следната хипотеза, която има два аспекта:

- (а) Възможност за получаване им от различни базисни функции (полиноми, сплайни) и чрез прилагане метода на Бауер за спектрално разлагане.
- (б) Методите да бъдат явни, прости, и сходимы, както и получените филтърни банки (при възможност) да са по-добри характеристики.

Реализацията на хипотезата се доказва чрез верифициране на следните твърдения:

- (а) Разработване на методи за построяване на машабираци и мултимашабираци функции от полиноми и сплайни;
- (б) Алгоритми за бърз и точен метод на Бауер;

Методология на изследването

Изпълнението на дисертационния труд е съобразено с основните методи за постигане на научно познание - анализ, синтез, сравнение, обобщение, и експериментални изследвания.

Направен е обзор и анализ на методите за разработване на уейвлетни и мултиуейвлетни филтърни банки от гледна точка на математиката и инженерни приложения. На базата на този критичен анализ е поставена целта на научното изследване и е формулирана основната хипотеза.

Разработени са следните методи за построяване на банки.

- ❖ *Директен метод* ;
- ❖ *Метод на смяна на базиса*;
- ❖ *Метод на външното скалярно произведение*;
- ❖ *Бърз метод на Байер за спектрално разлагане*.

Главни предимства на първите два метода е, че са прости и явни, докато другите са с по-голяма изчислителна сложност.

Избран и обоснован е емперичния подход за прилагането на методите. За неговата реализация са създадени алгоритми, построени са три численни метода, и са проведени експерименти. Разработени и изследвани са филтърни банки за обработка на 1D и 2D сигнали чиито резултати са систематизирани и анализирани.

Основни задачи на изследването:

1. Да се направят проучване, обзор и критичен анализ на съществуващи методи за построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции;
2. Да се очертаят изследователски възможности при разработване на нови методи за построяване на филтърни банки;
3. Да се предложат нови методи за разработване на мащабиращи и мултимащабиращи функции от полиноми и сплайни;
4. Да се дефинират и разработят методи на спектрално разлагане;
5. Да се разработят алгоритми за бърз и точен метод на Бауер;
6. Да се синтезира лифтинг схема на мултифилтърната банка на Алперт и проведат експериментални изследвания с разработените методи за построяване на уейвлетни и мултиуейвлетни филтърни банки.

Участие в проекти

Част от приложените резултати в настоящото дисертационно изследване са постигнати от автора като са пряко свързани с научно-изследователския проект:

Проект 'Астроинформатика: Обработка и анализ на дигитализирани данни и web-базирано приложение', финансиран от фонд „Научни изследвания“ на МОН по договор № ДО-02-275 (2008 г. – 2012 г.)

Структура на съдържанието

Дисертацията се състои от 5 глави, увод, заключение, и списък на цитираната литература.

В *Увода* са посочени темата, обекта и предмета на дисертационния труд, както и водещата хипотеза. Описана е накратко актуалността на темата и мотивацията за извършване на дисертационното изследване. Поставена е целта и методологията на изследователската работа, както и задачите, чрез които тя да бъде постигната.

Глава 1 е посветена на съществуващи методи за разработване на уейвлетни и мултиуейвлетни филтърни банки. Тя включва теория на базисни функции за полиноми, сплайн, спектрално разлагане, и построяване на скаларни (векторни) филтърни банки.

В *Глава 2* се разработват три метода за построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции от полиноми или сплайн функции – *метод на смяна на базиса*, *директен метод*, и *метод на скаларното произведение*.

Глава 3 описва съществуващи методи за спектрално разлагане. Разработено е задължително условие на гладкост на произведение на матричен филтър. Разработена е мащабиращата функция на Добеши 4 по метод на корени на полиномите. Описана е базова теория за метода на Бауер. Разработено е произведението на филтър на Алперт.

В *Глава 4* се разработват алгоритми за бърз метод на Бауер и решаване им с три численни метода. За тази цел са разработени *Алгоритъм 1* и *2* и са построени ортогонални мултифилтърни банки на Алперт.

Глава 5 е посветена на:

- (1) Сравнителен анализ на четирите метода за разработване на мащабиращи (мултимащабиращи) функции, на методите на Бауер за мащабиращи функции на Хаар, Добеши 4, и мултимащабираща функция на Алперт;
- (2) Експериментално изследване на бързия и точен метод на Бауер за мащабиращите функции на Хаар и Добеши 4;
- (3) Изследване на точния метод на БМБ чрез прилагане на *Алгоритъм 2* за скаларен и шест матрични полиноми;
- (4) Изследване на точния метод на БМБ чрез използване на вградени софтуерни функции за седем примера;
- (5) Разработване на лифтиг схема на мултифилтър на Алперт в ортогонална мултифилтърна банка за анализ и възстановяване на изображение с ниво на сиво с различно квантуване на коефициента $\sqrt{3}$. Направен е сравнителен анализ на 3 ортогонални мултифилтърни банки за обезшумяване на

изображения с ниво на сиво с размер 256×256 и 512×512 пиксела и адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) с дисперсия ($\sigma = 10, 20$);

(6) Сравнителен анализ на ортогонални скаларни и векторни филтри за компресия на изображения от сканирани фотографски плаки.

Представени са три приложения:

- *Приложение 1* – Тъждество на Безаут (Bezout identity)
- *Приложение 2* – Таблични резултати за влияние размерността на Тъоплецовата матрица в класическия метода на Бауер за спектрално разлагане върху точността на производението на скаларен (матричен) филтър.
- *Приложение 3* – Получаване на матрични коефициенти на нов мултифилтър чрез *Matlab* и *Mathematica*.

Дисертационният труд се състои от **150** страници, **36** фигури, **15** таблици и **153** литературни източника и 2 приложения.

1.1 Въведение

В теория за обработка на сигнали, уейвети (wavelets) се наричат бързо затихващи функции във времето, или накратко - бързо затихващи вълнички. Чрез математическите операции, трансляция (translation) и свиваване/разширяване (dilation), те образуват (пълни) множество от измерими функции [43], [34], притежаващи свойствата – ортогоналност, нулеви моменти, компактен носител, и гладкост. Възникването им е породено от възможността за анализ на нестационарни сигнали което изисква честотната характеристика на филтър да зависи от времето. Те се използват чрез базис от функции за построяване на филтърни банки с малък брой коефициенти, изчезващи моменти и добри апроксимационни свойства. Определяне едновременно на пространствените и честотните особености за даден сигнал се използва за анализ на локални кратковременни сигнали - сигнали с пикове, отсъствие на сигнал, прекъсвания на сигнал, стъпаловидни сигнали и т.н. Тези уникални свойства на уейветите ги прави предпочитани пред трансформацията с Фурие функции и привлекателни за компресия на сигнали [3], за икономиката [1], [2], [6], [7], при обработка на говор [13], изображения [4], [5], хранително вкусова промишленост [8] и др.

Първите уейвлетни функции са получени от Добеши (Daubechies) в [43]. Те са ортогонални, със стръмни честотни характеристики (*flatness*), и компактна основа. Уейвлетни функции адаптирани за интервал $[0,1]$ са открити от Майер (Meyer) [37], [105]. По-късно Добеши чрез ортонормиран уейвлетен базис от неполиномиален тип разширява възможностите за анализ на нестационарни сигнали за определен интервал.

В теорията на уейветите съществуват сплайн-уейвлетни функции построени от различни сплайн функции. Те притежават проста структура, компактна основа и са линейна комбинация от базисни функции на B -сплайни като получените функции са неортогонални. Използват се при построяване на уейвлетни крайни елементи, които удовлетворяват условието за непрекъснатост на функция, с което се постига многомащабно представяване и осигоряване на адаптивни йерархически решения.

Важни свойства на уейвлетните функции са еквивалентността на техните норми [62] за широк клас функционални пространства и прилагането им за решаване на интегрални и интегрално-дифференциални уравнения [9], на обикновенни

диференциални уравнения (ОДУ) [73], интегралното уравнение на Абел [146], [147], диференциално уравнение от типа на Лейн-Емден (Lane-Emden), ОДУ от втори ред с условие на фон Нойман в [10], частни диференциални уравнения (ЧДУ) [25], [41]. Техен важен недостатък е невъзможността да притежават едновременно всички свойства - *ортогоналност, нулеви моменти, компактен носител, и гладкост* [131], [132].

За преодоляването на този недостатък са създадени мултимащабиращите и мултиуейвлетните функции като се използват едновременно две или повече мащабираща и уейвлетна функция наречени мултимащабиращи и мултиуейвлетни функции. Филтърните банки се наричат *мултиуейвлетни филтърни банки* или само *мултифилтри* [15], [16], [50], [51], [63]. Те намират приложения в биологията, металургията, финансова математика, автоматиката, машиностроенето, астрономия, обработката на радарни сигнали, обезшумяване, компресия на едномерни и многомерни сигнали, и др.

Първият мултифилтър е двуканална ортогонална филтърна банка [130] получена чрез фрактална интерполация от *Geronimo, Hardin, и Mssopust* (GHM) [57]. Ортогонални мултифилтри притежаващи *добри мултифилтърни свойства* (ДМС) (good multfilter properties, GMP's) са построени от Chui и Lian (CL) [35] и Shen (SA4) [126]. Ортогонални мултифилтърни банки от седма степен с производни от втори ред е построена в [11]. Други ортогонални и полуортогонални мултиуейвлетни филтри са построени в [76], [77], [118], [119], [125], [151], а в [137] са построени от скаларни филтри.

Важен вид мултифилтри са интерполиращите, чиито коефициенти са точно дискретните стойности на входния сигнал. Техен недостатък е, че не могат да бъдат симетрични/асиметрични.

В последните години нов вид са балансираните мултифилтри и по-новите 'армлет' (*armlet*) мултиуейвети [40], [96], [97], [99], [100], [101], [127], [136]. Друг тип са биортогоналните съдържащи основни и дуални мултифилтри [64], [145].

Главно предимство на мултифилтърната теория е възстановяването на сигнал (за сметка на ортогоналността), добрата ефективност (за сметка на гладкостта), и високата степен на апроксимация (за сметка на голям брой нулеви моменти) [57], [130]. Симетрията на функциите позволява симетрично разширяване границите на сигнали. Ортогоналността води до независими подленти (subbands). Изчезващи моменти от по-висока степен се използват за представяне на полиноми от по-висока степен с по-малък брой коефициенти. Тези свойства дават гъвкавост на линейните пространства за построяване на частичен полином (*piecewise polynomial*), например ортогоналната Хаар филтърна банка с компактна основа [49]. Разширяването на пространството с полиноми

от по-висока степен води до пространство от частични полиноми на n -степен с целочислени възли и ортогонален базис. Например, пространството от n -степенни Лежандър частично линейни полиноми и техните целочислени трансляции в интервал $[-1,1]$. Те са използвани за решаване на интегрални уравнения, ОДУ, ЧДУ, и в числения анализ [47], [45].

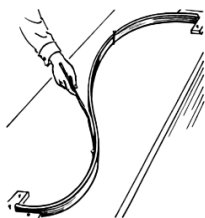
1.2. Теория на сплайн и Лежандър полиноми

1.2.1 Сплайн функции

Думата "сплайн" се свързва с апроксимация на гладки, частично-линейни полиномиални функции. Тя е използвана за първи път от Шьонберг (Schoenberg) в [123]. Главната идея е възникнала в авиационната и корабостроителната промишленост от Robin Forrest като "гълбарник или таванско стая (lofting)" [21], защото е използвана за построяване на самолетни шаблони чрез поставяне на тънки дървени дъски през точки поставени на пода на голямо дизайнерско таванско помещение, **фиг.1.1**. Дъските закрепени на отделни точки, наричани от Шьонберг "патици" ("кучета" или "плъхове") образуват обвивки с минимална енергия между точките на огъване, което ограничава еластичността на материала. Заедно с това възниква идеята за моделиране на позицията на кривата между "патиците" да бъдат използвани конични отрязъци (парчета) "коничен гълбарник (conic lofting)".

В началото на 1960г. J. C. Ferguson в Боинг и малко по-късно от M.A. Sabin в Британската авиация заменят името "коничен гълбарник" със "сплайн". Думата "сплайн" е източноанглийски диалект на инструмент използван от корабостроителите и чертожниците за построяване на гладки обвивки (shapes) притежаващи желани свойства. Сплайните са използвани за регулиране на деформируеми обекти при моделиране на автомобилни каросерии [68] през късните 50'г или ранните 60'г.

Главните приноси за развитие на сплайните са на Де Кастелаяу (de Casteljau) от "Ситроен", на Безие (Bezier) от "Рено", на Бирхоф (Birkhoff), Гарабедиан (Garabedian), и де Бур (de Boor) от "General Motors" [19], [26], [150], на двама от авторите на книгата [17] в "Pratt & Whitney Aircraft", и на David Taylor построил модела за най-голямото корито на плавателен съд [42].



Фиг.1.1 Пример за сплайн (Монтиране на тънка дървена дъска през точки)

От гледна точка на математиката, ‘сплайн’ е *частично линейна (piecewise linear)* функция състояща се от полиномиални функции чиято гладкост зависи от броя производни. По-общо, *сплайн* е множество от всички части на полином с определени условия за гладкост необходим за построяването на функция в интервал $[a, b]$. Сплайни с полиноми от ниска степен се наричат *частично-линейни* и са използвани като интерполиращи функции. Сплайн функции от трета степен са кубичните Ерминови сплайн функции които са често използвани поради C^2 непрекъснатост на функциите преминаващи през две точки със зададени производни.

1.2.1.1 Линеен B-сплайн (функция “Шапка”)

Линейният B – сплайн (съкратено от базисен сплайн) с коефициенти a и b

$$L(t) = at + b. \quad (1.1)$$

води до построяване на частично линейната функция “Шапка” (Hat). Тя навсякъде е нулева с изключение на тясната си основа (носител) и средната точка 1. Използва се като линеен интерполант и/или краен елемент. Мащабиращата функция “Шапка” се състои от три коефициента h_0, h_1, h_2 с равноотдалечени възли на разстояние и се описва с двумащабното уравнение:

$$\phi(t) = h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t-1) + h_2\phi(2t-2) \quad . \quad (1.2)$$

1.2.1.2 Кубичен Ермитов сплайн

Ермитовите сплайни функции принадлежат към клас от непълни (*defective*⁽¹⁾) сплайн функции. Най – често използван е кубичния сплайн състоящ се от полином на степен ≤ 3 с две непрекъснати производни за всеки подинтервал и притежава:

- Непрекъснатост на възел C^2 ;
- Минимална крива за n частично - линейни кубични функции за $n+3$ точки ;
- Лесно определяне на позицията и производните в началните и крайните точки;
- Добра гладкост с малък брой операции;

Кубичният Ермитов сплайн (КЕС) се използва за интерполация с непрекъснати първи и (възможно прекъснатата) втора производна на възлите, за интерполиращи и биортогонални мултиуейвлети филтърни банки. КЕС е полином от трета степен

$$H(t) = at^3 + bt^2 + ct + d ,$$

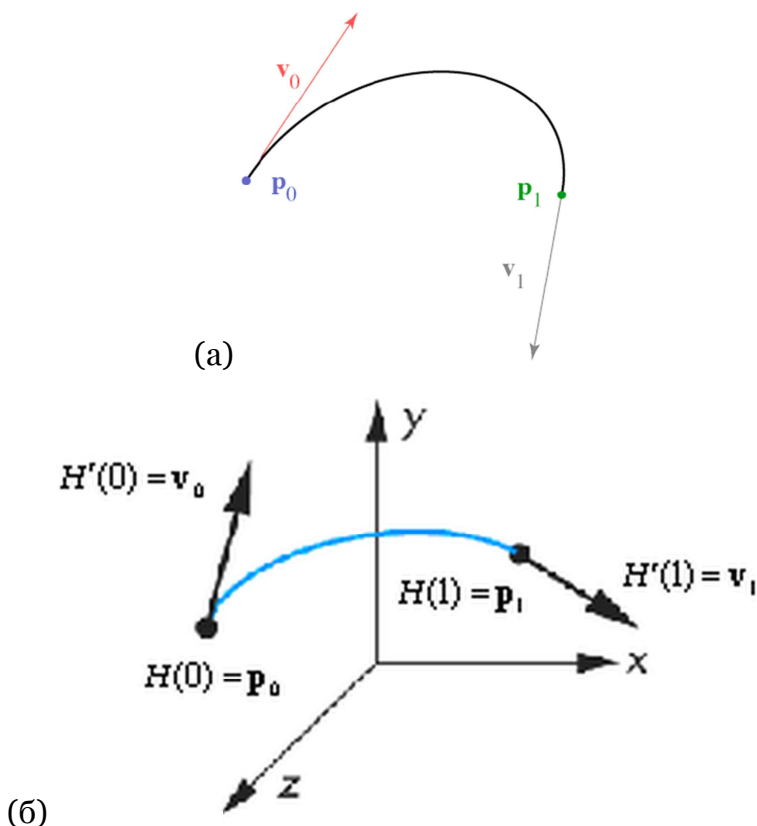
за две крайни точки и производни (или тангенти) в тези точки. Сегмент в 1D е показан на **фиг.1.2(а)** и 3D на **фиг. 1.2(б)**.

⁽¹⁾ Разликата между степента на сплайн и неговата гладкост се нарича *дефект на сплайн*. Например, частично линейна непрекъсната функция (нейната графика е многогълна линия) е сплайн от степен едно с дефект 1.

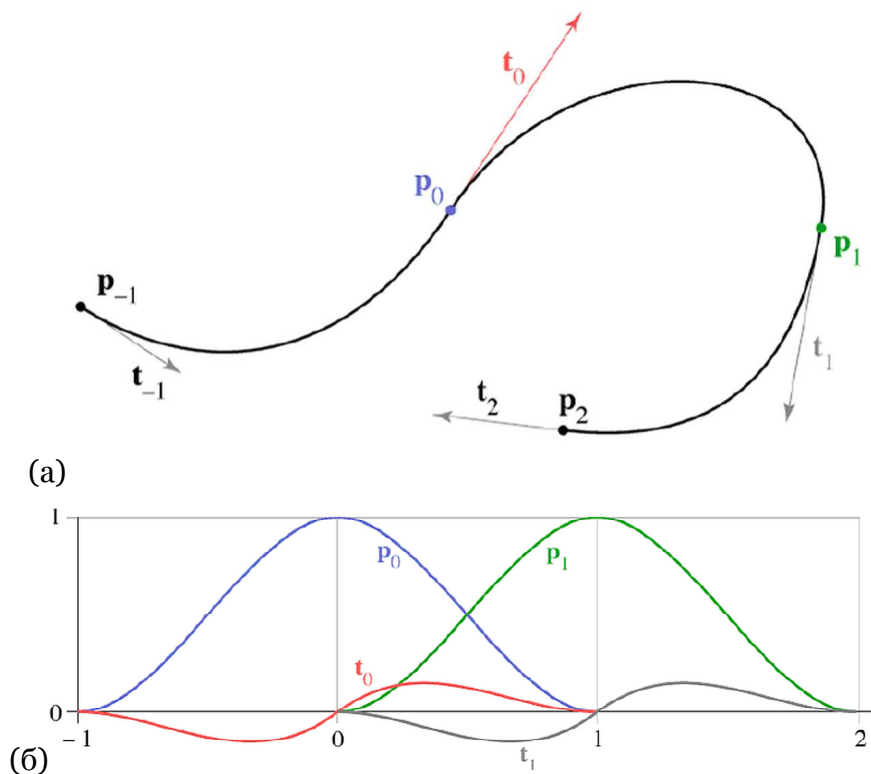
Това е еквивалентно на интерполация на две точки чрез параметрична кубична крива:

$$\begin{aligned} H(0) &= \mathbf{p}_0 & H'(0) &= \mathbf{v}_0 \\ H(1) &= \mathbf{p}_1 & H'(1) &= \mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

където \mathbf{p}_0 и \mathbf{p}_1 са крайните точки, $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ са производните на функцията в точките по косинус направление. Промяна в производните води до промяна големината на векторите, което води до изменение на формата на кривата. Пример за кубичен Ермитов сплайн в интервал $[p_{-1}, p_2]$ е показан на **фиг. 1.3(а)**. Той се състои от три сегмента $[p_{-1}, p_0]$, $[p_0, p_1]$, и $[p_1, p_2]$, контролни точки p_{-1}, p_0, p_1 , и p_2 , и тангенти (производни) в четирите точки - t_{-1}, t_0, t_1 , и t_2 . Мащабиращи функции $\phi_0(t), \phi_1(t)$ за интервалите $[-1, 1]$ и $[0, 2]$ са показани на **(фиг. 1.3(б))**, където \mathbf{p}_0 (със синьо) и \mathbf{p}_1 (със зелено) са вътрешни контролни точки и t_0 (с червено) и t_1 (с черно) - техните производни. Очевидно, за интервала $[-1, 1]$ – мащабиращата функция $\phi_0(t)$ е равна на функцията в точката p_0 и мащабиращата функция $\phi_1(t)$ равна на нейната производна t_0 , докато за интервала $[0, 2]$, мащабиращата функция $\phi_0(t)$ е равна на функцията в точката p_1 и мащабиращата функция $\phi_1(t)$ на нейната производна t_1 (**фиг.1.3(б)**).



Фиг. 1.2 Кубични Ермитови криви; (а) Сегмент със ограничения: крайни точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ и тангенти (производни) $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$; (б) Определяне на крайните точки и техните производни;



Фиг. 1.3 Кубичен Ермитов сплайн в $[-1, 2]$; (а) Крайни точки p_{-1}, p_2 , вътрешни точки p_0, p_1 , и производните във всички точки t_{-1}, t_0, t_1 , и t_2 ; (б) Мащабиращите функции $\phi_0(t)$ и $\phi_1(t)$ разделени на три сегмента $[p_{-1}, p_0]$, $[p_0, p_1]$, и $[p_1, p_2]$;

Следователно, мултимащабиращата функция на кубичен Ермитов сплайн се определя от четири матрични коефициенти C_0, C_1, C_2, C_3

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = [C_0 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + C_3 z^{-3}]$$

и може да се използва като краен елемент с $(2r-1)$ степен частично-линейни полиноми и $(r-1)$ непрекъснати производни.

1.2.2 Лежандър полиноми

Ортогоналността на базисни функции играе важна роля в функционалното пространство. В много приложения е предпочитан ортогоналния базис, защото смяната му от един към друг не изисква почти никаква усилия. Нещо повече, това е ключа за постигане на по-добра обработка на функции с непрекъснат и дискретен Фурие анализ, апроксимация на функции по метода на най-малките квадрати, статистически анализ на големи масиви от данни, обработка на многомерни изображения и др. Следователно намирането на ортогонален базис е критична точка във функционалния анализ. Възможност за намиране на ортогонална система от всяка линейно независима система

в евклидовото пространство е алгоритъма на Грам–Шмид (*Gram–Schmidt*), който изразява базисните функции като линейна комбинация от други базисни функции. Пример за построяване на ортогонален базис са Лежандър полиноми. Чрез тях е построен ортогоналния мултифилтър на Алперт [15] за интервал [0,1] притежаващ едновременно свойствата - ортогоналност, линейно - фазова симетрия, и компактна основа. Съставните му функции са *частично-линейни* (*piecewise*) и прекъснати. Важно е да се отбележи, че в много инженерни приложения прекъснатостта на функциите е недостатък, но е предимство при слаба формулировка на производни, решаване на ЧДУ, ОДУ [16], на интегрални уравнения [15], числен анализ [47], [45], и др.

Първата мащабиращата функция е свързана с Хаар уейвлет с основа [0,1] принадлежаща към пространството на *частично-константни полиноми* с целочислени възли. Разширението на това пространство към по-висока степен полиноми дава пространството от n -степен *частично-линейните полиноми* с целочислени възли. Полиномите на степен m в интервал [-1,1] образуват базис в пространството V_m , докато полиноми на степен $(m+1)$ - образуват базис на ортогонално допълнение V_m^\perp . Обединяването на двата базиса формира базис в пространството V_{m+1} . Следващото ортогонално допълнение V_{m+1}^\perp води до построяване на ортогонален базис в $L^2([-1,1])$ с нарастваща степен полиноми. Това означава че всяко следващо пространство се построява чрез вместване на предните две (основното и неговото допълнение). Този процес на построяване на пространства от различни базиси се нарича *многодетайлен* (*multiresolution*) анализ. Такова ортогонално пространство е построено от Алперт чрез неортогонален базис на Лежандър полиноми [107] като развива първи връзката между мащабираща и уейвлетна функция за определено ниво на разлагане дефиниране на двумащабното уравнение (*the refinement equation, the two-scale equation, или the dilation equation*).

Лежандър полиномите са полиноми по t -степен, т.е. $1, t, \dots, t^i$ и за интервал [-1,1] образуват неортогонален базис:

$$\phi_r(t) = \sqrt{r + \frac{1}{2}} P_r(t). \quad (1.4)$$

където:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, \\ P_1(t) &= t, \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \quad \text{за } m = 1, 2, 3, \dots \\ (m+1)P_{m+1}(t) &= (2m+1)tP_m(t) - mP_{m-1}(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Те са наречени в чест на френския математик от 18 век Адриан–Мари Лежандър (Adrien-Marie Legendre), който за пръв път ги е използвал при изучаване на Нютовата гравитация. Лежандър полином в интервал $[0, 1]$ може да бъде построен от интервал $[-1, 1]$ чрез линейната трансформация :

$$s = \left(\frac{2}{b-a} \right) t - \left(\frac{b+a}{b-a} \right). \quad (1.6)$$

където t и s са променливи за $[-1 \leq s \leq 1]$ и $[a \leq t \leq b]$. Следователно, за интервал $[a=0, b=1]$ линейната трансформация (1.6):

$$s = \left(\frac{2}{1-0} \right) t - \left(\frac{1+0}{1-0} \right) = 2t - 1. \quad (1.7)$$

води получаване на ортогонални частично – линейни Лежандър полиноми:

$$\tilde{P}_k(t) = P_k \left(\frac{2t-1-0}{1-0} \right) = P_k(2t-1) \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.8)$$

с норма $\|\tilde{P}_k(t)\| = \sqrt{\frac{1}{2k+1}}$, където първите 2 са:

$$\frac{\tilde{P}_0(t)}{\|\tilde{P}_0(t)\|} = \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{\tilde{P}_1(t)}{\|\tilde{P}_1(t)\|} = \frac{2t-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}(2t-1).$$

Важно приложение на Лежандър полиномите е възпроизвеждането на полиноми. Например, едночления полином x^2 се представя с първите три Лежандър полиноми:

$$x^2 = c_0 P_0(t) + c_1 P_1(t) + c_2 P_2(t) \quad (1.9)$$

където коефициентите са $c_0 = \frac{1}{3}$, $c_1 = 0$, и $c_2 = \frac{2}{3}$.

Друго важни приложения са в мултиуейвлетната теория за интервал $[0, 1]$ където Алперт за пръв път е построил ортогонална мултимасщабираща функция от първите два Лежандър полинома $P_0(t)$ и $P_1(t)$:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = [C_0 + C_1 z^{-1}] = \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

където C_0 и C_1 са 2×2 матрични коефициенти.

1.3. Теория на скаларни и векторни филтърни банки

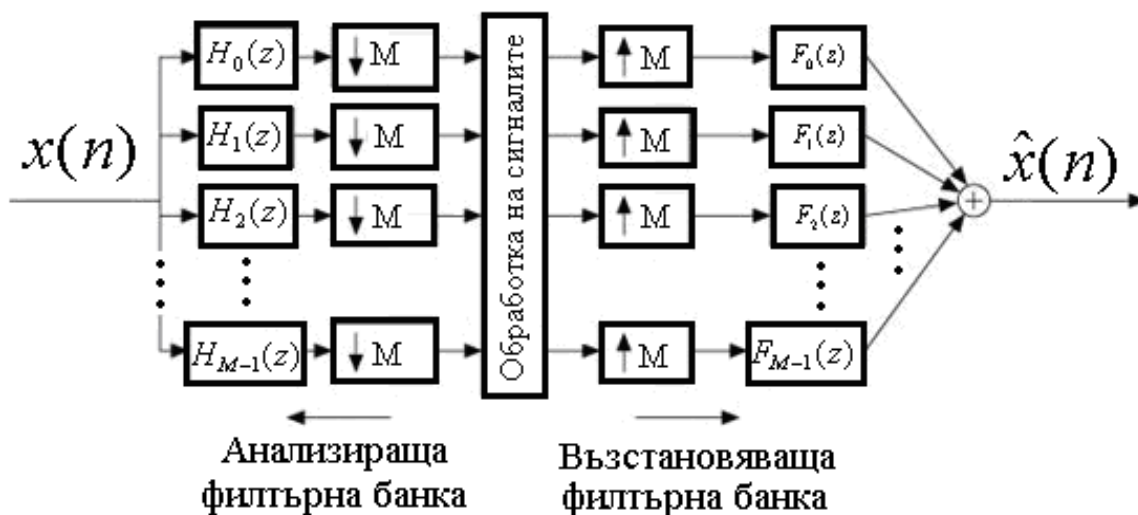
1.3.1 Скаларни филтърни банки

1.3.1.1 Обща теория

Теорията на уейвлетите е област от базисни функции свързани помежду си чрез операторите мащабиране (*scaling*) и трансляция (*translation*) като за генериране на

всички базисни функции е използвана уейвлетна базисна функция отбелязвана с ψ . Тя е проектирана с определени характеристики в пространството L^2 и се нарича *майчин уейвлет* (*уейвлетна функция, уейвлет*). Във базиса съществува втора функция построена от краен брой функции, която се нарича *бащин уейвлет* (*мащабираща функция*) и се отбелязва с ϕ . Целочисленните транслации на двете функции образуват Рис базис. Структурата от двете функции (мащабиращи и уейвлетни функции) образуваща дървовидна йерархия за две различни области за анализ и възстановяване (синтез) се нарича *филтърна банка*. Тя е зависима от операторите *повишане на дискретизацията* (*upsampling*) с множител M ($\downarrow M$) и *децимация* (*namalyavane na diskretizatsiyata*) (*downsampling*) с множител M ($\uparrow M$). Това е еквивалентно на построяване на кратномашабен анализ (КМА) или многомасабен анализ (ММА), (multiresolution analysis, MRA). Ако мащабиращите и уейвлетните функции за анализ се използват и за възстановяване на сигнал филтърната банка се нарича *ортогонална*, в противен случай - *биортогонална*.

Обща структура на M -канална филтърна банка е показана на **фиг.1.4**. Филтърни банки състоящи се от мащабиращи и уейвлетни функции се нарича *дискретна уейвлетна трансформация* (ДУТ).



Фиг.1.4. Структура на M -канална скаларна филтърна банка

За опростяване на входно – изходната връзка на филтърната банка е разгледана 2-канална филтърна банка. За входен сигнал $x(n)$ тя се описва чрез матричното уравнение:

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} [H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)] X(z) + \frac{1}{2} [H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)] X(-z) \quad (1.11)$$

$$= T(z)X(z) + S(z)X(-z)$$

което в матричен вид е:

$$\hat{X}(z) = \begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}.$$

Произведението $H_0(z)F_0(z)$ се нарича *произведение на скаларен (матричен) филтър* (scalar (matrix) product filter), полулентов или автокорелационен филтър. Такъв филтър е в основата за намиране чрез спектрално разлагане на мащабиращи или мултимащабиращи функции. От гледна точка на математиката това е *пара-Ермитов скаларен (матричен) полином*.

Тъй като филтърната банка съдържа операторите децимация и интерполация в нея се образуват нежелани процеси – изкривявания в честотните ленти, препокриване на честотни ленти, и образуване на огледални честотни ленти. Тези процеси се разделят на три типа:

- 1 *Изкривявания от препокриване (aliasing distortion)* – произведението $S(z)X(-z)$ в (1.11);
- 2 *Амплитудни изкривявания* – отклонения от нормираните амплитуди на предавателната функция $T(z) = [H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]$ в (1.11);
- 3 *Фазови изкривявания* - отклонения на фазата на предавателната функция $T(z)$ от желано фазово свойство (например – линейна фаза);

Възможни решения:

- За премахване на изкривявания от препокриване – подходящ избор на възстановяващи филтри на основата на анализиращите.
- За премахване на амплитудните изкривявания – използване на всепропускащите (allpass) филтри, които са с безкрайна импулсна характеристика (БИХ).
- За отстраняване на фазови изкривявания – филтрите да бъдат с крайна импулсна характеристика (КИХ).

Друго желано свойство на филтърна банка освен линейната фаза е перфектно възстановяване с което се избягва въвеждане на грешки и се предовратяват видими фазови изкривявания. Това е така защото предавателната функция $T(z)$ на перфектно възстановяваща филтърна банка е чисто закъснение, с линейна фаза, а честотните ленти са без препокриване и промяна на амплитудата, и са в сила уравненията:

$$S(z) = 0$$

$$T(z) = cz^{-d},$$

където,

c е константа и показва амплитудата

d е закъснението на изходния сигнал.

Следователно, входно – изходната връзка перфектно възстановяваща филтърна банка е:

$$\frac{\hat{X}(z)}{X(z)} = cz^{-d}.$$

Тогава, такава филтърна банка може да бъде построена от зададен анализиращ нискочестотен $H_0(z)$ и високочестотен $H_1(z)$ филтър и със следния възможен избор за възстановяващи нискочестотен $F_0(z)$ и високочестотен филтър $F_1(z)$ филтри:

Честотна област	Времева област	
$F_0(z) = -H_1(-z)$	$f_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n)$	(1.12)
$H_1(z) = z^{-(N-1)} H_0(-z^{-1})$	$h_1(n) = (-1)^n h_0(-n+1)$	

За анулиране препокриването на честотни ленти избора за възстановяващите филтри е:

Честотна област	Времева област	
$F_0(z) = H_1(-z)$	$f_0(n) = (-1)^n h_1(n)$	(1.13)
$F_1(z) = -H_0(-z)$	$f_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n)$	

Ако избора на филтри е

$$\begin{aligned} H_1(z) &= H_0(-z) \\ F_0(z) &= H_1(-z) = H_0(z) \\ F_1(z) &= -H_0(-z) = -H_1(z) \end{aligned} \quad (1.14)$$

получаваме *квадратурно – огледални филтърната банка* (КОФБ). Ако предавателната функция на филтърна банка (1.11) е

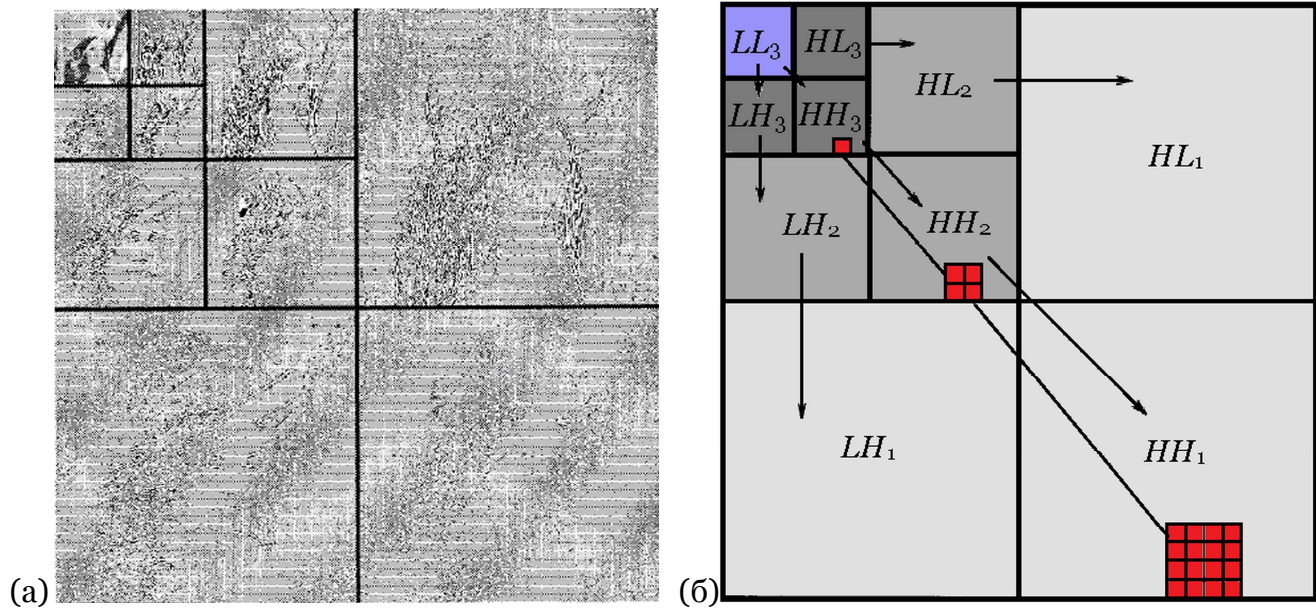
$$\begin{aligned} T(z) &= [H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)] \\ &= H_0(z)F_0(z) + H_0(-z)F_0(-z) \\ &= \gamma \end{aligned} \quad (1.15)$$

за константа $\gamma \neq 0$, то получаваме симетрична по мощност филтърна банка (*power symmetric filter bank*), която може да бъде построена единствено чрез зададен $H_0(z)$.

ДУТ приложена върху изображения води до следните статистически свойства:

- ❖ Пространствено – честотно местоположение;
- ❖ Енергийна компактност;
- ❖ Клъстеризация на значещите коефициенти в подлентите (“*Lena*”, **фиг.1.5(а)**);
- ❖ Кръстосана подобие на изображенията в подлентите **фиг. 1.5(б)**;
- ❖ Затихваща амплитуда на уейвлетните коефициенти в подлентите;

В подлентовото кодиране сигнала се разлага без прекриване на няколко честотни ленти с определено честотно местоположение и приблизително независимо съдържание. Всеки уейвлетен коефициент представя информация в определен честотен диапазон на определено пространствено местоположение и е с определено пространствено местоположение. За определено ниво от една подлента всеки уейвлетен коефициент има връзка с местоположението на коефициент от друго ниво и друга подлента.



Фиг. 1.5 Едностранна пирамидална структура на ДУТ с 3 нива на разлагане за изображение с ниво на сиво “Lena”; (а) Усредненото изображение LL_3 (син квадрат) и детайлни изображения (сиви квадрати) за всяко ниво; (б) Родствени връзки в детайлните изображения за всяко ниво, родител – дете - потомци (червени квадрати);

Това води до въвеждане на следните родствени връзки показани на **фиг.3.3(b)** [98]:

- ❖ *потомци (descendants)* - уейвлетните коефициентите от по-фините скали с подобна ориентация и същото пространствено местоположение;
- ❖ *прародител (ancestor)* - коефициент от който произхождат уейвлетните коефициентите;
- ❖ *родител (parent)* - уейвлетен коефициент от по-грубата скала;
- ❖ *деца (children)* - всеки един от четирите коефициента в подлентите с ориентация подобна на тази от по-финната скала и пространствено местоположение;

Между родителските и детските уейвлетните коефициенти съществуват много малки линейни корелации.

1.3.1.2 Построяване на мащабиращи и уейвлетни функции чрез параметър

Построяването на ортогонални филтърни банки чрез параметър е изследвано в [86], [129], [139]. То се състои от произведения от унитарни матрици:

$$H_p(z) = \left[\prod_{i=0}^{L-1} \begin{pmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \cos \phi_L & \sin \phi_L \\ -\sin \phi_L & \cos \phi_L \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

където $\phi_i \in [0, 2\pi]$ и $\phi_L \in [0, \pi]$, чиято структура се нарича *решетъчна структура* (lattice structure). Друга структура на ортогонална филтърна банка чрез параметър която води до директно получаване на коефициентите на мащабиращи и уейвлетни филтри е предложената в [86]:

$$\begin{bmatrix} c_0^K & d_0^K \\ c_1^K & d_1^K \\ c_2^K & d_2^K \\ \vdots & \vdots \\ c_{N-1}^K & d_{N-1}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_K & & & \\ & \cos \phi_K & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cos \phi_K \\ & & & & \cos \phi_K \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \text{ за } K \geq 2 \quad (1.17)$$

където I е единична матрица, и разработена от автора универсално разлагане на унитарна матрица чрез матрица на Якоби $J(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$ в [87]:

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = J(\alpha)J(\beta), \quad (1.18)$$

където $\beta - \alpha = \phi \bmod 2\pi$. Това е еквивалентно на разлагането с тридиагонални матрици:

$$\begin{aligned} R(\phi) &= I - A\left(\frac{\phi}{2}\right)B\left(\frac{\phi}{2}\right)A^T\left(\frac{\phi}{2}\right) = \\ &= I - \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & \sin \frac{\phi}{2} \\ 1 & -\cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2\cos \frac{\phi}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \frac{\phi}{2} & -\cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Предимство на предложената параметризация и разлагането на триъгълни матрици е възможността за хардуерна реализация чрез лифтинг схемата. Автора в [87], [88] е построил ортогонални мултимащабиращи и мултиуейвлетни функции на базата на горните структури и ортогонални мащабиращи и уейвлетни преместени функции

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= \phi_0(t) \\ \phi_1(t) &= \phi_0(t-2) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Примери за прилагане на структурата за директно получаване на коефициентите на мащабиращи и уейвлетни филтри са показани за Хаар и Добеши филтърна банки.

Пример 1: [87] Хаар филтърна банка $\phi_1 = -\frac{\pi}{4}, \phi_2 = \frac{\pi}{2}$

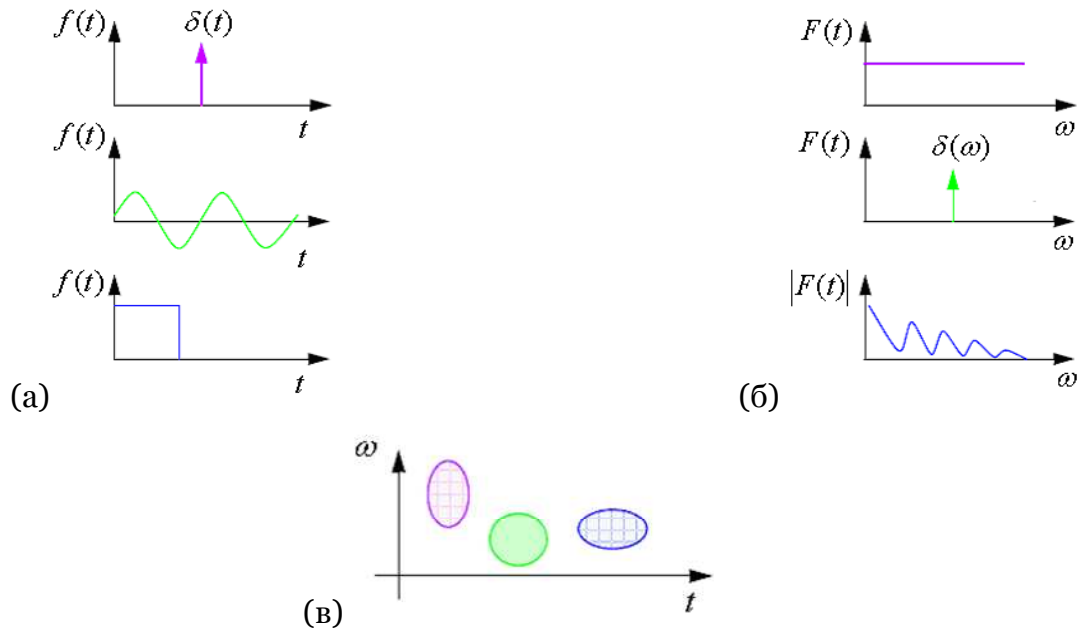
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_0^2 & d_0^2 \\ c_1^2 & d_1^2 \\ c_2^2 & d_2^2 \\ c_3^2 & d_3^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_1^2 & d_1^2 \\ c_2^2 & d_2^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & 0 \\ \sin \phi_2 & 0 \\ 0 & -\sin \phi_2 \\ 0 & \cos \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Пример 2: [87] Добеши филтърна банка $\phi_1 = \frac{7\pi}{12}, \phi_2 = -\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_0^2 & d_0^2 \\ c_1^2 & d_1^2 \\ c_2^2 & d_2^2 \\ c_3^2 & d_3^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{3}) & 0 \\ \sin(-\frac{\pi}{3}) & 0 \\ 0 & -\sin(-\frac{\pi}{3}) \\ 0 & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{7\pi}{12} & -\sin \frac{7\pi}{12} \\ \sin \frac{7\pi}{12} & \cos \frac{7\pi}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.12941 & -0.48296 \\ 0.22414 & 0.83652 \\ 0.83652 & -0.22414 \\ 0.48296 & -0.12941 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.3.1.3 Свойства на мащабиращи и уейвлетни функции

За дефиниране на сигнали във временната област се използва функцията $\delta(t)$ и комплексни синусоиди в честотната. За три сигнала това е показано на **фиг. 1.6(a)**.



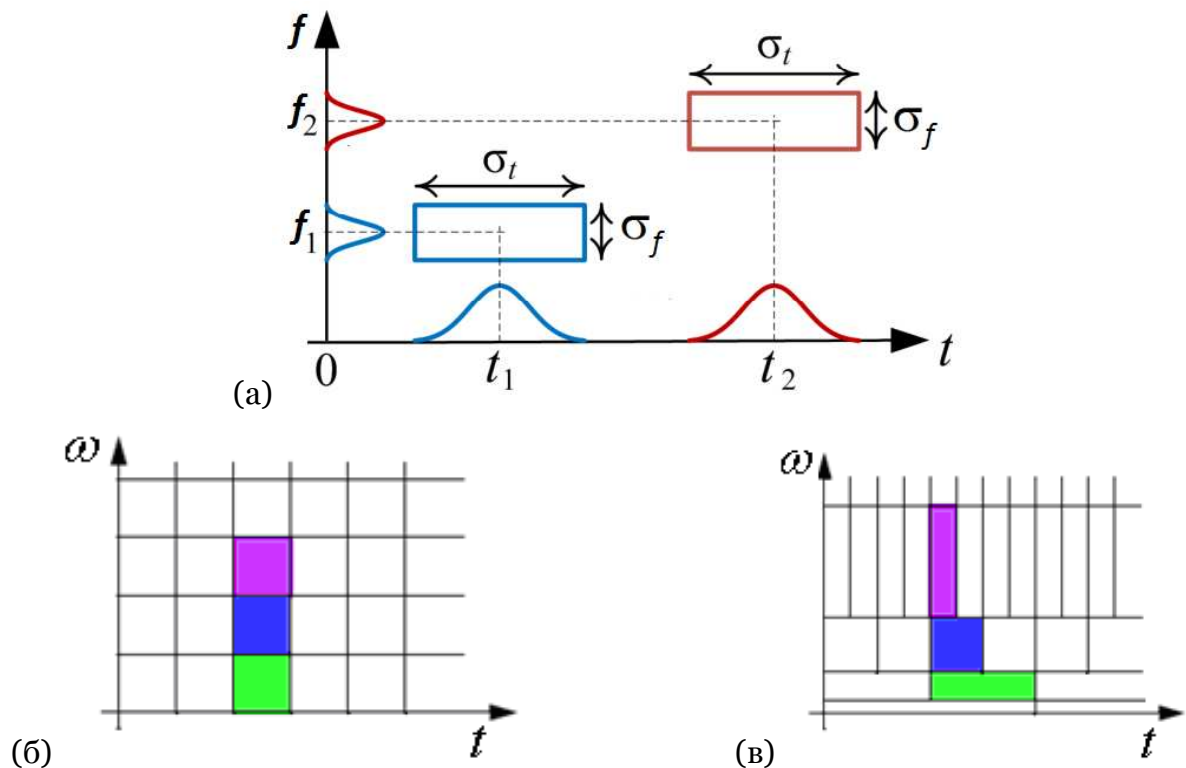
Фиг. 1.6 Характеристики на $\delta(t)$ функция, единична синусоида, и правоъгълна функция ; (а) Времева област t ; (б) Честотна област ω ; (в) Време – честотна област;

По – важни свойства на мащабиращите и уейвлетните функции са:

❖ *Принцип на Хайзенберг (принцип на неопределеност (Uncertainty))* - Открит е за първи път през 1927г. от немския физик Вернер Хайзенберг в квантовата механика като време–честотен анализ [67]. Той гласи, че едновременното определяне местоположението на функция по време и честота е несъвместимо и тяхното произведение е $< \frac{1}{4\pi}$. Ако сигнал $f(t)$ е с единична енергия $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = 1$ в пространството L^2 , тогава $f^2(t)$ и $|F^2(f)|^2$ могат да бъдат разглеждани като плътностни вероятности, а произведението на техните дисперсии σ_f^2 и σ_t^2 (фиг.1.7(а)) като мярка на обхвата е:

$$\sigma_f^2 \sigma_t^2 \geq \frac{1}{(4\pi)^2}.$$

Прилагането на принципа във време–честотния анализ означава по–широка честотна лента на краткотраен импулс и по–тясна за дълготраен. Във временната област единична синусоида показана с $\delta(t)$ функция на фиг. 1.6(б) и правоъгълна функция в честотната област на фиг. 1.6(в).



Фиг.1.7 Големина на време–честотните клетки; (а) **относно** дисперсиите σ_f^2 и σ_t^2
 (б) Прозоръчна Фурие трансформация; (в) Уейвлетна трансформация;

Време– честотеният анализ позволява реализация на прозоръчна Фурие трансформация (Short-Time Fourier Transform, STFT) показана на **фиг. 1.7(б)**. Тя е с еднаква големина на прозорците (време–честотни клетки), което е неин основен недостатък. За разлика от прозоръчната Фурие трансформация, уейвлетна филтърна банка позволява големините на прозорците да се променят по време и честота **фиг.1.7(в)**.

- *Стръмност (Flatness)* - Това свойство определя възможността за бърз преход на честотна характеристика от лентата на пропускане към лентата на непропускане. Това води към минимална преходна характеристика като идеалния случай е 0.
- *Симетричност* - Функцията $f(x)$ е симетрична около точка a ако

$$f(a + x) = f(a - x) \quad (1.21)$$

и асиметрична ако

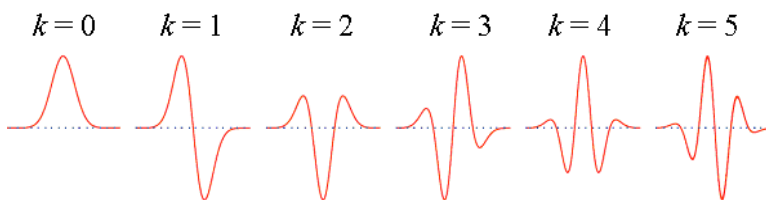
$$f(a + x) = -f(a - x). \quad (1.22)$$

- *Изчезващи моменти (vanishing moments)* – Уейвлетна функция с n -изчезващи моменти удовлетворява условието:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \text{ за } 0 \leq k < n. \quad (1.23)$$

и е ортогонална на $n-1$ степен полиноми. Например, уейвлетни функции получени от квадратичен B -сплайн са симетрични или асиметрични с изчезващи моменти $k \in [0-5]$, (**фиг.1.8**). Обикновено за мащабираща функция се използва уейвлетната функция без изчезващи моменти ($n=0$).

Тъй като за някои приложения предпочитани свойства са симетрия и опростено представяне се построяват симетрични уейвлетни базиси с некомпактна основа [22] или ортогоналност [36] от *частично полиномиални сплайни (piecewise polynomial splines)*.



Фиг. 1.8 Квадратичен уейвлет B – сплайн функция с изчезващи моменти $k \in [0,5]$

1.3.1.4 Кратномащабен анализ (КМА) [139]

Ключово понятие в уейвлетната теория е вложената (вместената) структура наречена *кратномащабен анализ (КМА)* или *многوماщабен анализ (ММА)* (multiresolution analysis (MRA)) състояща се от по – груби и по – финни пространства V_j :

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots, \in L^2(\mathbb{R})$$

← По - грубо пространство По-финно пространство →

КМА притежава следните свойства:

1. *Мащабиране (Scaling)* - За всяко j ,

$$\text{функцията } f(t) \in V_j \text{ единствено ако } f(2t) \in V_{j+1};$$

2. *Обединение (Inclusion)* - За всяко j е в сила

$$V_j \subseteq V_{j+1};$$

3. *Пълнота (Completeness)* - Обединението на подпространствата V_j 's е плътно в L^2 :

$$\text{closure} \left\{ \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \right\} = L^2(\mathbb{R});$$

4. *Уникалност (Uniqueness)* – Подпространствата V_j не се пресичат:

$$\left\{ \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j \right\} = \{0\}.$$



Тези свойства се описват чрез *мащабираща функция* $\phi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \phi(2^j t - k)$, която формира пространство от разширени (дилатирани) и транслирани версии на $\phi(t)$:

$$V_j = \text{linear span} \{ \phi_{j,k}(t) \}, j, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.24)$$

Тя се описва чрез уравнение на дилатация (*dilation equation*) или двумащабно уравнение (*two-scale equation*) с N -брой филтърни коефициенти h_n :

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} h_n \phi(2t - n). \quad (1.25)$$

удовлетворяващи условието:

$$\sum_k h_k = \sqrt{2}. \quad (1.26)$$

Уравнението (1.25) в КМА свързва функциите $\phi_{j,k}(t)$ за определено j -ниво на разлагане с техните дилатации и трансляции. За да бъде пространство $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ пълно, съществува област от функции:

$$W_j = \text{linear span} \{ \psi_{j,k}(t) \}, j, k \in \mathbb{Z},$$

която наследява мащабиращото свойство от подпространствата V_j :

$$f(t) \in W_j \leftrightarrow f(2t) \in W_{j+1} \quad (1.27)$$

и е негово ортогонално допълнение:

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j, \\ W_{j+1} &\perp W_j \end{aligned}, \quad \text{ако } j \neq j' \in Z. \quad (1.28)$$

Подпространствата W_j се състоят от разширените (дилатирани) и транслирани версии на мащабиращата функция $\phi(t)$ и се нарича *уейвлет* функция $\psi(t)$:

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \phi(2^j t - k) \quad (1.28)$$

Тя принадлежи основно към следните две подпростанства:

$$\begin{aligned} \psi(t) &\in V_0 \oplus W_0 \\ \psi(t) &\subset V_1 \end{aligned} \quad (1.29)$$

и се изразява също чрез уравнение на дилатация:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} g_n \phi(2t - n). \quad (1.30)$$

където N е брой на филтърните коефициенти. Уейвлетните коефициенти g_n се получават от h_n взети в обратен ред и противоположен знак за нечетните стойности (*'flip'*) [128]:

$$g_n = (-1)^n h_{N-1-n}. \quad (1.31)$$

Следователно, разлагането на функция $f(t)$ на мащабиращи и уейвлетни коефициенти за ниво j се описва с уравнението:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \phi(t - n) + \sum_{j=1}^J \sum_{n=0}^{N-1} g_{2^j+n}(n) \psi(2^j t - n). \quad (1.32)$$

Изчисляването на мащабиращата и уейвлетната функции може да бъде направено чрез *каскаден алгоритъм*, т.е. чрез итерации с неподвижна точка (*fixed point iterations*):

$$\phi^k(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} h_n \phi^{k-1}(2t - n) \quad (1.33)$$

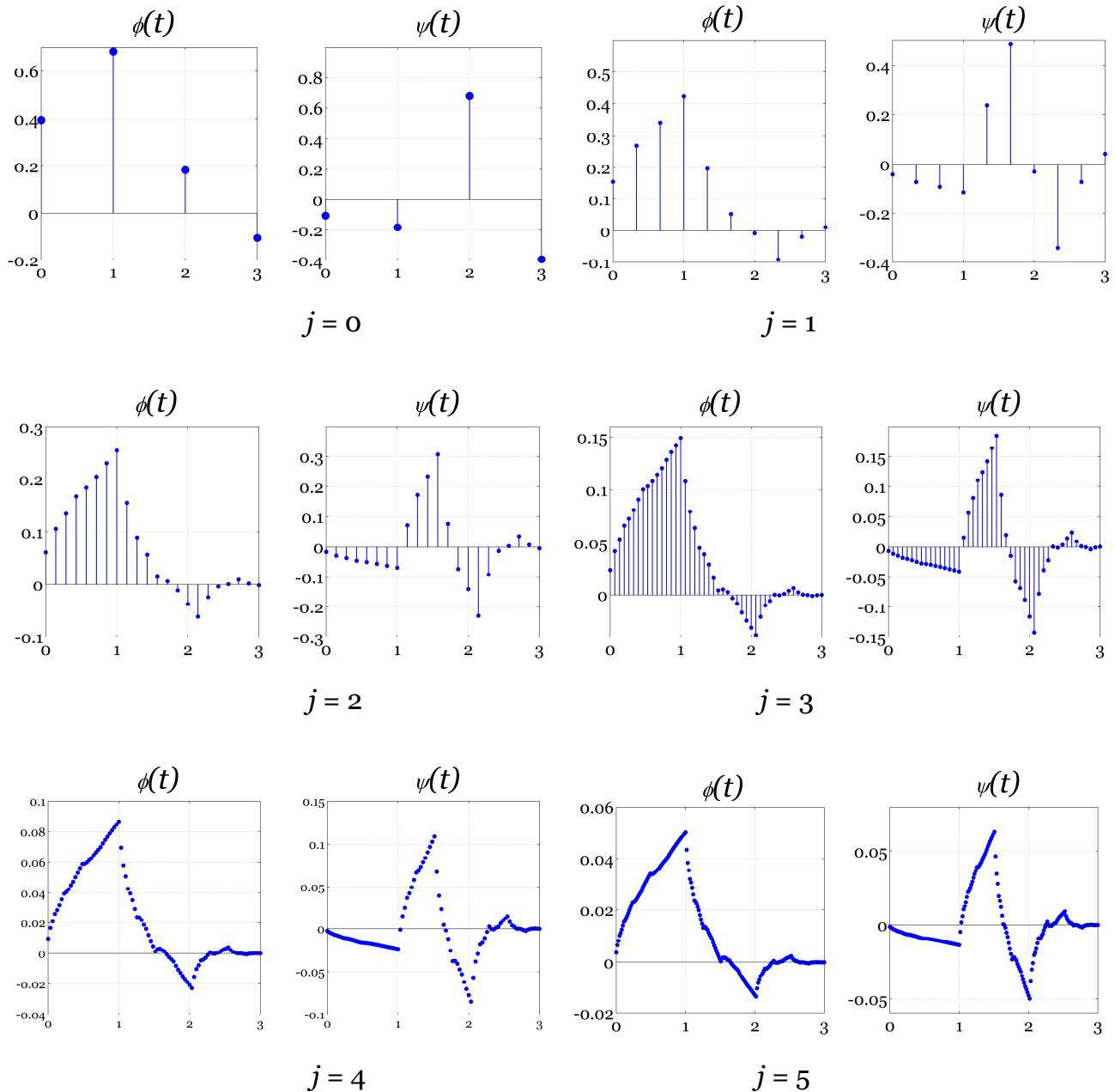
Това означава, че всяка дискретна стойност може да бъде независимо изчислена за ниво $j = 0, 1, 2, \dots, k$. Това предимство се използва при построяване на симетрични мащабиращи или мултимащабиращи функции. Например, автора в [113] чрез каскаден алгоритъм (1.33) и *тъждество на Безаут* (Appendix 1) е построил “Добешу4” филтърна банка за ниво $k=5$ ($j = 0, 1, \dots, 5$) (фиг.1.9).

1.3.2 Разработване на модули без множител за скаларна филтърна банка

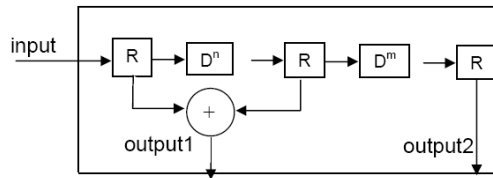
В съвременните технологии хардуерната реализация на многоскоростна обработка на сигнал върху програмируем чип е с високи изисквания. Една възможност за бърза и за лесна и бърза реализация на филтърни банки е използването на HDL езици. Например, добре известната биортогонална 5/3 филтърна банка е архитектурата в [84]

състояща се от 2 суматора, 3 регистри, и 1 умножител (multiplier). Друга архитектура в [138] се състои от 1 суматор, 1 регистър, 1 умножител, и един мултиплексор. Недостатък тази архитектура е големия брой регистри за умножение, увеличено време за аритметични операции, възможността за обработване на дискретни стойности единствено по сериен начин.

Нова архитектура на 5/3 филтърна банка състояща се от авторски модули без множител (multiplierless modules) е разработена в [85]. Всеки модул съдържа две програмируеми закъснения (D^m и D^n), 3 регистри (R), и 1 суматор (фиг.1.10).



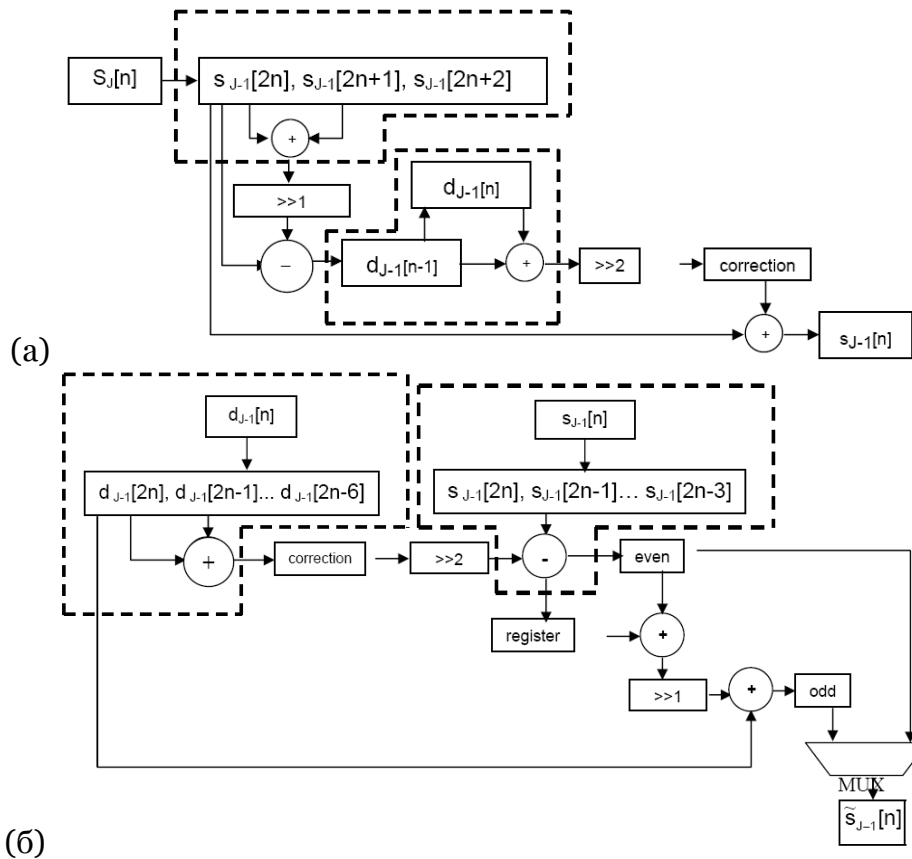
Фиг. 1.9 Каскаден алгоритъм за мащабираща $\phi(t)$ и уейвлетна $\psi(t)$ функции на D_4 филтърна банка за $k = 5$ ($j=0,1, \dots, 5$)



Фиг.1.10 Авторска обща структура на скаларна филтърна банка

Модул за анализ (Фиг. 1.11(a)) – Входният сигнал е 8-битов. Сумата от четните стойности ($s_{J-1}[2n]$ и $s_{J-1}[2n+2]$) се запаметява в регистър извършвайки деление на 2 чрез преместване един бит надясно. Резултата се изважда от $s_{J-1}[2n+1]$ като се преминава в двукомплементен код (two-complement code). На изхода се сумират получените уейвлетните стойности $d_{J-1}[n-1]$ и $d_{J-1}[n]$. Ако сумата е отрицателна се извършва 1-битова корекция. Следва операция деление на четири като резултата се сумира с четната стойност $s_{J-1}[2n]$. С това получаваме мащабиращата стойност $s_{J-1}[n]$.

Модул за възстановяване (Фиг. 1.11(б)) – На входа са мащабиращите $s_{J-1}[n]$ и уейвлетни стойности $d_{J-1}[n]$. Двете стойности $d_{J-1}[n]$ и $d_{J-1}[n-1]$ се сумират и ако резултата е отрицателен се извършва 1-битова корекция за премахване на грешката от закръгляване при следваща операция.



Фиг. 1.11 [85] Авторски модули без множител: (а) Модул за анализ;
(б) Модул за възстановяване;

Следва, деление на 4 чрез 2-битово преместване на регистъра надясно чиито резултат се изважда от $s_{j-1}[2n]$ и стойността се запамятава в допълнителен регистър. Върху двете стойности се извършва сумиране и деление на 2 чрез 1-битово преместване на регистъра. Резултата от делението се сумира с $d_{j-1}[n]$, което е нечетната стойност $s[2n]$. Чрез мултиплексор намираме възстановената стойност \hat{s}_{j-1} .

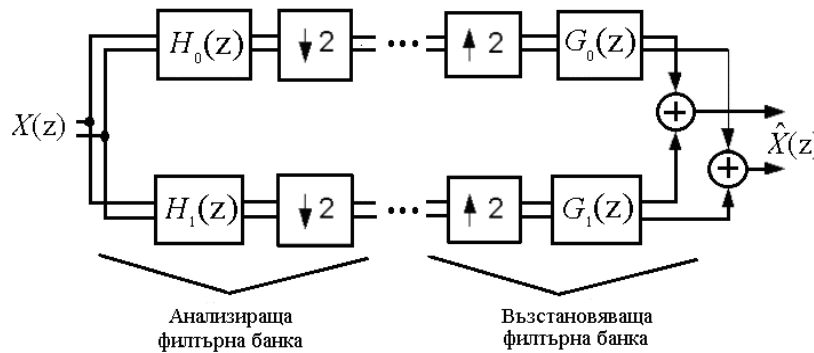
1.3.3 Векторни филтърни (мултифилтърни) банки

1.3.3.1 Обща теория

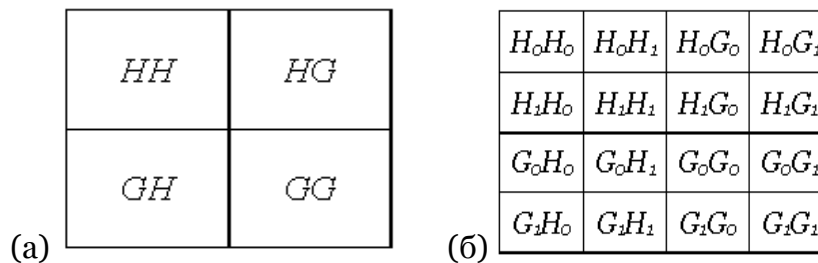
Векторните филтърни (мултифилтърни) банки се състоят от четири мултифилтъра, два за анализ и два за възстановяване (синтез). Те са обобщение на скаларни уейвлетни филтърни банки тъй като всеки мултифилтър се състоят от r -машабиращи $\Phi = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_r]^T$ и r -уейвлетни филтри $\Psi = [\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_r]^T$ едновременно притежаващи ортогоналност, симетрия, компактна основа, и изчезващи моменти.

Главна особеност на мултифилтрите е необходимостта от *векторизация на входния сигнал*. Най-простата векторизация е повтарянето на редове, но това увеличава двойно броя на стойностите. Друга векторизация е разделянето на четни и нечетни последователности, която е съвместима със симетричното разширение на входния сигнал.

Пример за двуканална мултифилтърна банка е показана **фиг.1.12**.



Фиг. 1.12 Двуканална мултифилтърна банка



Фиг. 1.13 Разлагане на изображение на 1 ниво чрез; (а) Скаларен двулентов

филтър $\begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0, H_1 \\ G_0, G_1 \end{bmatrix}$ (4 подленти); (б) Двулентов мултифилтър (16 подленти);

В сравнение със скалярната, броя на получените подленти при разлагане чрез векторна филтърна банка е по-голям. Например, при разлагане на изображение за едно ниво чрез скалярна филтърна банка получените подленти (подизображения) са четири, **фиг. 1.13(а)**, докато за мултифилтър са шестнадесет, **фиг. 1.13(б)**.

Векторна филтърна банка се описва с матричното уравнение:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) = & \frac{1}{2} [G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)] X(z) \\ & + \frac{1}{2} [G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)] X(-z) \end{aligned} \quad (1.34)$$

където,

$X(z)$ е входния векторен сигнал,

$H_r(z)$ - са анализиращи мултифилтри, $r = 0, 1$

$G_r(z)$ - са възстановяващи (синтезиращи) мултифилтри, $r = 0, 1$

$\hat{X}(z)$ - изходния векторен сигнал.

Често при проектиране на мултифилтри препочитано описание на векторна филтърна банка е чрез модулационна матрица:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{X}(z) \\ \hat{X}(-z) \end{bmatrix} = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \\ G_0(-z) & G_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}, \\ = & G^m(z) H^m(z) \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

където,

$H^m(z)$ е ортогонална анализираща модулационна матрица,

$G^m(z)$ е ортогонална възстановяващата модулационна матрица.

Тогава, условието за перфектно възстановяване изразено чрез модулационна матрица е:

$$\begin{aligned} \tilde{H}^m(z) H^m(z) = H^m(z) \tilde{H}^m(z) = cI \\ \tilde{G}^m(z) G^m(z) = G^m(z) \tilde{G}^m(z) = cI \end{aligned} \quad (1.36)$$

където,

c е константа,

I е единична матрица,

(\sim) означава транспонирана матрица с комплексно-спрегнати коефициенти и заместване на z с z^{-1} (Ермитово спрегната матрица).

Условията за (био)ортогоналност на мултифилтрите са дефинират чрез матричните уравнения [74], [75]:

$$\begin{aligned}
& H_0(z)\tilde{H}_0(z) + H_0(-z)\tilde{H}_0(-z) = cI \\
\text{❖ ортогоналност - } & \begin{cases} H_1(z)\tilde{H}_1(z) + H_1(-z)\tilde{H}_1(-z) = cI \\ H_0(z)\tilde{H}_1(z) + H_0(-z)\tilde{H}_1(-z) = 0 \\ H_1(z)\tilde{H}_0(z) + H_1(-z)\tilde{H}_0(-z) = 0 \end{cases} \cdot \quad (1.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H_0(z)\tilde{F}_0(z) + H_0(-z)\tilde{F}_0(-z) = cI \\
\text{❖ биортогоналност - } & \begin{cases} H_1(z)\tilde{F}_1(z) + H_1(-z)\tilde{F}_1(-z) = cI \\ H_0(z)\tilde{F}_1(z) + H_0(-z)\tilde{F}_1(-z) = 0 \\ H_1(z)\tilde{F}_0(z) + H_1(-z)\tilde{F}_0(-z) = 0 \end{cases} \cdot \quad (1.38)
\end{aligned}$$

Очевидно, за построяването на ортогонални мултифилтри е необходимо единствено анализиращия мултифилтър $H_0(z)$, докато за биортогоналните мултифилтри – са необходими анализиращия $H_0(z)$ и неговия възстановяващ $F_0(z)$ мултифилтър:

$$\begin{aligned}
G_0(z) &= \tilde{H}_0(z) \\
G_1(z) &= \tilde{H}_1(z) \cdot \quad (1.39)
\end{aligned}$$

Следователно, анализиращата мултифилтърна банка може да се изрази чрез полифазна матрица $M(z^2)$:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = M(z^2) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix}.$$

където $M(z^2) = \begin{bmatrix} C_0 + C_2 z^{-2} + \dots + C_{2N} z^{-2N} & C_1 + C_3 z^{-2} + \dots + C_{2N+1} z^{-(2N+1)} \\ D_0 + D_2 z^{-2} + \dots + D_{2N} z^{-2N} & D_1 + D_3 z^{-2} + \dots + D_{2N+1} z^{-(2N+1)} \end{bmatrix}$ е параунитарна

матрица и удовлетворява условието:

$$M(z^2)M^T(z^2) = cI. \quad (1.40)$$

Важна особенност при построяване на мултиуейвлетната функция е че не може да бъде получена с операцията “flip” (обратен ред и промяна на знака пред четните коефициенти) на мултимасшабиращата функция. Това е поради факта че матричните коефициенти не са нормални матрици. Следователно, необходимо е построяване на двата анализиращи мултифилтъра $H_0(z)$ и $H_1(z)$. Известен подход за получаване на анализиращия мултифилтър $H_0(z)$ е спектрално разлагане на произведение на матричен филтър (матричен Ермитов полином):

$$\begin{aligned}
P(z) &= H_0(z)H_0^*(z) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n C_k z^{-k} \right) \left(\sum_{k=0}^n C_k^T z^k \right) \\
&= \sum_{k=-n}^n P_k z^k \quad (1.41)
\end{aligned}$$

където P_k удовлетворява $P_{-k} = P_k^T, P_{2k} = 0$, и условието за полу-лентов филтър [38]:

$$P(z) + P(-z) = 2I.$$

Чрез получения анализиращ мултифилтър $H_0(z)$ чрез i - итерации се построява мултифилтърната банка:

$$\begin{aligned} H_0^i(z) &= \prod_{i=0}^{\infty} H_0(z^{2^i}) \\ &= H_0(z^{2^i}) H_0(z^{2^{i-1}}) \cdots H_0(z), \\ H_1^i(z) &= H_1(z^{2^{i-1}}) \prod_{i=0}^{\infty} H_0(z^{2^i}) \\ &= H_1(z^{2^i}) H_0(z^{2^{i-1}}) \cdots H_0(z) \end{aligned}, \quad (1.42)$$

което във времената област е:

$$\begin{aligned} C_N^i &= C_N^{i-1} C_{N-2^{i-1}}^{i-1} \\ D_N^i &= D_N^{i-1} D_{N-2^{i-1}}^{i-1} \end{aligned}. \quad (1.43)$$

Ако за вектор \mathbf{e} матричните произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0^i[n] &= C_N^1 \mathbf{e} \\ \mathbf{f}_1^i[n] &= D_N^1 \mathbf{e} \end{aligned} \quad (1.44)$$

схождат към граничните функции

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{f}_0^i[t] &= \Phi(t) \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{f}_1^i[t] &= \Psi(t) \end{aligned} \quad (1.45)$$

тогава построените функции са мултимасшабиращата $\Phi(t) = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_r]^T \in L^2(R)^r$ и мултиуейвлетната $\Psi(t) = [\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_r]^T \in L^2(R)^r$ удовлетворяващи двумащабните уравнения:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sqrt{2} \sum_N C_N \Phi(2t - N) \\ \Psi(t) &= \sqrt{2} \sum_N D_N \Psi(2t - N) \end{aligned} \quad (1.46)$$

където $\sqrt{2}$ е норма. За ортогонална филтърната банка коефициенти C_N и D_N удовлетворяват условията:

$$\begin{aligned} \sum_N C_N C_{N+2l}^T &= \sum_N D_N D_{N+2l}^T = I \\ \sum_N C_N D_{N+2l}^T &= 0 \end{aligned}. \quad (1.47)$$

1.3.3.2 Свойства на мултимащабиращата функция

А. Възпроизвеждане на дискретни полиноми

За възпроизвеждане на p -степен полином чрез мултимащабираща функция $\Phi(t)$ е необходимо нейната линейна комбинация от транскации в пространството V_0 да притежават апроксимационна степен за реален вектор $u_k \in R^2$, $u_k \neq 0$, и $0 \leq k < p$:

$$f(t) = \sum_k u_k \Phi(x-k). \quad (1.48)$$

като вектора u_k се намира от уравненията [143]:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^k \frac{1}{(2i)^\alpha} \binom{k}{\alpha} u_{k-\alpha}^T d^t H_0(0) &= 2^{-k} u_k^T \\ \sum_{\alpha=0}^k \frac{1}{(2i)^\alpha} \binom{k}{\alpha} u_{k-\alpha}^T d^t H_0(\pi) &= 0, \\ \sum_{n=0}^k \frac{1}{(2i)^n} \binom{k}{n} u_{k-n}^T d^t H_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

където,

$$H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^N C_i e^{i\omega t} \text{ е нискофреkwотен мултифилтър,}$$

$$H_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^N D_i e^{i\omega t} \text{ е височестотен мултифилтър,}$$

t е брой производни на мултифилтрите,

d е диференциален оператор.

Необходимо да се отбележи, че ствойството на мултимащабиращата функция да бъде с апроксимационна степен не гарантира запазване на дискретни полиноми, както и мултиуейвлетна функция $\Psi(t)$ да ги анулира [66].

Постигане на желана по-висока апроксимационна степен позволява увеличаване коефициента на усилване (КУ) (coding gain (CG)) [46] и подобряване на обработката на сигнали. Това води и до по-висока Соболева гладкост S_r [44], [74], [106] на мултифилтъра получена от собствените стойности на векторите на оператора за преход T_r и неговия спектралния радиус.

В. Пре- и пост- филтрация

Пре- и пост- филтрацията преобразуват скаларен във векторен сигнал и обратно. Това води до поставяне допълнителни филтри на входа и изхода на мултифилтъра удовлетворяващи определени изисквания. Този процес се нарича инициализиране на мултифилтър, а матриците – пре- и пост- филтри [39],

[65], [144]. Недостатък на този вид векторизация е разрушаването на много полезни свойства на мултифилтъра (например, симетрия на функциите).

Съществуват три вида метода за пре- и пост- филтрацията:

- *Свърхдискретизация* – повтарящ се ред (Oversampling - Repeated Row)
- *Критична дискретизация* – предварителна обработка на матрицата (Critical Sampling - Matrix Preprocessing)
- *Вградена (интегрирана) ортогонална симетрична пре- филтърна банка* (Embedded Orthogonal Symmetric Prefilter Bank)

Първите два метода са използвани за мултифилтри на GHM и CL [133] като пре- и пост- филтрация е ортогоналната Хаар филтърна банка [39], [135]. Подобни структури има описани за DGHM [52] и CL мултифилтри в [69].

Третия метод използва ортогонална симетрична пре- филтрация с първа и втора апроксимационна степен. Той е приложен за DGHM мултифилтър [79], [70], където пре- филтъра е получен чрез параметър минимизиращ абсолютния момент на филтърните коефициенти от първа степен.

С. Балансиране

Балансирането е еквивалентно на оператора L^T с коефициенти $C_0 \dots C_N$ да запазва q -сигнали на степен q [96], [97], [112]:

$$u_k = [\dots (-2)^k, (-1)^k, 0^k, 1^k, 2^k, \dots]$$

за $k = 0, 1, \dots, q-1$:

$$L^T u_k = 2^{-k} u_k \tag{1.50}$$

където $L = \begin{bmatrix} \dots & & & & & \\ & C_0 & C_1 & \dots & C_N & \\ & & C_0 & C_1 & \dots & C_N \\ & & & & & \dots \end{bmatrix}$. По този начин се премахва на пре- и

пост- филтрацията.

Ако мултифилтър запазва сигнала $L^T u_0 = u_0$

$$\begin{aligned} [1, 1, \dots, 1] \Phi(1) &= [1, 1, \dots, 1] \\ [1, 1, \dots, 1] \Phi(-1) &= 0 \end{aligned} \tag{1.51}$$

е балансиран на степен 1.

Д. Основа на мултифилтри

Основата на мултифилтрите е крайна. Определянето основата на двуканални мултимабираци функции се дефинира с [104]:

$$\text{supp } \varphi_0(t) = [L_0, R_0] \quad \text{supp } \varphi_1(t) = [L_1, R_1] . \tag{1.52}$$

където,

$$\begin{aligned}
 R_0 &\leq \max \left\{ h(0,0), \frac{2}{3}h(0,1) + \frac{1}{3}h(1,0), \frac{1}{2}h(0,1) + \frac{1}{2}h(1,1) \right\} \\
 R_1 &\leq \max \left\{ h(1,1), \frac{2}{3}h(1,0) + \frac{1}{3}h(0,1), \frac{1}{2}h(1,0) + \frac{1}{2}h(0,0) \right\} \\
 L_0 &\geq \min \left\{ l(0,0), \frac{2}{3}l(0,1) + \frac{1}{3}l(1,0), \frac{1}{2}l(0,1) + \frac{1}{2}l(1,1) \right\} \\
 L_1 &\geq \min \left\{ l(1,1), \frac{2}{3}l(1,0) + \frac{1}{3}l(0,1), \frac{1}{2}l(1,0) + \frac{1}{2}l(0,0) \right\}
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

$h = \begin{bmatrix} h(0,0) & h(0,1) \\ h(1,0) & h(1,1) \end{bmatrix}$ е матрица на полиномите на най-високите степени;

$l = \begin{bmatrix} l(0,0) & l(0,1) \\ l(1,0) & l(1,1) \end{bmatrix}$ е матрицата на полиномите с най – ниските степени.

Глобалната основа на мултимасшабиращата функция $\Phi(t)$ може да бъде различна и тя е дефинирана като затворено множество $\{t \mid \Phi(t) \neq 0\}$:

$$\text{supp } \Phi(t) = \bigcup_r \text{supp } \phi_r(t) \tag{1.54}$$

Е. Симетрия/асиметрия на мултимасшабиращите и мултиуейвлетните функции

Свойството симетрия/асиметрия е едно от най-важните, тъй като това означава линейна фаза за мащабиращите функции [140].

1.4. Теория на спектрално разлагане

Спектралното разлагане има уникално минимално–фазово решение $H(e^{j\omega})$ ако пара–Ермитов матричен полином (спектър на мощност) $P(e^{j\omega})$ е положително определен на единичната окръжност $|z|=1$, абсолютно интегрируем и удовлетворява условията на Пейли-Винер (Paley-Wiener) [152]:

➤ За скалярно спектрално разлагане

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P(e^{j\omega}) d\omega > -\infty \quad \text{или} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P(e^{j\omega}) d\omega < \infty;$$

➤ За матрично спектрално разлагане

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det P(e^{j\omega}) d\omega > -\infty \quad \text{или} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det P(e^{j\omega}) d\omega < \infty.$$

Следователно, спектралното разлагане е процес на определяне на минимално фазова функция принадлежаща на $P(e^{j\omega})$ който е произведение от два фактора $H(z)$, и $H^*(z)$ като един от тях трябва да бъде определен, т.е. $P(e^{j\omega}) = H(z)H^*(z)$.

В теорията на спетралното разлагане най-важна теоремата на Фейер–Рис (Fejér–Riesz) за положително определени функции. Важността на тригонометричните полиноми допускащи единствено положителни реални стойности първи отбелязва Фейер в [71], а Рис я доказва в [114]. Така, според теоремата на Фейер–Рис тригонометричен полином $v(z) \geq 0$ и $z \in \mathbb{T}$:

$$v(z) = \sum_{k=-N}^N v_k z^k \quad (1.55)$$

е спетрално разложен

$$v(z) = p(z)p^*(z) \quad (1.56)$$

на спетрален фактор $p(z) = \sum_{k=0}^N p_k z^k$ и неговия комплексно–спрегнат на $p^*(z)$ с коефициенти удовлетворяващи равенството $\bar{v} = v_{-k}$ за всички k . Спетралният фактор е уникален до множител с унитарна константа $U(z)$ [59], [60], т.е.,

$$p_{new}(z) = p(z)U(z). \quad (1.57)$$

Теоремата на Фейер–Рис не разглежда спетрално разлагане на многопроменливи полиноми ([53] за контрапримери). От практическо значение за 1D спетрално разлагане е **Теорема 3.2** в [121], и за 2D е **Теорема 6.2** в [53], и за произволна размерност **Теорема 3.1** в [121].

Добре известен метод за спетрално разлагане е метод на Бауер основаващ се на идеята за апроксимация на коефициентите на спетралния фактор получен по метода на Холески (Cholesky), т.е. разлагане на положително определени матрици с нарастваща размерност която е блоково *лентова Тьоплецова* (block banded Toeplitz) матрица [23], [115], [117]. Той е прилаган за скаларно канонично спетрално разлагане [24], по-късно развит за матрични полиноми [149], и използван при разлагане на скаларни и матрични полиноми с безкрайна дължина [116]. Недостатък на метода е ниската точност и много бавната сходимост при разлагане на матричен полином с кратни или многократни нули на единичната окръжност.

Друг метод за спетрално разлагане е метод на Уилсън [142]. Той е итеративен метод с доказано добро числово поведение [58]. Главното му приложение е при изучаване на аналитични и ограничени функции чиито нули не лежат на единичната окръжност.

Скаларното спетралното разлагане се обобщава чрез матричното. Матрично спетралното разлагане се използва в МІМО системи за комуникации, в системите управление [82], [141], [148]. Един от матричните методи за спетрално разлагане е

реализиран от Youla and Kazanjian [102], [103], [109], [149] и успешно прилаган в [30], [54], [78], [81]. Предимството пред другите методи за спектрално разлагане е възможността да разлага на матричен полином с кратни или многократни нули на единичната окръжност. За нещастие, тези нули влияят силно върху точността и скоростта на сходимост. За намирането на точни спектрални фактори може да бъде използван метода на Janashia–Lagvilava за SA4 мултифилтър [61].

Спектралното разлагане в теорията на Харди пространствата, където произволна функция в Харди пространството $H^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, е *вътрешно–външно разлагане (inner–outer factorization)* на две функции - *вътрешна* $\phi_i(z)$ и *външна функция* $\phi_o(z)$, т.е. $\phi(z) = \phi_o(z)\phi_i(z)$ [55], [91]. За външната функция съществува затворена форма като на спектрален фактор:

$$\phi_o(z) \approx \phi_+(z) = \exp\left(\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{jt}) \frac{e^{jt} + z}{e^{jt} - z} dt\right). \quad (1.58)$$

Това подобие позволява разглеждане на важния практически проблем - *апроксимация на спектрален фактор получен от непрекъснатата спектрална плътност с крайна Дирихле енергия* [12], [14], [20], [27], [56], [72]. Но, както показват резултатите, не съществува апроксимация способна да определи външната функция $\phi_o(z)$ на основата на Шанон дискретизация [124]. С това се доказва, че е невъзможно изчисляването на спектрален фактор и външната функция от дискретните стойности на спектралната плътност.

1.5 Теория на базисни функции от сплайн

1.5.1 Линеен B - сплайн

Линеен сплайн $L_{(*)}(t) = at + b$ се определя от коефициентите a и b и гранични точки и се състои:

За интервал [0,1] от двете функции,

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 2t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ L_1(t) &= -2t + 2, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (1.59)$$

За интервал [0,2] от двете функции,

$$\begin{aligned} L_0(t) &= t, & 0 \leq t \leq 1 \\ L_1(t) &= 2 - t, & 1 \leq t \leq 2 \end{aligned} \quad (1.60)$$

1.5.2 Ермитови сплайн за интервал [0,1]

1.5.2.1 Кубичен Ермитов сплайн

Кубичният Ермитов полином се дефинира чрез уравнението

$$\begin{aligned} H(t) &= a + bt + ct^2 + dt^3 \\ &= [a \ b \ c \ d] \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (1.61)$$

където коефициентите a, b, c, d се получават чрез ограничения за две крайни точки и първите производните в тези точки. В матричен вид те са:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(1) \\ H'(1) \\ H(0) \\ H'(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y'(1) \\ y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Следователно, функциите за кубичен Ермитов полином $H(t)$ (1.61) са:

$$\begin{aligned} H_{[0,1]}(t) &= [y(1) \ y'(1) \ y(0) \ y'(0)] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} \\ &= [y(1) \ y'(1) \ y(0) \ y'(0)] [H_0(t) \ H_1(t) \ H_2(t) \ H_3(t)]^T \\ &= [y(1) \ y'(1) \ y(0) \ y'(0)] A_{[0,1]} [1 \ t \ t^2 \ t^3]^T \end{aligned} \quad (1.62)$$

където $A_{[0,1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ е матрица на коефициентите.

1.5.2.2 Квинтик Ермитов сплайн

Квинтик (*Quintic*) Ермитов полином е с 6 неизвестни коефициента a, b, c, d, e, f :

$$\begin{aligned} Q(t) &= a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5 \\ &= [a \ b \ c \ d \ e \ f] [1 \ t \ t^2 \ t^3 \ t^4 \ t^5]^T \end{aligned} \quad (1.63)$$

Коефициентите се получават чрез система от 6 уравнения за 6 различни ограничителни условия. Те се представят чрез матричното уравнение:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 & -15 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -10 & 15 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(1) \\ Q'(1) \\ Q''(1) \\ Q(0) \\ Q'(0) \\ Q''(0) \end{bmatrix} = A_{[0,1]}^T \begin{bmatrix} Q(1) \\ Q'(1) \\ Q''(1) \\ Q(0) \\ Q'(0) \\ Q''(0) \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

където $A_{[0,1]}$ е матрица на коефициентите.

1.6. Резултати и изводи

На основата на представените проблеми авторът предлага разработване и разширяване на уейвлетната и мултиуейвлетната теория. От направения обзор следва, че скаларни или векторни филтърни банки могат да се разработват чрез полиноми на Бернщайн (Bernstein), на Лежандър, на кубичен и квинтик Ермитови полиноми, както и чрез линейни и квадратичен B сплайни. Това е разгледано в следващата **Глава 2**.

Получените резултати са частично отразени в следните авторски публикации:

Kolev V., Multiplierless modules for forward and backward integer wavelet transform, In *Proceedings of the 4th international conference on Computer systems and technologies: e-Learning*, pp. 284-289. 2003.

Kolev V., Уейвлет и мултиуейвлетни ортогонални филтри, Научни трудове на Русенски университет, том 46, серия 3.1, стр. 97 – 101, 2007, ISSN 1311 – 3321.

Kolev V., *Universal representation of orthogonal wavelet and multiwavelet filters*, Втора научна конференция с международно участие, Висше училище – колеж “Телематика”, стр. 197 – 214, 2008, ISBN 978–954–8638–51–7.

ГЛАВА 2

РАЗРАБОТВАНЕ НА МЕТОДИ ЗА ПОСТРОЯВАНЕ НА ФУНКЦИИ ОТ ПОЛИНОМИ И СПЛАЙНИ ЗА МУЛТИУЕЙВЛЕТНИ ФИЛТЪРНИ БАНКИ

В тази глава се разработват три метода за директно построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции както и техните допълващи уейвлетни(мултиуейвлетни) функции от полиноми и сплайни. Техните матрични коефициенти са получени от Лежандър полиноми, линеен и квадратичен B -сплайн, кубичен и квинтик Ермитов сплайн. За опростяване получаването на функции с основа по-голяма от $[0,1]$ е разработен алгоритъм за пренареждане на коефициентите на функции с основа $[0,3]$ на $[0,1]$.

Важна особеност е, че за разлика от методите на спектрално разлагане (представени в [Глава 3 и 4](#)), тези методи водят до директно получаване на мащабиращи или мултимащабиращи функции.

2.1 Методи за построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции

2.1.1 Метод чрез смяна на базиса

Метода чрез смяна на базиса за построяване на мащабиращи или мултимащабиращи функции се състои в построяване на *матрица от коефициентите на базисните функции*. Тя е произведение на мащабираща $\phi(t)$ или мултимащабираща $\Phi(t)$ функция с неособенна матрица A , т.е.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Например, за мултимащабираща функция $\Phi(t)$ това е новата функция:

$$\tilde{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_k AC_k \Phi(2t - k). \quad (2.1)$$

Тъй като единичната матрица $I = A^{-1}A$, тогава функцията $\tilde{\Phi}(t)$ е:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(t) &= \sqrt{2} \sum_k (AC_k \underbrace{A^{-1}}_I) A \Phi(2t - k) \\ &= \sqrt{2} \sum_k \underline{H}_k \Phi(2t - k) \end{aligned} \quad (2.2)$$

е с нови матрични коефициенти:

$$\underline{H}_k = AC_k A^{-1} \in T. \quad (2.3)$$

и основа $\text{supp } \Phi(t) = \text{supp } \tilde{\Phi}(t)$. За скалярна функция новите скалярни коефициенти са:

$$\underline{h}_k = Ah_k A^{-1}. \quad (2.4)$$

А) Лежандър полиноми

Масштабиращото уравнение с r -базисни функции от Лежандър полиноми:

$$\Phi(t) = f_r(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^{r-1} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

се описва с два матрични коэффициента C_0 и C_1 в интервалите $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$:

$$\Phi(t) = \sqrt{2}(C_0\phi(2t) + C_1\phi(2t-1)). \quad (2.6)$$

Матричен коэффициент C_0

Първият коэффициент $C_0 \in \mathbb{T}$ е в интервала $[0, 1/2]$ и се описва с уравнението:

$$\Phi(t) = \sqrt{2}C_0\Phi(2t).$$

Чрез субституцията $t \rightarrow 2t$ Лежандър полиномите се представят с биномиалното уравнение:

$$\begin{aligned} f_r(t) = t^{r-1} &= \left[\frac{2t+b}{2} \right]^r \\ &= 2^{-r} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (2t)^j b^r \end{aligned} \quad (2.7)$$

където 0 е отбелязана с константата $b=0$ и $\binom{k}{0}=1$. Следователно, първия

коэффициент се получава от дву-масштабиращата връзка:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = f_r(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^{r-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2^{-1} & & & \\ & & 2^{-2} & & \\ & & & 2^{-3} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 2^{-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2t)^0 \\ (2t)^1 \\ (2t)^2 \\ (2t)^3 \\ \vdots \\ (2t)^j \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{2}D\Phi(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Матричен коэффициент C_1

Вторият матричен коэффициент H_1 е в интервала $[1/2, 1]$ и се описва с уравнението:

$$\Phi(t) = \sqrt{2}C_1\Phi(2t-1).$$

Чрез субституцията $t \rightarrow 2t-1$, втория коэффициент се получава от дву-масштабиращата връзка:

$$\Phi(t) = [1, t, t^2, \dots, t^{r-1}]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2^{-1} \cdot 1 & 2^{-1} \cdot 1. \\ 2^{-2} \cdot 1 & 2^{-2} \cdot 2 & 2^{-2} \cdot 1 \\ 2^{-3} \cdot 1 & 2^{-3} \cdot 3 & 2^{-3} \cdot 3 & 2^{-3} \cdot 1 \\ \vdots \\ 2^{-k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2t-1)^0 \\ (2t-1)^1 \\ (2t-1)^2 \\ (2t-1)^3 \\ \vdots \\ (2t-1)^j \end{bmatrix} = DP\Phi(2t-1). \quad (2.9)$$

където P е матрицата на Паскал и биномиални коефициенти:

$$f_r(t) = t^r = \left[\frac{((2t-1)+1)}{2} \right]^r = 2^{-r} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (2t-1)^j. \quad (2.10)$$

Следователно, общите матрици за матрични коефициенти:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}_0 &= AC_0A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} ADA^{-1} \\ \underline{\mathbf{H}}_1 &= AC_1A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} ADPA^{-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

където:

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} D, \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} DP. \quad (2.12)$$

По подобен начин, общите матрици за скаларни коефициенти са:

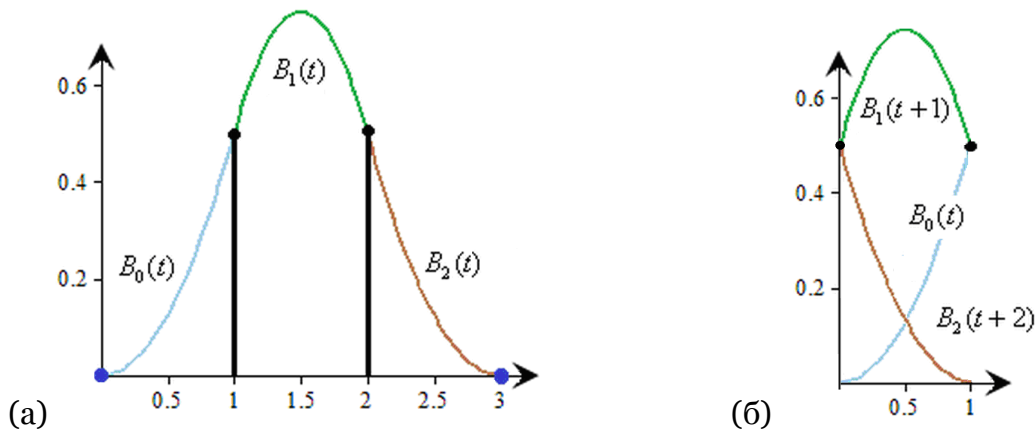
$$\begin{aligned} \underline{h}_0 &= ah_0a^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ADA^{-1} \\ \underline{h}_1 &= ah_1a^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ADPA^{-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Б) Скаларни коефициенти на квадратичен B -сплайн за интервал $[0,3]$

За намирането на мащабиращи или мултимащабиращи функции с основи по-големи от $[0,1]$ се прилага намаляване основата функцията от $[0, N]$ на $[0, 1]$. За тази цел са показани скаларните коефициенти за квадратичен B -сплайн с основа $[0,3]$ и матричните коефициенти за кубичен Ермитов сплайн с основа $[0,2]$.

За да получим коефициентите на квадратичния B -сплайн за интервал $[0,3]$ използваме трите базови функции показани на **фиг.2.1(а)**:

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_0(t) \\ B_2(t) \\ B_3(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} t^2/2, & t \in [0,1] \\ (-2t^2 + 6t - 3)/2, & t \in [1,2] \\ (3-t)^2/2, & t \in [2,3] \end{cases} \quad (2.14)$$



Фиг. 2.1 Квадратичен B -сплайн $V(t)$; (а) Базисни функции $B_0(t), B_1(t), B_2(t)$ за $[0,3]$; (б) Базисни функции $B_0(t), B_1(t+1), B_2(t+2)$ за $[0,1]$;

За да се намали основата на квадратичения B -сплайн на $[0,1]$ се прилагат субституциите:

$$\text{за } B_0(t) - t \rightarrow t$$

$$\text{за } B_1(t) - t \rightarrow t+1 \quad (2.15)$$

$$\text{за } B_2(t) - t \rightarrow t+2.$$

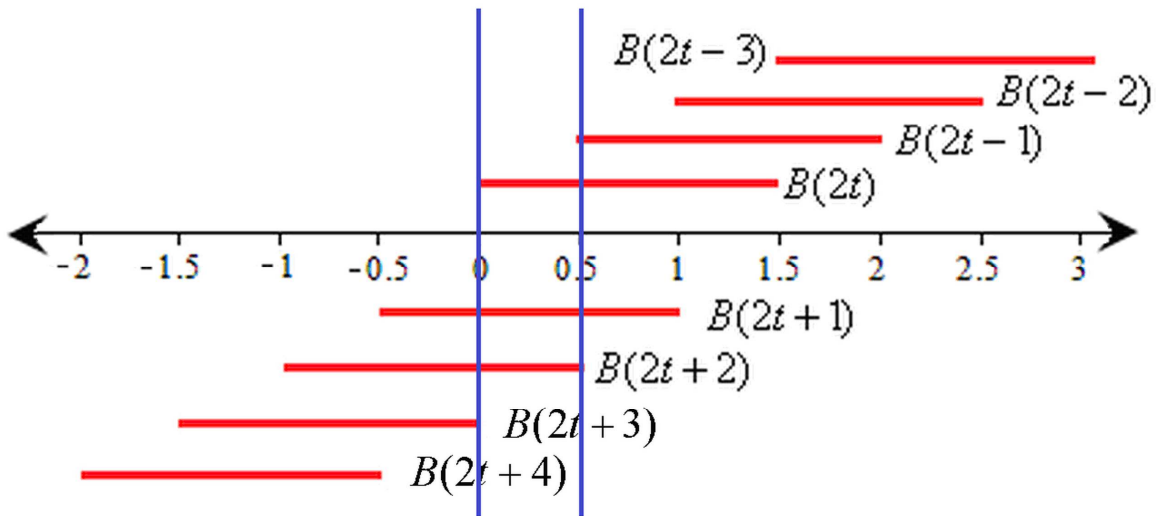
чиито базисните функции в интервал $[0,1]$ са (Фиг.2.1(б)):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_0(t) \\ B_1(t+1) \\ B_2(t+2) \end{bmatrix} &= \begin{cases} t^2 / 2 \\ (-2(t+1)^2 + 6(t+1) - 3) / 2 \\ (3 - (t+1))^2 / 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} t^2 / 2 \\ (-2t^2 + 2t + 1) / 2 \\ (1-t)^2 / 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} t^2 / 2 \\ -t^2 + t + 1/2 \\ 1/2 - t + t^2 / 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

и се представят чрез матричното уравнение:

$$\begin{bmatrix} B_0(t) \\ B_1(t+1) \\ B_2(t+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

или чрез базисните функции с основи са показани на Фиг.2.2:



Фиг. 2.2 Основи на разширените и преместени версии на базовите функции $B(2t \pm *)$ за квадратичен B -сплайн $B(t)$ в интервал $[0,3]$ (червени линии) и интервал $[0,1/2]$ (сини линии);

$$\begin{aligned}
 B(t) &= \begin{bmatrix} B_0(t) \\ B_1(t+1) \\ B_2(t+2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}[h_0 B_0(2t) + h_1 B_0(2t-1) + h_2 B_0(2t-2) + h_3 B_0(2t-3)] \\ \sqrt{2}[h_0 B_1(2(t+1)) + h_1 B_1(2(t+1)-1) + h_2 B_1(2(t+1)-2) + h_3 B_1(2(t+1)-3)] \\ \sqrt{2}[h_0 B_2(2(t+2)) + h_1 B_2(2(t+2)-1) + h_2 B_2(2(t+2)-2) + h_3 B_2(2(t+2)-3)] \end{bmatrix} \quad (2.18) \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}[h_0 B_0(2t) + h_1 B_0(2t-1) + h_2 B_0(2t-2) + h_3 B_0(2t-3)] \\ \sqrt{2}[h_0 B_1(2t+2) + h_1 B_1(2t+1) + h_2 B_1(2t) + h_3 B_1(2t-1)] \\ \sqrt{2}[h_0 B_2(2t+4) + h_1 B_2(2t+3) + h_2 B_2(2t+2) + h_3 B_2(2t+1)] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Мултимасшабиращата функция за интервал $[0,1]$ се описва с общите матрици:

$$\begin{aligned}
 B(t) &= \underbrace{h_0 \phi(2t) + h_1 \phi(2t-1) + h_2 \phi(2t-2) + h_3 \phi(2t-3)}_{B(t) = \underline{h}_0 \phi(2t) + \underline{h}_1 \phi(2t-1)}
 \end{aligned}$$

или чрез базисните функции:

$$\begin{aligned}
 B(t) &= \underline{h}_0 \begin{bmatrix} B_0(2t) \\ B_1(2t+1) \\ B_2(2t+2) \end{bmatrix} + \underline{h}_1 \begin{bmatrix} B_0(2t-1) \\ B_1(2t) \\ B_2(2t+1) \end{bmatrix} \quad (2.19) \\
 &= \underline{h}_0 \phi(2t) + \underline{h}_1 \phi(2t-1)
 \end{aligned}$$

Тъй като първия общия коефициент \underline{h}_0 принадлежи в интервал $[0, 1/2]$, (Фиг.2.2) (сини линии), всички функции извън този интервал са нулеви:

$$\begin{bmatrix} B_0(2t-1) = B_0(2t-2) = B_0(2t-3) = 0 \\ B_1(2t-1) = 0 \\ B_2(2t+4) = B_2(2t+3) = 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

С това се получава първата обща матрица:

$$\begin{aligned} B(t) &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}[h_0 B_0(2t)] \\ \sqrt{2}[h_0 B_1(2t+2) + h_1 B_1(2t+1) + h_2 B_1(2t)] \\ \sqrt{2}[h_2 B_2(2t+2) + h_3 B_2(2t+1)] \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & h_3 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(2t) \\ B_0(2t+1) \\ B_0(2t+2) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{2} \underline{h}_0 \Phi(2t) \end{aligned}. \quad (2.21)$$

Втората обща матрица \underline{h}_1 е в интервала $[1/2, 1]$ и всички функции извън този интервал са нулеви:

$$\begin{bmatrix} B_0(2t-2) = B_0(2t-3) = 0 \\ B_1(2t) = 0 \\ B_2(2t+4) = B_2(2t+3) = B_2(2t+2) = 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

С това се получава втория общ коефициент :

$$\begin{aligned} B(t) &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}[h_0 B_0(2t) + h_1 B_0(2t-1) + h_2 \cdot 0 + h_3 \cdot 0] \\ \sqrt{2}[h_0 \cdot 0 + h_1 \cdot B_1(2t+1) + h_2 B_1(2t) + h_3 B_1(2t-1)] \\ \sqrt{2}[h_0 \cdot 0 + h_1 \cdot 0 + h_2 \cdot 0 + h_3 B_2(2t+1)] \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(2t-1) \\ B_0(2t) \\ B_0(2t+1) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{2} \underline{h}_1 \Phi(2t-1) \end{aligned}. \quad (2.23)$$

Следователно, мащабиращо уравнение с основа $[0,1]$ е:

$$\begin{aligned} B(t) &= \underline{h}_0 \varphi(2t) + \underline{h}_1 \varphi(2t-1) \\ &= \sqrt{2} \left(\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & h_3 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(2t) \\ B_0(2t+1) \\ B_0(2t+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(2t-1) \\ B_0(2t) \\ B_0(2t+1) \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

В) Матрични коефициенти на кубичен Ермитов сплайн за интервал $[0,2]$

Кубичният Ермитов сплайн с основа $[0,2]$ се състои от три матрични коефициента големина 2×2 и се описва с мултимащабиращата функция:

$$\Phi(t) = C_0 \Phi(2t) + C_1 \Phi(2t-1) + C_2 \Phi(2t-2) \quad (2.25)$$

Мултимашабираща функция с основа [0,1]:

$$\underbrace{\Phi(t) = C_0\Phi(2t) + C_1\Phi(2t-1) + C_2\Phi(2t-2)}_{\downarrow} \quad (2.26)$$

$$\Phi(t) = \underline{H}_0\Phi(2t) + \underline{H}_1\Phi(2t-1)$$

където $C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, е с общи матрици

$$\underline{H}_0 = \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{H}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & C_0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}.$$

За мащабираща функция с основа [0,1] общите матрици са:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \underline{h}_0\phi(2t) + \underline{h}_1\phi(2t-1) \\ &= \sqrt{2} \left(\begin{bmatrix} h_0 & 0 \\ h_2 & h_1 \end{bmatrix} \phi(2t) + \begin{bmatrix} h_1 & h_0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix} \phi(2t-1) \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Г) Мащабираща функция от линеен B – сплайн (“Шапка”)

Мащабиращата функция за линеен B – сплайн е

$$\phi(t) = \sqrt{2}(h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t-1) + h_2\phi(2t-2)) \in \mathbb{T}$$

където h_0, h_1 , и h_2 са скаларни коефициента. В това изследване ще бъде разработена за интервали [0,1] и [0,2].

Интервал [0,1]

В този интервал линеен B–сплайн се описва с полиномите

$$\begin{bmatrix} L_0(t) \\ L_1(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

където $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ е неособенна матрица. При намаляване на основата на

функцията са получени двете общи матрици:

$$\begin{aligned} \underline{h}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} ADA^{-1} \\ \underline{h}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} ADPA^{-1} \end{aligned}$$

Следователно, от първата обща матрица

$$\begin{aligned} \underline{h}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} h_0 & 0 \\ h_2 & h_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} ADA^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

са получени трите коефициентите:

$$h_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } h_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \in \mathbb{T}. \quad (2.29)$$

Интервал [0,2]

Линеен B -сплайн в този интервал се построява от линейните полиноми $L_0(t) = t$ и $L_1(t) = 2 - t$, чиито матричен вид е:

$$\begin{bmatrix} L_0(t) \\ L_1(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

където $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ е неособенна матрица.

След като мащабиращата функция се преобразува в две общи матрици, от първата обща матрица

$$\begin{aligned} \underline{h}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} ADA^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

намираме коефициентите:

$$h_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } h_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad (2.31)$$

Д) Мултимащабираща функция на квадратичен B -сплайн

Базисните функции на квадратичния сплайн $B(t)$ в интервал $[0, 3]$ са описани в **Глава 2.3.1**. За построяване на неговата мащабираща функция са необходими четири скаларни коефициенти, които са преобразувани в две общи матрици \underline{h}_0 или \underline{h}_1 (2.23).

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \underline{h}_0 \phi(2t) + \underline{h}_1 \phi(2t-1) \\ &= \sqrt{2} \left(\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & h_3 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(2t) \\ B_0(2t+1) \\ B_0(2t+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(2t-1) \\ B_0(2t) \\ B_0(2t+1) \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

От първата обща матрица:

$$\begin{aligned} \underline{h}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} ADA^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \quad (2.32) \end{aligned}$$

се получава мащабиращата функция за квадратичен B -сплайн за интервал $[0, 3]$:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \varphi(2t) + \frac{3}{4\sqrt{2}} \varphi(2t-1) + \frac{3}{4\sqrt{2}} \varphi(2t-2) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \varphi(2t-3) \right). \quad (2.33)$$

Е) Мултимашабираща функция на кубичен Ермитов сплайн

Матричните коефициенти за кубичен Ермитов сплайн чрез използване условията на Strang–Fix за p -степен на апроксимация, чрез сума от правилата за трансляция (*sum rules translate*), и собствените стойности и вектори (eigenvalues and eigenvectors) на Фурие трансформацията за мултимашабиращата функция са построена в [78]. Очевидно това изисква многократно сложен изчислителен път за построяване на мултимашабиращата функция за кубичен Ермитов сплайн.

Еlegantен и прост начин е прилагане метода на смяна на базиса. Чрез този метод матричните коефициенти са получени директно от базисните функции на кубичен Ермитов сплайн. Базисните функции за кубичен Ермитов сплайн в интервал $[0,2]$ образуват матрица на коефициентите (изведена в Глава 1.5.2.1):

$$A_{[0,1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Следователно, след намаляване на основата от първата обща матрица

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{[0,1]} D A_{[0,1]}^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & 0 \\ \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

са извлечени матрични коефициенти $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ и е получена неортогонална мултимашабиращата функция:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \end{bmatrix} = \sqrt{2} (C_0 \phi(2t) + C_1 \phi(2t-1) + C_2 \phi(2t-2)) \in \mathbb{T}.$$

където $\mathbf{C}_0 = \frac{1}{8\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, и $\mathbf{C}_2 = \frac{1}{8\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ж) Мултимашабираща функция на квинтик Ермитов сплайн

Базисните функции за квинтик Ермитов сплайн в интервал $[0,2]$ и неговата обща матрица (изведена в Глава 1.5.2.2):

$$A_{[0,1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 & -15 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -10 & 15 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Тогава от първата обща матрица

$$\underline{\mathbf{H}}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{[0,1]} D A_{[0,1]}^{-1} = \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

са намерени матрични коефициенти $C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$C_0 = \frac{1}{32\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 16 & 15 & 0 \\ -5 & -7 & 12 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}, C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \text{ и } C_2 = \frac{1}{32\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 16 & -15 & 0 \\ 5 & -7 & -12 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}.$$

3) Мултимащабираща функция на Алперт

Мултимащабираща функция на Алперт е разработена за първите две неортогонални Лежандър полинома и се състои от два матрични коефициента:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \end{bmatrix} = \sqrt{2}(C_0 \phi(2t) + C_1 \phi(2t-1)) \in \mathbb{T}. \quad (2.36)$$

След ортогонализация на първите две неортогонални Лежандър полинома получаваме дву-мащабното уравнение:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} = A_{[0,1]} \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Следователно, двата матрични коефициента:

$$\begin{aligned} C_0 = \underline{\mathbf{H}}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} A D A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ C_1 = \underline{\mathbf{H}}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} A D P A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.1.2 Директен Метод

Метода се изразява в приравняване на базисната функция с мащабиращата или мултимащабираща функция за определен интервал.

А) Мащабираща функция “Шапка”

Интервал [0,1]

Мащабиращото уравнение се описва с три коефициента:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \left(h_0 \phi(2t) + h_1 \phi\left(2t - \frac{1}{2}\right) + h_2 \phi(2t - 1) \right).$$

Скаларен коефициент h_0

Първият коефициент обхваща функциите в подинтервал [0,1/4]. Той се намира чрез приравняването на функцията ‘Шапка’ с мащабиращото уравнение $\phi(t) = L_0(t) = 2t$:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sqrt{2} h_0 \phi(2t) \\ 2t &= \sqrt{2} h_0 2(2t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

чието решение е $h_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Скаларен коефициент h_1

Вторият коефициент обхваща функциите в подинтервала [1/4,3/4]. Той се намира чрез приравняването на функцията ‘Шапка’

$$\begin{aligned} \phi(t) &= L_0(t) = 2t \\ \phi(2t - 1) &= L_0\left(2t - \frac{1}{2}\right) = 2\left(2t - \frac{1}{2}\right), \\ \phi(2t) &= L_1(2t) = 2 - 2(2t) \end{aligned}$$

с мащабиращото уравнение

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sqrt{2} (h_0 \phi(2t) + h_1 \phi(2t - 1)) \\ 2t &= \sqrt{2} \left(h_0 L_1(2t) + h_1 L_0\left(2t - \frac{1}{2}\right) \right) \\ 2t &= \frac{1}{2} L_1(2t) + \sqrt{2} h_1 L_0\left(2t - \frac{1}{2}\right) \quad , \\ 2t &= \frac{1}{2} (2 - 2(2t)) + \sqrt{2} h_1 (2(2t - \frac{1}{2})) \\ 4t - 1 &= \sqrt{2} h_1 (4t - 1) \end{aligned} \quad (2.40)$$

чието решение е $h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Скаларен коефициент h_2

Третият коефициент обхваща функциите в подинтервала $[3/4,1]$. Чрез приравняването на функцията 'Шапка'

$$\begin{aligned}\phi(t) &= L_1(t) = 2 - 2t \\ \phi(2t - 1) &= L_1(2t - 1) = 2 - 2(2t - 1)\end{aligned}$$

с мащабиращото уравнение

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sqrt{2}h_2\phi(2t - 1) \\ L_1(t) &= \sqrt{2}h_2L_1(2t - 1) \\ 2 - 2t &= \sqrt{2}h_2(2 - 2(2t - 1)) \\ &= 2\sqrt{2}h_2(2 - 2t)\end{aligned}\tag{2.41}$$

получаваме $h_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Интервал $[0,2]$

Мащабиращото уравнение се описва с:

$$\phi(t) = \sqrt{2}(h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t - 1) + h_2\phi(2t - 2))\tag{2.42}$$

Скаларен коефициент h_0

Първият коефициент лежи в подинтервал $[0,1/2]$. Чрез приравняването на функцията 'Шапка'

$$\begin{aligned}\phi(t) &= L_0(t) = t \\ \phi(2t) &= L_0(2t) = 2t\end{aligned}$$

с мащабиращото уравнение:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sqrt{2}h_0\phi(2t) \\ L_0(t) &= \sqrt{2}h_0L_0(2t) \\ t &= \sqrt{2}h_0(2t)\end{aligned}\tag{2.43}$$

получаваме $h_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Скаларен коефициент h_1

Вторият коефициент обхваща функциите в подинтервал $[1/2,3/2]$. Чрез приравняването на функцията 'Шапка'

$$\begin{aligned}L_0(2t - 1) &= 2t - 1 \\ L_1(2t) &= 2 - (2t)\end{aligned}$$

с

$$\phi(t) = L_0(t) = t \text{ и } L_1(t) = 2 - t$$

се построява мащабиращото уравнение:

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= \sqrt{2}(h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t-1)) \\
 t &= \sqrt{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} L_1(2t) + \sqrt{2}h_1L_0(2t-1) \\
 t &= \frac{1}{2}(2-2t) + \sqrt{2}h_1L_0(2t-1) \\
 t &= (1-1t) + \sqrt{2}h_1(2t-1) \\
 2t-1 &= \sqrt{2}h_1(2t-1)
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

чиито решение е $h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Скаларен коефициент h_2

Вторият коефициент обхваща функциите в подинтервал $[3/2,1]$. Чрез приравняването на функцията ‘Шапка’

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= L_1(t) = 2-t \\
 \phi(2t-2) &= L_1(2t-2) = 2-(2t-2) = 4-2t
 \end{aligned}$$

с мащабиращото уравнение

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= \sqrt{2}h_2\phi(2t-2) \\
 L_1(t) &= \sqrt{2}h_2L_1(2t-2) \\
 2-t &= \sqrt{2}h_2(4t-2) = \sqrt{2}h_22(2-t)
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

получаваме третия коефициент $h_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Б) Мултимащабираща функция на кубичен Ермитов сплайн

Мултимащабираща функция на кубичен Ермитов сплайн се състои от три матрични коефициента:

$$\Phi(t) = \sqrt{2}(C_0\Phi(2t) + C_1\Phi(2t-1) + C_2\Phi(2t-2)).$$

Базисните функции на кубичен Ермитов сплайн в интервал $[0,2]$ за двата подинтервала са:

$$\begin{aligned}
 \phi_0(t) &= \begin{cases} 3t^2 - 2t^3, & t \in [0,1] \\ 3(2-t)^2 - 2(2-t)^3, & t \in [1,2] \end{cases} \\
 \phi_1(t) &= \begin{cases} t^3 - t^2, & t \in [0,1] \\ (2-t)^3 - (2-t)^2, & t \in [1,2] \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

За прилагане на директния метод, е удобно базисните функции да бъдат разделени на:

➤ *леви* (с L) за интервал $t \in [0,1]$:

$$\Phi_L(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 2t^3 \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

► десни (с R) за интервал $t \in [1,2]$:

$$\Phi_R(t) = \begin{pmatrix} 3(2-t)^2 - 2(2-t)^3 \\ (2-t)^3 - (2-t)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

От друга страна, всеки един матричен коефициент се намира поотделно за всеки подинтервал чрез уравненията:

$$\Phi(t) = \sqrt{2}C_0\Phi(2t), \quad \text{за интервал } [0,1/2], \quad (2.49)$$

$$\Phi(t) = \sqrt{2}C_0\Phi(2t) + \sqrt{2}C_1\Phi(2t-1), \quad \text{за интервал } [1/2, 3/2] \quad (2.50)$$

$$\Phi(t) = \sqrt{2}C_2\Phi(2t-2), \quad \text{за интервал } [1/2, 1]. \quad (2.51)$$

Матричен коефициент C_0

Мащабиращото уравнение (2.49) приравнено с (2.47) и

$\Phi(2t) = \Phi_L(2t) = \begin{bmatrix} 3(2t)^2 - 2(2t)^3 \\ -(2t)^2 + (2t)^3 \end{bmatrix}$ образува мащабиращо уравнение

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sqrt{2}C_0\Phi(2t) \\ \begin{bmatrix} 3t^2 - 2t^3 \\ -t^2 + t^3 \end{bmatrix} &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_{11}^0 & h_{12}^0 \\ h_{21}^0 & h_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3(2t)^2 - 2(2t)^3 \\ -(2t)^2 + (2t)^3 \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_{11}^0 & h_{12}^0 \\ h_{21}^0 & h_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12t^2 - 16t^3 \\ -4t^2 + 8t^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

чиито решение е първия матричен коефициент:

$$C_0 = \begin{bmatrix} h_{11}^0 & h_{12}^0 \\ h_{21}^0 & h_{22}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{1}{8\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Матричен коефициент C_1

Мащабиращото уравнение (2.50) приравнено с функциите

$$\begin{aligned} \Phi(2t) &= \Phi_L(t) = \begin{bmatrix} -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - t^2 \end{bmatrix} \\ \Phi(2t) &= \Phi_R(t) = \begin{bmatrix} -2(2-(2t))^3 + 3(2-(2t))^2 \\ (2-(2t))^3 - (2-(2t))^2 \end{bmatrix} \\ \Phi(2t-1) &= \Phi_L(2t) = \begin{bmatrix} -2(2t-1)^3 + 3(2t-1)^2 \\ (2t-1)^3 - (2t-1)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

води до матричното уравнение

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \sqrt{2}C_0\Phi(2t) &= \sqrt{2}C_1\Phi(2t-1) \\ \begin{bmatrix} -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - t^2 \end{bmatrix} - \sqrt{2}C_0 \begin{bmatrix} -2(2-(2t))^3 + 3(2-(2t))^2 \\ (2-(2t))^3 - (2-(2t))^2 \end{bmatrix} &= \sqrt{2}C_1 \begin{bmatrix} -2(2t-1)^3 + 3(2t-1)^2 \\ (2t-1)^3 - (2t-1)^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -16t^3 + 36t^2 - 24t + 5 \\ 4t^3 - 8t^2 + 5t - 1 \end{bmatrix} &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2(2t-1)^3 + 3(2t-1)^2 \\ (2t-1)^3 - (2t-1)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.53)$$

чиито решение е втория матричен коефициент:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Матричен коефициент C_2

Мащабиращото уравнение (2.51) приравнено с функциите

$$\Phi(t) = \Phi_R(t) = \begin{bmatrix} 3(2-t)^2 - 2(2-t)^3 \\ (2-t)^2 - (2-t)^3 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \Phi(2t-2) &= \Phi_R(2t-2) \\ &= \begin{bmatrix} 3(2-(2t-2))^2 - 2(2-(2t-2))^3 \\ (2-(2t-2))^2 - (2-(2t-2))^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3(2-t)^2 - 2(2-t)^3 \\ (2-t)^2 - (2-t)^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

води до матричното уравнение

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sqrt{2}C_2\Phi(2t-2) \\ \begin{bmatrix} 3(2-t)^2 - 2(2-t)^3 \\ (2-t)^2 - (2-t)^3 \end{bmatrix} &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_{11}^2 & h_{12}^2 \\ h_{21}^2 & h_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3(2-t)^2 - 2(2-t)^3 \\ (2-t)^2 - (2-t)^3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4 + 12t - 9t^2 + 2t^3 \\ -4 + 8t - 5t^2 + t^3 \end{bmatrix} &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_{11}^2 & h_{12}^2 \\ h_{21}^2 & h_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -80 + 144t - 84t^2 + 16t^3 \\ -48 + 80t - 44t^2 + 8t^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.55)$$

чиито решение е третия матричен коефициент:

$$C_2 = \begin{bmatrix} h_{11}^2 & h_{12}^2 \\ h_{21}^2 & h_{22}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

В) Мултимащабираща функция на Алперт

Първите две базисни функции от Лежандър полином в интервал $[0,1]$ водят до построяване на ортогоналната мултимащабираща функция $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(1-2t) \end{bmatrix} \in \mathbb{T}. \quad (3.31)$$

От друга страна мултимащабиращата функция се изразява чрез два матрична коефициента:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \sqrt{2}C_0\Phi(2t) + \sqrt{2}C_1\Phi(2t-1) \\ &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_{11}^0 & h_{12}^0 \\ h_{21}^0 & h_{22}^0 \end{bmatrix} \Phi(2t) + \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 \end{bmatrix} \Phi(2t-1).\end{aligned}\quad (2.57)$$

Тъй като първия коефициент обхваща интервал $[0, 1/2]$, тогава чрез приравняване на Алперт функцията с мултимащабиращата функция $\Phi(t)$

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(1-2t) \end{bmatrix} = \sqrt{2}C_0\Phi(2t) \\ &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_{11}^0 & h_{12}^0 \\ h_{21}^0 & h_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(1-2(2t)) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.58)$$

е получен:

$$C_0 = \begin{bmatrix} h_{11}^0 & h_{12}^0 \\ h_{21}^0 & h_{22}^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\quad (2.59)$$

Подобно, тъй като втория коефициент обхваща интервала $[1/2, 1]$, чрез приравняване на Алперт функцията с $\Phi(t)$

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(1-2t) \end{bmatrix} = \sqrt{2}C_1\Phi(2t-1) \\ &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(1-2(2t-1)) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.60)$$

е получен:

$$C_1 = \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\quad (2.61)$$

2.1.3 Метод чрез външното скалярно произведение

Метода чрез външното скалярно произведение използва интеграл на скалярни произведения в зависимост от лежащите базисни функции (леви или десни) за определен интервал. Недостатък на метода е неговата изчислителна сложност.

А) Мащабираща функция “Шапка”

Мащабиращата функция “Шапка” е с основа $[0, 2]$:

$$\phi(t) = \sqrt{2}(h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t-1) + h_2\phi(2t-2)) \in \mathbb{T}$$

където между скалярните коефициента, h_0 , h_1 и h_2 съществува следната зависимост:

- коэффициент h_0 зависи от h_1 ;
- коэффициент h_1 зависи от h_0 и h_2 ;
- коэффициент h_2 зависи от h_1 .

За удобство интервала $[0,2]$ се разделя два подинтервала $[0,1]$ и $[1,2]$ (фиг.2.3(а)) както и базисните функции се разделят на (леви) и (десни) (фиг.2.3(б)):

- (леви) (отбелязани с L) за интервал $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
 \varphi_L(t) &= L_0(t) = t \\
 \varphi_L(2t) &= 2t \\
 \varphi_L(2t-1) &= 2t-1 \\
 \varphi_L(2t-2) &= 2t-2
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

- (десни) (отбелязани с R) за интервал $t \in [1,2]$:

$$\begin{aligned}
 \phi_R(t) &= L_1(t) = 2-t \\
 \phi_R(2t) &= 2-(2t) \\
 \phi_R(2t-1) &= 2-(2t-1) = 3-2t \\
 \phi_R(2t-2) &= 2-(2t-2) = 4-2t
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Върху мащабиращото уравнение $\phi(t)$ се прилага дясно умножение с функциите $\phi(2t)$, $\phi(2t-1)$, и $\phi(2t-2)$ за всеки скаларен коефициент. По този начин се образуват три скаларни произведения зависими помежду си:

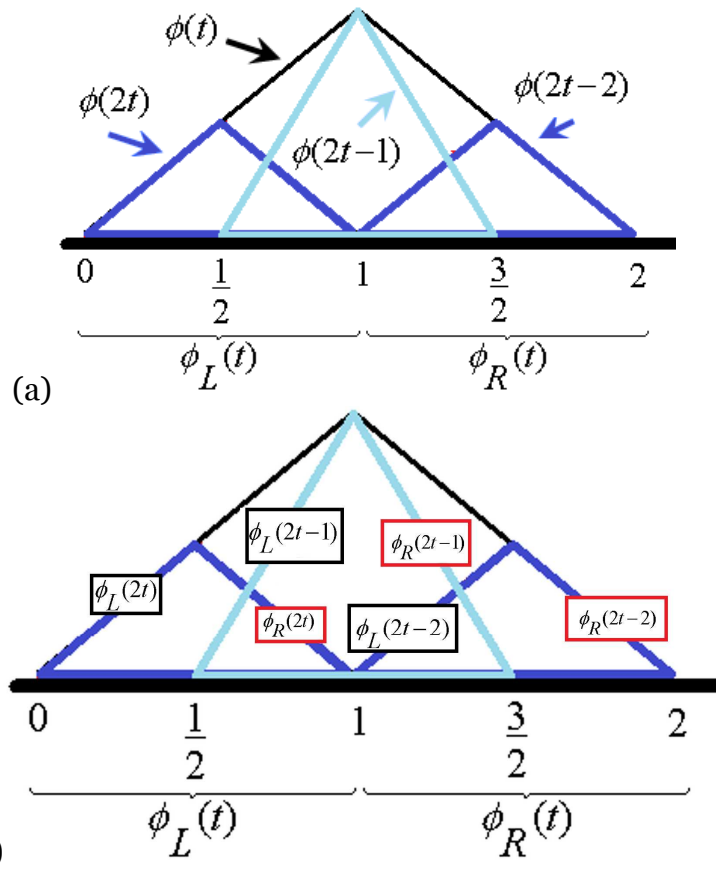
$$\begin{aligned}
 h_0 &\rightarrow \langle \phi(t), \phi(2t) \rangle \\
 &= \sqrt{2} [h_0 \langle \phi(2t), \phi(2t) \rangle + h_1 \langle \phi(2t-1), \phi(2t) \rangle + h_2 \langle \phi(2t-2), \phi(2t) \rangle] \\
 h_1 &\rightarrow \langle \phi(t), \phi(2t-1) \rangle \\
 &= \sqrt{2} [h_0 \langle \phi(2t), \phi(2t-1) \rangle + h_1 \langle \phi(2t-1), \phi(2t-1) \rangle + h_2 \langle \phi(2t-2), \phi(2t-1) \rangle] \\
 h_2 &\rightarrow \langle \phi(t), \phi(2t-2) \rangle \\
 &= \sqrt{2} [h_0 \langle \phi(2t), \phi(2t-2) \rangle + h_1 \langle \phi(2t-1), \phi(2t-2) \rangle + h_2 \langle \phi(2t-2), \phi(2t-2) \rangle]
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Тъй като $\phi(2t-2)$ не лежи в интервала на $[0,1]$ (фиг. 2.3(а)), тогава $\phi(2t-2) = 0$ и скаларното произведение

$$\langle \phi(2t-2), \phi(2t) \rangle = 0.$$

Подобно, функцията $\phi(2t)$ не лежи в интервала на $[1,2]$, $\phi(2t) = 0$ (фиг. 2.3(а)) и скаларното произведение:

$$\langle \phi(2t), \phi(2t-2) \rangle = 0.$$



Фиг. 2.3 Мащабираща функция “Шапка” (а) Линейния сплайн разделен на (леви) $\phi_L(t)$ и (десни) $\phi_R(t)$ (б) Базисни функции разделени на (леви) $\phi_L(t)$ и (десни) $\phi_R(t)$ $\phi_L(2t - \bullet)$ (в черно) и десни $\phi_R(2t - \bullet)$ (в червено);

Следователно, неизвестните коефициенти се получават от системата:

$$[a, b, c] = \sqrt{2}[h_0, h_1, h_2] \begin{bmatrix} q & r & 0 \\ r & q & r \\ 0 & r & q \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

където

$$a = \langle \varphi(t), \varphi(2t) \rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_L(t) \varphi_L(2t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_L(t) \varphi_R(2t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t(2t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t(2-2t) dt = \frac{1}{4}$$

$$b = \langle \varphi(t), \varphi(2t-1) \rangle = \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_L(t) \varphi_L(2t-1) dt + \int_1^{\frac{3}{2}} \varphi_R(t) \varphi_R(2t-1) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t(2t-1) dt + \int_1^{\frac{3}{2}} (2-t)(3t-1) dt = \frac{5}{12}$$

$$c = \langle \varphi(t), \varphi(2t-2) \rangle = \int_1^{\frac{3}{2}} (2-t)(2t-2) dt + \int_{\frac{3}{2}}^2 (2-t)(4t-2) dt = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{1}{2} \langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \varphi_L(t) \varphi_L(t) dt + \int_1^2 \varphi_R(t) \varphi_R(t) dt \right) = \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{1}{2} \langle \varphi(2t), \varphi(2t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \varphi_L(2t) \varphi_L(2t-1) dt + \int_1^2 \varphi_R(2t) \varphi_R(2t-1) dt \right) = \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{1}{2} \langle \varphi(2t-1), \varphi(2t-1) \rangle = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \varphi_L(2t-1) \varphi_L(2t-1) dt + \int_1^2 \varphi_R(2t-1) \varphi_R(2t-1) dt \right) = \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{1}{2} \langle \varphi(2t-2), \varphi(2t-2) \rangle = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \varphi_L(2t-2) \varphi_L(2t-1) dt + \int_1^2 \varphi_R(2t-2) \varphi_R(2t-1) dt \right) = \frac{1}{3}$$

$$r = \langle \varphi(2t), \varphi(2t-1) \rangle = \langle \varphi(2t-1), \varphi(2t) \rangle = \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_R(2t) \varphi_L(2t-1) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2-2t)(2t-1) dt = \frac{1}{12}$$

$$r = \langle \varphi(2t-1), \varphi(2t-2) \rangle = \langle \varphi(2t-2), \varphi(2t-1) \rangle = \int_1^{\frac{3}{2}} \varphi_R(2t-1) \varphi_L(2t-2) dt = \int_1^{\frac{3}{2}} (3-2t)(2t-2) dt = \frac{1}{12}$$

Решение на системата (2.65) са трите скаларни коефициента:

$$[h_0, h_1, h_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4} \right] \left(\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right].$$

Б) Мултимащабираща функция на кубичен Ермитов сплайн

Мултимащабираща функция $\Phi(t) = \sqrt{2}(C_0\Phi(2t) + C_1\Phi(2t-1) + C_2\Phi(2t-2))$ на кубичен Ермитов сплайн е с основа $[0,2]$ и матрични коефициенти $C_0, C_1,$ и C_2 .

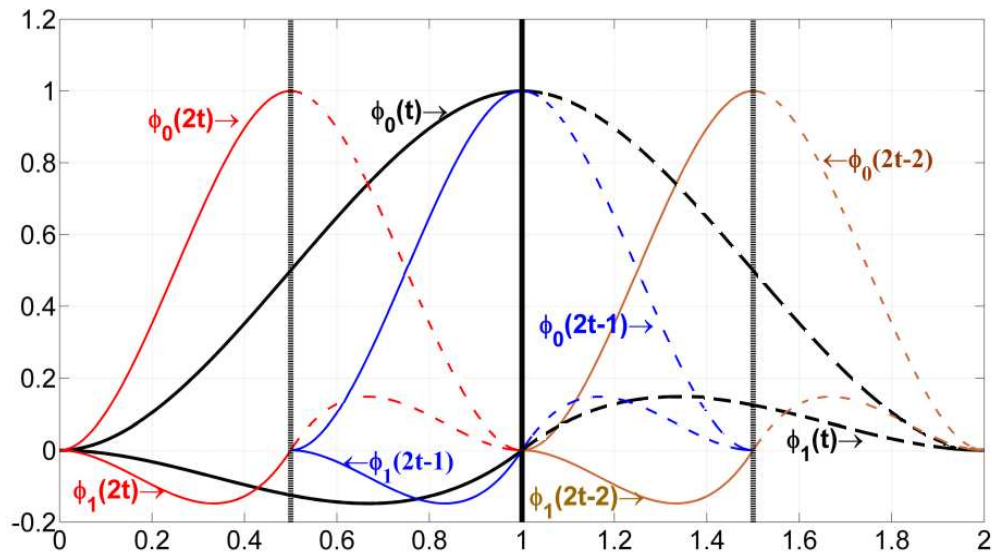
Разделянето на базисните функции е :

$$\text{- (леви) (с } L) \text{ за интервал } t \in [0,1]: \Phi_L(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 2t^3 \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

$$\text{- (десни) (с } R) \text{ за интервал } t \in [1,2]: \Phi_R(t) = \begin{pmatrix} 3(2-t)^2 - 2(2-t)^3 \\ (2-t)^3 - (2-t)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Мултимащабиращо уравнение е умноженето отдясно с $\Phi(2t), \Phi(2t-1), \Phi(2t-2)$:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(t), \Phi(2t) \rangle &= \sqrt{2}C_0 \langle \Phi(2t), \Phi(2t) \rangle + \sqrt{2}C_1 \langle \Phi(2t-1), \Phi(2t) \rangle \\ &\quad + \sqrt{2}C_2 \langle \Phi(2t-2), \Phi(2t) \rangle \\ \langle \Phi(t), \Phi(2t-1) \rangle &= \sqrt{2}C_0 \langle \Phi(2t), \Phi(2t-1) \rangle + \sqrt{2}C_1 \langle \Phi(2t-1), \Phi(2t-1) \rangle \\ &\quad + \sqrt{2}C_2 \langle \Phi(2t-2), \Phi(2t-1) \rangle \\ \langle \Phi(t), \Phi(2t-2) \rangle &= \sqrt{2}C_0 \langle \Phi(2t), \Phi(2t-2) \rangle + \sqrt{2}C_1 \langle \Phi(2t-1), \Phi(2t-2) \rangle \\ &\quad + \sqrt{2}C_2 \langle \Phi(2t-2), \Phi(2t-2) \rangle \end{aligned} \quad (2.68)$$



Фиг.2.4 Мултимасшабираща функция на кубичен Ермитов сплайн с основа $[0, 2]$ разделен на четири подинтервала $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, $[1, 3/2]$, $[3/2, 2]$ заедно с базисните функции $\Phi_L(t)$ (с непрекъснатата линия) и $\Phi_R(t)$ (с прекъснатата линия);

Тъй като $\Phi(2t-2)$ не лежи в интервала $[0,1]$ (фиг.2.4):

$$\langle\langle \Phi(2t-2), \Phi(2t) \rangle\rangle = 0.$$

Подобно, $\Phi(2t)$ не лежи в интервала на $[1, 2]$ (фиг.2.4):

$$\langle\langle \Phi(2t), \Phi(2t-2) \rangle\rangle = 0.$$

Следователно, скаларните произведения (2.68) образуват системата:

$$[C_0, C_1, C_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} [A \quad B \quad C] \begin{bmatrix} Q & R & 0 \\ R^T & Q & R \\ 0 & R^T & Q \end{bmatrix}^{-1}. \quad (2.69)$$

където

$$A = \langle\langle \Phi(t), \Phi(2t) \rangle\rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} \Phi_L(t) \Phi_L^T(2t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \Phi_L(t) \Phi_R^T(2t) dt$$

$$B = \langle\langle \Phi(t), \Phi(2t-1) \rangle\rangle = \int_{\frac{1}{2}}^1 \Phi_L(t) \Phi_L^T(2t-1) dt + \int_1^{\frac{3}{2}} \Phi_R(t) \Phi_R^T(2t-1) dt$$

$$C = \langle\langle \Phi(t), \Phi(2t-2) \rangle\rangle = \int_1^{\frac{3}{2}} \Phi_R(t) \Phi_L^T(2t-2) dt + \int_{\frac{3}{2}}^2 \Phi_R(t) \Phi_R^T(2t-2) dt$$

$$R = \langle\langle \varphi(2t), \varphi(2t-1) \rangle\rangle = \int_{\frac{1}{2}}^1 \Phi_R(2t) \Phi_L^T(2t-1) dt = \langle\langle \varphi(2t-1), \varphi(2t-2) \rangle\rangle$$

$$\begin{aligned} Q &= \langle\langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \varphi(2t), \varphi(2t) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \varphi(2t-1), \varphi(2t-1) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \varphi(2t-2), \varphi(2t-2) \rangle\rangle = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \varphi_L(t) \varphi_L^T(t) dt + \int_1^2 \varphi_R(t) \varphi_R^T(t) dt \right) \end{aligned}$$

След заместване с (2.66), (2.67) в (2.69) и решаване на скаларните произведения:

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 3t^2 - 2t^3 \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16t^3 + 12t^2 \\ 8t^3 - 4t^2 \end{pmatrix} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \begin{pmatrix} 3t^2 - 2t^3 \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16t^3 - 36t^2 + 24t - 4 \\ 8t^3 - 20t^2 + 16t - 4 \end{pmatrix}^T dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{19}{840} \\ -\frac{13}{240} & -\frac{1}{336} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 3t^2 - 2t^3 \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16t^3 + 36t^2 - 24t + 5 \\ 8t^3 - 16t^2 + 10t - 2 \end{pmatrix}^T dt + \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \begin{pmatrix} 3(1-t)^2 - 2(1-t)^3 \\ (2-t)^3 - (2-t)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16t^3 - 60t^2 + 72t - 27 \\ 8t^3 - 32t^2 + 42t - 18 \end{pmatrix}^T dt = \begin{bmatrix} \frac{257}{560} & 0 \\ 0 & \frac{1}{105} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 3(1-t)^2 - 2(1-t)^3 \\ (2-t)^3 - (2-t)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16t^3 + 60t^2 - 72t + 28 \\ 8t^3 - 28t^2 + 32t - 12 \end{pmatrix}^T dt \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \begin{pmatrix} 3(1-t)^2 - 2(1-t)^3 \\ (2-t)^3 - (2-t)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16t^3 - 84t^2 + 144t - 80 \\ 8t^3 - 44t^2 + 80t - 48 \end{pmatrix}^T dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{19}{840} \\ \frac{13}{240} & -\frac{1}{336} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$R = \int_{\frac{1}{2}}^1 \begin{pmatrix} 16t^3 - 36t^2 + 24t - 4 \\ 8t^3 - 20t^2 + 16t - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16t^3 + 36t^2 - 24t + 5 \\ 8t^3 - 16t^2 + 10t - 2 \end{pmatrix}^T dt = \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & 0 \\ 0 & \frac{1}{105} \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 3t^2 - 2t^3 \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t^2 - 2t^3 \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix}^T + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \begin{pmatrix} 3(1-t)^2 - 2(1-t)^3 \\ (2-t)^3 - (2-t)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3(1-t)^2 - 2(1-t)^3 \\ (2-t)^3 - (2-t)^2 \end{pmatrix}^T dt = \begin{bmatrix} \frac{9}{140} & -\frac{13}{840} \\ \frac{13}{840} & -\frac{1}{280} \end{bmatrix}$$

получаваме трите матрични коэффициента:

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}, C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ и } C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

В) Мултимашабираща функция на Алперт

Мултимашабираща функция е с основа [0,1]

$$\Phi(t) = \sqrt{2}C_0\Phi(2t) + \sqrt{2}C_1\Phi(2t-1) \in \mathbb{T}$$

с матрични коефициенти C_0 и C_1 .

Матричен коефициент C_0

Мултимашабиращото уравнение $\Phi(t)$ се умножава отдясно с $\Phi(2t)$:

$$\langle\langle\Phi(t), \Phi(2t)\rangle\rangle = \sqrt{2}C_0\langle\langle\Phi(2t), \Phi(2t)\rangle\rangle. \quad (2.71)$$

Замествайки с базисните функции първия матричен коефициент е:

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

където

$$\langle\langle\Phi(t), \Phi(2t)\rangle\rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} \Phi(t)\Phi^T(2t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(1-2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(1-2(2t)) \end{bmatrix}^T dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle\langle\Phi(t), \Phi(t)\rangle\rangle &= \frac{1}{2}\langle\langle\Phi(2t), \Phi(2t)\rangle\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle\langle\Phi(2t-1), \Phi(2t-1)\rangle\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle\langle\Phi(2t-2), \Phi(2t-2)\rangle\rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(1-2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(1-2t) \end{bmatrix}^T dt = I \end{aligned}$$

Матричен коефициент C_1

Мултимашабиращо уравнение $\Phi(t)$ се умножава отдясно с $\Phi(2t-1)$:

$$\langle\langle\Phi(t), \Phi(2t-1)\rangle\rangle = \sqrt{2}C_1\langle\langle\Phi(2t-1), \Phi(2t-1)\rangle\rangle. \quad (2.72)$$

Замествайки с базисните функции втория матричен коефициент е:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

където

$$\langle\langle\Phi(t), \Phi(2t-1)\rangle\rangle = \int_{\frac{1}{2}}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(1-2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(1-2(2t-1)) \end{bmatrix}^T dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

2.2 Методи за построяване на уейвлетни и мултиуейвлетни функции

Методите за построяване на мащабиращи и мултимащабиращите функции се използват чрез заместване на базисните функции в:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_0^{N-1} G_N \varphi(2t - N) \in \mathbb{T} \quad (2.73)$$

за построяване на уейвлетни и мултиуейвлетни функции.

За построяване на ортогонална мултиуейвлетна функция е необходимо предварително определени базисни функции ортогонални на мащабиращата или мултимащабиращата функция. Такив пример е филтър на Алперт.

За неортогонална мултиуейвлетна филтърна банка базисните функции са биортогонални на мултимащабиращата функция. Такива примери са кубичния и квинтик B – сплайни.

Матричните коефициенти се изчисляват в зависимост от метода и разделянето на основата на функцията на няколко подинтервала:

$$\begin{aligned} G_0 &= \left[0, \frac{1}{2} \right], \\ G_1 \div G_{N-1} &= \left[\frac{2N-1}{2}, \frac{2N+1}{2} \right], \\ G_N &= \left[\frac{2N-1}{2}, N \right] \end{aligned} \quad (2.74)$$

Примерно разделяне на интервали за изчисляване на матричните коефициенти е:

- интервал $[0,1]$ се състои от два коефициента

$$G_0 \text{ за интервал } \left[0, \frac{1}{2} \right] \text{ и } G_1 \text{ за интервал } \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

- интервал $[0,2]$ се състои от три коефициента

$$G_0 \text{ за интервал } \left[0, \frac{1}{2} \right], G_1 \text{ за } \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right], \text{ и } G_2 \text{ за } \left[\frac{3}{2}, 2 \right]$$

- интервал $[0,3]$ се състои от четири коефициента

$$G_0 \text{ за интервал } \left[0, \frac{1}{2} \right], G_1 \text{ за } \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right], G_2 \text{ за } \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right], \text{ и } G_3 \text{ за } \left[\frac{5}{2}, 3 \right]$$

интервал $[0,4]$ се състои от пет коефициента

$$G_0 \text{ за интервал } \left[0, \frac{1}{2} \right], G_1 \text{ за } \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right], G_2 \text{ за } \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right], G_3 \text{ за } \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right] \text{ и } G_4 \text{ за } \left[\frac{7}{2}, 4 \right]$$

2.3 Резултати и изводи

Представените в *Глава 2* резултати са следствие на изпълнението на изследователски задачи 2 и 3 на дисертацията. Описани са разработването на три метода за директно построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции с коефициенти от Лежандър полиноми, линеен и квадратичен B – сплайни, кубичен и квинтик Ермитов сплайни.

Научни резултати, получени при изпълнение на задача 2 и 3:

1. Разработени са три метода за директно получаване на скаларни и векторни функции: метод чрез смяна на базиса [т. 2.1], директен метод [т. 2.2], и метод чрез външното скаларно произведение [т. 2.3].

Научно–приложни резултати получени при изпълнение на задача 2 и 3:

1. Разработено е намаляване основата мащабиращи и мултимащабиращи функции от интервал $[0,3]$ и $[0,2]$ на $[0,1]$ [т. 2.1.2].
2. Построени са мащабиращи и мултимащабиращи функции от линеен B – сплайн [т. 2.1.3.1, т. 2.2.1, и т. 2.3.1], квадратичен B – сплайн (т. 2.1.2.1, т. 2.1.3.2), кубичен Ермитов сплайн [т. 2.1.2.2, т. 2.1.3.3, т. 2.2.2, и т. 2.3.2], квинтик Ермитов сплайн (т. 2.1.3.4), и Лежандър полиноми [т. 2.1.3.5, т. 2.2.3, и т. 2.3.3] чрез използване на разработените метод чрез смяна на базиса, директен метод, и метод чрез външното скаларно произведение.

Следното твърдение доказва постигането на заложеното в хипотезата:

- (а) Разработени са методи за построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции от полиноми и сплайни.

В теорията на сигналите процеса на определяне на минималната фазова функция, принадлежаща към даден спектър на мощност, се нарича *спектрална факторизация*, тъй като спектърът на мощността е продукт на два фактора, $H(z)$, и $H^*(z)$, всеки от които трябва да бъде определен.

В теорията на уейвлетите спектъра на мощност е пара – Ермитов полином който се нарича *филтър на произведение*.

В **глава 3** се разработват методи на спектрално разлагане - метод на корени на полиномите, метод на квадратични уравнения, Кепстрален метод, и метод на Бауер. За разлика от другите методи метод на Бауер изисква предварително построено произведението на скаларен (матричен) филтър, т.е. скаларен (матричен) пара–Ермитов полином. За получаване на матричен спектрален фактор (мултимащабираща функция) с желани свойства е необходимо детерминанта да удовлетворява определени условия. Такъв пример е намирането на *филтър на матрично произведение на Алперт*.

3.1 Разработване на произведение на матричен филтър

Най–важната част при използване метода на спектрално разлагане е разработването на произведение на пара-Ермитов скаларен (матричен) полином (автокорелационна функция) $P(z)$ удовлетворяващ задължителното условие за гладкост на желани мащабиращи (мултимащабиращи) функции. Той е сингулярен и се състои от $r \times r$ матрични коефициенти на степени z, z^{-1} с реални коефициенти от пръстена $\mathbb{R}^{r \times r}[z, z^{-1}]$. За намирането на желани функции произведението на скаларен (матричен) филтър $P(z) \in \mathbb{R}^{r \times r}[z, z^{-1}]$ е необходимо да удовлетворява условието за полулентов филтър:

$$P(z) + P(-z) = 2I \quad (3.1)$$

където $P_0 = I$, и $P_{2k} = 0, k \neq 0$. За простота е разгледано разработването на произведение на двуканален матричен филтър на степен $m = 1$ [89]:

$$P(z) = P_1^T + P_0 + P_1 z, \in \mathbb{R}^{2 \times 2}[z, z^{-1}] \quad (3.2)$$

с условие за гладкост:

$$\det P(z) = \left(\frac{1 + z^{-1}}{2} \right)^k Q(z) \quad (3.3)$$

където $Q(z)$ е линейно–фазов полином на k –четна степен. По–голямата гладкост означава по–висока степен на $P(z)$ с k –нули на единичната окръжност, т.е. $|z|=1$ и множителя $(1 \pm z^{-1})^k$ в (3.4).

Пример (Произведение на филтъра на Алперт) [89]:

Разработването на произведение на матричен филтър на Алперт с 2×2 матрични коефициенти P_0 и P_1 се състои в следните стъпки:

Стъпка 1: За постигане на по–висока гладкост детерминантата (3.3) е получена със степен $k=4$ и полином $Q(z) = z^2$:

$$\det P(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^4 Q(z) = \frac{z^{-2} + 4z^{-1} + 6 + 4z + z^2}{16} \quad (3.4)$$

Стъпка 2: От условието (3.1) следва:

$$P_0 = I.$$

Стъпка 3: Въвеждане на неизвестни променливи в:

$$P_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Стъпка 4: Лявата страна на (3.3) с неизвестните матрици се приравнява с дясната страна на (3.4):

$$\det \left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z \right) = \frac{z^{-2} + 4z^{-1} + 6 + 4z + z^2}{16}. \quad (3.6)$$

С това се построява линейната система

$$\begin{cases} ad - bc = \frac{1}{16} \\ a + d = \frac{4}{16} \\ 1 - b^2 - c^2 + 2ad = \frac{6}{16} \end{cases}. \quad (3.7)$$

която има две двойки решения :

$$b = -c = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{cases} a = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{4} \\ a = -\frac{1}{4}, d = \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (3.8)$$

Избора на решение е свързан със смяната на двете мащабиращи функции или със смяната на знака на една от тях. Избор на стойности за произведението на матричен филтър на Алперт са:

$$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}}{4}, c = \frac{\sqrt{3}}{4}, d = -\frac{1}{4}. \quad (3.9)$$

3.2 Метод на квадратичните уравнения

Този метод на спектрално разлагане използва решаване на квадратични уравнения. В резултат на това произведението на скаларен (матричен) филтър $p(z)$ се разлага на спектрален фактор $h(z^{-1})$ и неговия Ермитово спрегнат $h^*(z^{-1})$ [129]:

$$\begin{aligned} p(z) &= p_{-k}z^{-k} + \dots + p_{-2}z^{-2} + p_{-1}z^{-1} + p_0 \\ &\quad + p_1z + p_2z^2 + \dots + p_kz^k \\ &= h(z^{-1})h^*(z^{-1}) = h(z)h(z^{-1}) \\ &= (h_0 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots + h_kz^{-k})(h_0 + h_1z + h_2z^2 + \dots + h_kz^k) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Пример: Спектралното разлагане на произведение на скаларен филтър на $k=1$:

$$\begin{aligned} p(z) &= p_{-1}z^{-1} + p_0 + p_1z \\ &= (h_0 + h_1z^{-1})(h_0^T + h_1^T z) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Скаларните коефициенти h_0 и h_1 се получават от системата:

$$\begin{cases} h_0^2 + h_1^2 = p_0 \\ h_0h_1 = p_1 \end{cases}. \quad (3.12)$$

Това води до решаване на биквадратно уравнение:

$$h_0^4 - p_0h_0^2 + p_1 = 0. \quad (3.13)$$

чиито решения са две двойки реални решения:

$$\begin{aligned} h_0 &= \pm \sqrt{\frac{p_0 \pm \sqrt{p_0^2 - 4p_1^2}}{2}}, \\ h_1 &= \pm \sqrt{\frac{p_0 \mp \sqrt{p_0^2 - 4p_1^2}}{2}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3 Метод на корени на полиномите

Метод на корени на полиномите [31], [129] се изразява в разлагане на произведение на скаларен филтър $p(z)$ (3.10) на неговите корени:

$$p(z) = h(z)h(z^{-1}) = p_k \prod_{i=1}^m (z - z_i)(z - \frac{1}{z_i}) \prod_{j=1}^{k-m} (z - z_j)^2 \quad (3.15)$$

където $p_k \neq 0$ и комплексно спрегнатия z^* е корен когато z също е корен.

Главно предимство на метода е специалната структура на разлагания полином.

Главен недостатък е възможността от прилагане му върху полиноми от ниска степен, обикновено за $k \leq 10$.

Корените в уравнение (3.15) могат да бъдат:

- *Комплексни* (показани на **фиг. 3.1**):

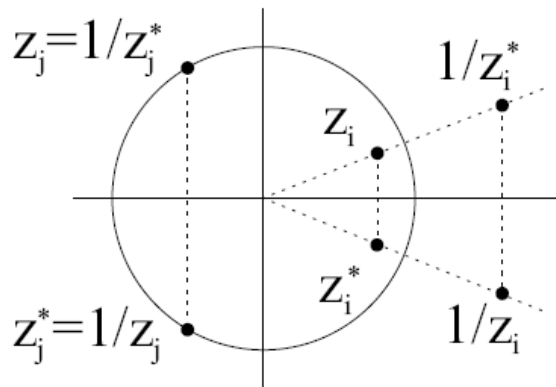
в единичната окръжност - z_i и z_i^*

извън единичната окръжност - $\frac{1}{z_i}$ и $\frac{1}{z_i^*}$

на единичната окръжност - по два z_i и по два z_i^*

- *Реални* (показани на **фиг. 3.1**):

два наведнъж (четно множество)



Фиг. 3.1 Разположение на корените спрямо единичната окръжност

Скаларният спектрален фактор е произведение от корените z_i в единичната окръжност, комплексно спрегнатите корени z_i^* , по един от всеки двоен корен z_j , и квадратен корен на коефициента p_k , т.е.:

$$h(z^{-1}) = z^{-k} \sqrt{p_k} \prod_{i=1}^m (z - z_i) \prod_{j=1}^{k-m} (z - z_j). \quad (3.16)$$

Такъв спектрален фактор е *минимално фазов* тъй като няма корени извън единичната окръжност.

Според разположението на корените съществуват три случая на спектрално разлагане:

(а) *Биортогонален*

Произведението на скаларния филтър $p(z)$ се разлага едновременно на корени в анализиращия и възстановяващия филтър:

- *За получаване на реални коефициенти* - корените (z и неговия комплексно спрегнат z^*) трябва да образуват двойка.

- За получаване на реални симетрични коефициенти и линейна фаза - корените (z и неговия реципрочен z^{-1}) трябва да образуват двойка.

Следователно, за определене на анализиращите и възстановяващите филтри са необходими:

всяка четворка комплексни корени: z, z^*, z^{-1}, z^{-*} ;

и двойка реални корени: $(z, z^{-1} \mid z = x + iy, y = 0)$;

(б) *Ортогонален*

Произведението $p(z)$ се разлага на две комплексно спрегнати двойки:

$$(z, z^*) \text{ и } (z^{-1}, z^{-*}), \quad (3.17)$$

като всяка двойка реални корени е разложена на два единични корена с определен множител:

$$(z) \text{ и } (z^{-1}). \quad (3.18)$$

(с) *Комплексно ортогонален*

Произведението $p(z)$ се разлага като реципрочни двойки:

$$(z, z^{-1}) \text{ и } (z^*, z^{-*}) \quad (3.19)$$

Пример: Мащабиращ филтър на Добеши 4

Една от най-често използвани филтърни банки в уейвлетната теория са полулентови (*halfband*) КИХ Добеши (Daubechies) филтри [43]. В честотната област са максимално гладки (плоски) (*maxflat*) и са свързани с полиноми на степен $M-1$ и четен брой коефициенти $M=2m$. За да се гарантира максимална гладкост на филтрите се изисква максимален брой нули, което е свързано с множителя $(1+z)$. Уейвлетния филтър $g(z)$ се получава от условието за ортогоналност и извършване на операцията “*flip*”:

$$g(z) = g_0 + g_1 z + \dots + g_{M-1} z^{M-1} = -z^{M-1} h(-z^{-1}).$$

Следователно, за разработване на скаларна ортогонална филтърна банка е необходим мащабиращия филтър $h(z)$. Той може да бъде получен от автокорелационната функция $p(z)$ с $(4m-1)$ коефициенти в обхвата от $-(2m-1)$ до $(2m-1)$ с нулеви четни коефициенти, за $j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(m-1)$:

$$p_{2j} = 0, \quad (3.20)$$

и нормиран коефициент

$$p_0 = 1. \quad (3.21)$$

Произведението на скаларен филтър е произведение на спектралния фактор $h(z)$:

$$p(z) = h(z)h(z^{-1}) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^m w(z) \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^m \quad (3.22)$$

където $w(z) = w(z^{-1})$ е симетричен полином с $(2m - 1)$ коефициенти, свързан със степените на z от $-(m-1)$ до $(m-1)$:

$$w(z) = r_0 \underbrace{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_k z)}_{l(z)} r_0 \underbrace{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_k z^{-1})}_{l(z^{-1})} = \frac{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_k z)}{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_k)} \frac{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_k)} \quad (3.23)$$

където $r_0 = \frac{1}{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_k)}$ гарантира че $l(1) = 1$. Следователно, мащабиращия филтър е:

$$h(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2}\right)^m l(z). \quad (3.24)$$

където $l(z)$ е спектрален фактор, $\sqrt{2}$ -нормиращ множител за удовлетворяване условието $\sum_{k=0}^{N-1} h_k = \sqrt{2}$ и полинома $\left(\frac{1+z}{2}\right)^m$.

За да се намери произведението на Добеши 4 мащабиращ филтър е необходимо степента да е $m=2$, а на полином $w(z)$ - степен 1:

$$w(z) = az^{-1} + b + az. \quad (3.25)$$

След заместване на (3.25) в (3.22) и от условията (3.20), (3.21), системата

$$\begin{cases} 4a + b = 0 \\ \frac{8a + 6b}{16} = 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

намира решенията $a = -1$ и $b = 4$, и отгук корените на (3.25)

$$z_1 = 2 - \sqrt{3}, \quad z_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Тогава, спектралното разлагане на произведението на Добеши 4 филтър :

$$\begin{aligned} p(z) &= h(z)h(z^{-1}) \\ &= \frac{1}{16} (-z^{-3} + 9z^{-1} + 1 + 9z - z^3) \\ &= r_0(1 - z_1 z) r_0(1 - z_2 z) \end{aligned} \quad (3.27)$$

води до спектралния фактор

$$l(z) = \frac{1 - (2 - \sqrt{3})z}{\sqrt{3} - 1}, \quad (3.28)$$

с коефициент $r_0 = \frac{1}{1-z_1} = \frac{1}{1-(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$. След заместване е получен добре

известния мащабиращ *Добеши 4* филтър:

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \quad (3.29)$$

3.4 Кепстрален метод

Кепстралният (Cepstral) метод на спектрално разлагане се основава на бързата Фурие трансформация (БФТ). Той изисква предвидени хардуерни или софтуерни рерурси [28], [33], [83], [94], [110]. Използва се за построяване на несиметрични мащабиращи функции. Главната идея е логаритъма на произведението на филтър:

$$\log p(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} l_n z^{-n} = \left(\frac{l_0}{2} + \sum_1^{\infty} l_n z^{-n}\right) + \left(\frac{l_0}{2} + \sum_1^{\infty} l_n z^n\right). \quad (3.30)$$

Резултата е сума от два полинома по степените z^k и z^{-k} като коефициентите се изчисляват рекурсивно:

$$h_0 = \exp\left(\frac{1}{2}l_0\right) \quad (3.31)$$

$$h_n = l_n h_0 + \frac{n-1}{n} l_{n-1} h_1 + \dots + \frac{1}{n} l_1 h_{n-1}.$$

За да намерим $n+1$ коефициенти h_0, h_1, \dots, h_n е необходимо намирането на $n+1$ коефициенти l_0, l_1, \dots, l_n .

3.5 Метод на Бауер

В основата на метода на Бауер е *лемата на Фейър–Риз* за матричния случай, която се прилага в математиката [29] и в теорията на управлението [60],[80],[120], [122].

Лема на Фейър– Риз (Матричен Случай):

Ако пара–Ермитов матричен полином $A(z) = \sum_{k=-L}^L A_k z^k$ е положително определен за

всички $z \in T$, тогава съществува $n \times n$ полином удовлетворяващ матричното равенство:

$$A(z) = U(z)U^*(z). \quad \#$$

където $U(z) = \sum_{k=0}^L U_k z^k$. Тогава разлагането на произведение на скаларен $p(z)$ (матричен $P(z)$) филтър

$$p(z) = p_{-k} z^{-k} + p_{-k+1} z^{-k+1} + \dots + p_0 + \dots + p_{k-1} z^{k-1} + p_k z^k, \quad p_{-k} = p_k$$

$$P(z) = P_{-k} z^{-k} + P_{-k+1} z^{-k+1} + \dots + P_0 + \dots + P_{k-1} z^{k-1} + P_k z^k, \quad P_{-k} = P_k^T \quad (3.32)$$

е еквивалентно на Холески разлагане на безкрайна блоково лентова матрица

$$T_{n \times n} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & P_{-k} & P_{-k+1} & \dots & P_{k-1} & P_k & & \\ & & P_{-k} & P_{-k+1} & \dots & P_{k-1} & P_k & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} = FF^T \quad (3.33)$$

където Холески фактора е блоково лентова матрица:

$$F = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & C_k^{(n)} & \dots & C_1^{(n-1)} & C_0^{(n-1)} & & & \\ & & C_k^{(n)} & \dots & C_1^{(n-1)} & C_0^{(n-1)} & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

В [23], [24] е описано спектрално разлагане чрез класическия метод Бауер чрез построяване на $(n+1) \times (n+1)$ блокова лентова Тьоплецова матрица с $P_{-1} = P_1^T$:

$$T_{n \times n} = F_{n \times n} F_{n \times n}^T = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_k \\ P_{-1} & P_0 & P_1 & \dots & P_k \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ P_{-k} & & & \ddots & P_k \\ & & & & \vdots \\ & & & & P_1 \\ & & & P_{-k} & \dots & P_{-1} & P_0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$= \begin{bmatrix} C_0^{(0)} & & & & & & \\ C_1^{(1)} & C_0^{(1)} & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ C_k^{(m)} & & & C_0^{(m)} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & C_k^{(n)} & \dots & C_1^{(n)} & C_0^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^{(0)} & & & & & & \\ C_1^{(1)} & C_0^{(1)} & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ C_k^{(m)} & & & C_0^{(m)} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & C_k^{(n)} & \dots & C_1^{(n)} & C_0^{(n)} \end{bmatrix}^T.$$

От последния ред на матрицата $F_{n \times n}$ се определя спектралния фактор:

$$H^{(n)}(z) = C_0^{(n)} + C_1^{(n)} z^{-1} + \dots + C_k^{(n)} z^{-k}.$$

Главен недостатък на метода необходимостта от блокова лентова Тьоплецова матрица с огромни размери поради наличие на кратни нули на единичната окръжност значителни численни грешки в спектралния фактор. В някои случаи дори е невъзможно спектралното разлагане на произведения на сингулярни матрични филтри.

Спекралното разлагане по метода на Бауер за скаларен полином на степен $k = 1$ се представя със спектралния фактор:

$$\begin{aligned}
p(z) &= p_{-1}z^{-1} + p_0 + p_1z \\
&= h_0(z^{-1})h_0^*(z^{-1}) \\
&= (h_0 + h_1z^{-1})(h_0^T + h_1^Tz)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Следователно, коефициенти в произведението се получават чрез уравненията:

$$\begin{aligned}
p_0 &= h_0^2 + h_1^2 \\
p_1 &= h_0h_1
\end{aligned} \quad \text{и} \quad p_{-1} = p_1 \tag{3.37}$$

Метода на Бауер за матричен полином на степен $k=1$ се представя със $r \times r$ матрични коефициенти C_0, C_1 в спектралния фактор $H(z) = C_0 + C_1z^{-1}$:

$$\begin{aligned}
P(z) &= P_{-1}z^{-1} + P_0 + P_1z \\
&= H(z)H^T(z) \\
&= (C_0 + C_1z^{-1})(C_0 + C_1z^{-1})^T
\end{aligned} \tag{3.38}$$

където коефициентите са:

$$\begin{aligned}
P_0 &= C_0C_0^T + C_1C_1^T \\
P_1 &= C_0C_1^T
\end{aligned} \quad \text{и} \quad P_{-1} = P_1^T \tag{3.39}$$

3.6 Резултати и изводи

Представените в **Глава 3** резултати са следствие от изпълнението на изследователска задача 4 на дисертацията. Тя включва обзор на методите на спектрално разлагане - метод на корени на полиномите, метод на квадратични уравнения, Кепстрален метод, и метод на Бауер. Разработена е мултимасшабираща функция с желани свойства и предварително зададена детерминантата. Разработено е авторско произведение на филтър на Алперт.

Научни резултати, получени при изпълнение на задача 4:

1. Разработено е авторско произведение на матричен филтър Алперт [т. 3.1].

Авторски публикации, в които са представени част от постигнатите резултати:

Kolev V., **Cooklev T.**, **Keinert F.**, Design of a simple orthogonal multiwavelet filter by matrix spectral factorization, *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol.39, no.4, pp.2006–2041, **2020**, Springer, IF 1.681, SJR 0.39, **Q3**(WoS)

За да бъдат получени матрични коефициенти по метода на Бауер за спектрално разлагане са разработени детайлно алгоритми за решаване на НМУ. Затова тази глава е посветена на построяването на два численни алгоритъма - *Алгоритъм 1* и *Алгоритъм 2* чиито прилагане води до решения на НМУ с точни стойности. Също така са показани са разликите между класическия и бърз метод на Бауер.

Спектралното разлагане на произведение на филтър с основа по-голяма от [0, 1] увеличава изчислителната сложност. За тази цел е предложено коефициентите на произведение с основа [0, N] да се пренаредят на основа [0, 1].

4.1 Обща теория на бърз метод на Бауер

Предимствата на бързия метод на Бауер (БМБ) е избягване построяването и разлагането на Тьоплецова матрица с огромни размери и възможността спектралните фактори да бъдат с точни коефициенти чрез *символни изчисления* с *Matlab* [92], [93] и *Maple* [90].

За тази целта степента на произведението на филтъра е необходимо да бъде понижена на $k=1$. За целта коефициентите P_k в произведението на филтър на k -степен

$$P(z) = P_{-k}z^{-k} + P_{-k+1}z^{-k+1} + \dots + P_0 + \dots + P_{k-1}z^{k-1} + P_kz^k, \quad P_{-1} = P_1^T \in \mathbb{R}^{r \times r}[z, z^{-1}]. \quad (4.1)$$

се пренареждат в два коефициента \hat{P}_0 , и $\hat{P}_{-1} = \hat{P}_1^T$,

$$\hat{P}(z) = \hat{P}_{-1}z^{-1} + \hat{P}_0 + \hat{P}_1z. \quad (4.2)$$

Пример [90]: Произведението на матричен филтър на степен $k = 3$:

$$P(z) = P_{-3}z^{-3} + P_{-2}z^{-2} + P_{-1}z^{-1} + P_0 + P_1z + P_2z^2 + P_3z^3 \quad (4.3)$$

се пренарежда на

$$\begin{aligned} \hat{P}(z) &= \hat{P}_{-1}z^{-1} + \hat{P}_0 + \hat{P}_1z \\ &= H(z^{-1})H^T(z) \\ &= (\hat{C}_0 + \hat{C}_1z^{-1})(\hat{C}_0 + \hat{C}_1z)^T \end{aligned} \quad (4.4)$$

чрез матричните коефициенти:

$$\hat{P}_{-1} = \begin{bmatrix} P_3^T & P_2^T & P_1^T \\ 0 & P_3^T & P_2^T \\ 0 & 0 & P_3^T \end{bmatrix}, \quad \hat{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_1^T & P_0 & P_1 \\ P_2^T & P_1^T & P_0 \end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad \hat{P}_1 = \hat{P}_1^T = \begin{bmatrix} P_3 & 0 & 0 \\ P_2 & P_3 & 0 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

След спектрално разлагане коефициентите на спектрален фактор (4.4) са:

$$\hat{C}_1 = \begin{bmatrix} C_3 & C_2 & C_1 \\ & C_3 & C_2 \\ & & C_3 \end{bmatrix} \text{ и } \hat{C}_0 = \begin{bmatrix} C_0 & & \\ C_1 & C_0 & \\ C_2 & C_1 & C_0 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

4.2 Разработване на алгоритъм за бърз метод на Бауер

В класическия метод на Бауер за спектрално разлагане главен недостатък Холески разлагане на лентова Тьоплецова матрица $T_{n \times n}$ с огромни размери ($>10^6$) състояща се от коефициентите на произведението на скаларен (матричен) филтър. Метода се усложнява за сингулярно произведение на филтър, което води до подлинейна сходимост и спектрални фактори с големи грешки. Това води до разработването на бърз метод на Бауер за скаларно (матрично) спектрално разлагане [90].

За описание на метода е разгледано произведение на матричен филтър на степен $k=1$. Ако допуснем, че е зададена началната стойност за първия коефициент C_0^0 на мащабиращата функция тогава, първия коефициент на произведението на филтъра е:

$$P_0 = C_0^0 [C_0^0]^T. \quad (4.7)$$

От друга страна, стойностите на матричните коефициенти $C_0^{(n)}$ и $C_1^{(n)}$ са известни след n -итерация, тогава втория коефициент

$$C_1^{(n+1)} = P_1^T [C_0^{(n)}]^{-T}$$

получен чрез итерациите за $P_1 = C_0^{(n)} [C_1^{(n+1)}]^T$ се замества в първия коефициент:

$$P_0 = C_1^{(n+1)} [C_1^{(n+1)}]^T + C_0^{(n+1)} [C_0^{(n+1)}]^T \quad (4.9)$$

с което се построява нелинейно матрично уравнение (НМУ):

$$\begin{aligned} C_0^{(n+1)} [C_0^{(n+1)}]^T &= P_0 - C_1^{(n+1)} [C_1^{(n+1)}]^T \\ &= P_0 - P_1^T [C_0^{(n)}]^{-T} [P_1^T [C_0^{(n)}]^{-T}]^T \end{aligned} \quad (4.10)$$

или

$$C_0^{(n+1)} [C_0^{(n+1)}]^T = P_0 - P_1^T [C_0^{(n)}]^{-T} [C_0^{(n)}]^{-1} P_1. \quad (4.11)$$

Това е разработеното от автора преобразуване на метода на Бауер [89], [90] в НМУ за n -итерации

$$X^{(n+1)} = P_0 - P_1^T [X^{(n)}]^{-1} P_1 \quad (4.12)$$

където

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= P_0 \\ X^{(n)} &= C_0^{(n)} [C_0^{(n)}]^T \end{aligned} \quad (4.13)$$

Всяко решение $X^{(n)}$ за $n \rightarrow \infty$ е решение на НМУ за n -итерация, т.е. граничните

стойности водят до НМУ:

$$X = P_0 - P_1^T X^{-1} P_1 \quad (4.14)$$

с крайните стойности на коефициентите на матричния фактор:

$$\begin{aligned} C_0 \leftarrow X &= \lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)} \\ C_1 &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_1^T [C_0^{(n)}]^{-T} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Следователно, скаларения (матричния) спектрален фактор (4.4) е:

$$H(z^{-1}) = C_0 + C_1 z^{-1} \quad (4.16)$$

Стъпките използвани в класическия и бърз метод на Бауер са сравнени и главните разлики са маркирани (в сиво) (Табл. 4.1).

Табл.4.1 Стъпки на метода на Бауер за спектрално разлагане

Стъпки на метода на Бауер				
	1	2	3	4
Метод на Бауер	Произведение на филтър		Холески разлагане	Скаларни (матрични) коефициенти
Класически	$P(z)$	Тъopleцова матрица		
		T	$T = FF^T$	$H_0^{(n)}, H_1^{(n)}, \dots, H_k^{(n)}$
Бърз	$P(z)$	НМУ	Извличане на коефициентите от \hat{H}_0 :	Извличане на коефициентите от \hat{H}_1 :
		$\hat{X} = \hat{P}_0 - \hat{P}_1^T \hat{X}^{-1} \hat{P}_1$	$\hat{X} = \hat{H}_0 \hat{H}_0^T$ $H_0^{(n)}, H_1^{(n)}, \dots, H_k^{(n)}$	$\hat{H}_1 = \hat{P}_0^T \hat{H}_0^{-T}$ $H_0^{(n)}, H_1^{(n)}, \dots, H_k^{(n)}$

На основата на формулите (4.14)–(4.16) е построен *Алгоритъм 1*. Съществуването на математически софтуер със символна алгебра (блок “Използване на символна алгебра”) води до построяване на *Алгоритъм 2*. Чрез неговото прилагане спектралните фактори са получават с точни стойности. Очевидно е, че най-важната стъпка в двата алгоритъма е ‘Step 1’. Ето защо в следващите подглави са разгледани методи за намиране решението X чрез НМУ.

=====
Inputs: P_0, P_1, \dots, P_k (Скаларни (Матрични) коефициенти на $P(z)$)

Outputs: C_0, C_1, \dots, C_k (Скаларни (Матрични) коефициенти на $H(z)$)

Begin:

If $k > 1$

Построяване на блоково матрици \hat{P}_0 и \hat{P}_1 за понижаване степента на произведението на скаларен (матричен) филтър на $k=1$;

End

Step 1: Намиране на матрицата \hat{X} чрез численно решаване на

$$\hat{X} = P_0 - P_1^T \hat{X}^{-1} P_1;$$

Step 2: Намиране на матрицата \hat{C}_0 като Холески разлагане, т.е.

$$\hat{X} = C_0 C_0^T;$$

Step 3: Намиране на матрицата \hat{C}_1 чрез $\hat{C}_1 = \hat{P}_1 \hat{C}_0^{-T}$;

If $k > 1$

Извличане на C_0, C_1, \dots, C_k от \hat{C}_0 и \hat{C}_1 ;

End

End

=====
Фиг. 4.1 Алгоритъм 1: Бърз метод на Бауер

=====
Inputs: P_0, P_1, \dots, P_k (Скаларни (Матрични) коефициенти на $P(z)$)

Outputs: C_0, C_1, \dots, C_k (Скаларни (Матрични) коефициенти на $H(z)$)

Begin:

If $k > 1$

Построяване на блоково матрици \hat{P}_0 и \hat{P}_1 за понижаване степента на произведение на скаларен (матричен) филтър на $k=1$;

End

Използване на символна алгебра

Step 1: Построяване на симетричната матрица \hat{X} чрез символни стойности x_{ij} ;

Step 2: Построяване и решаване на НМУ чрез нелинейна система от уравнения:

$$f(\hat{X}) = \hat{X} - \hat{P}_0 + \hat{P}_1^T \hat{X}^{-1} \hat{P}_1 = 0;$$

Step 3: Намиране на матрицата \hat{C}_0 чрез Холески разлагане на \hat{X} ;
--

Step 4: Намиране на матрицата \hat{C}_1 чрез $\hat{C}_1 = \hat{P}_1^T \hat{C}_0^{-T}$;
--

If $k > 1$

Извличане на C_0, C_1, \dots, C_k от \hat{C}_0 и \hat{C}_1 ;

End

End

=====
Фиг. 4.2 Алгоритъм 2: Точен метод на Бауер

4.3 Методи за решаване на НМУ в БМБ

4.3.1 Метод на неподвижната точка

Метода неподвижната точка е функционал:

$$f(x) = x - g(x) = 0. \quad (4.17)$$

чиито решение \bar{x} удовлетворява $f(\bar{x}) = \bar{x} - g(\bar{x}) = 0$ за n -брой итерации:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \text{начална стойност} \\ x^{(n+1)} &= g(x^{(n)}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Използвайки метода неподвижната точка (4.18) е разработен матричен функционал за решаване на НМУ:

$$g(X) = P_0 - P_1^T X^{-1} P_1. \quad (4.19)$$

4.3.2 Метод на Нютон

Метода на Нютон е функционал $f(x)=0$ чиито решение се постига за n -брой итерации е:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \text{начална стойност} \\ x^{(n+1)} &= x^{(n)} - [D(x^{(n)})]^{-1} f(x^{(n)}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

където обикновено $D(x^{(n)}) \approx 0$. Използвайки метода на Нютон (4.20) в [90] автора е разработил следния матричен функционал за решаване на НМУ:

$$g(X) = X - P_0 + P_1^T X^{-1} P_1 = 0. \quad (4.21)$$

4.3.3 Чрез използване на ОДАУР

Обобщеното дискретно алгебрично уравнение на Рикати (ОДАУР) [18] дава възможност чрез използване на софтуер с вградени функции в MATLAB ('*dare*' и '*idare*'), в Maple ('*dare*'), и в Mathematica ('*DiscreteRiccatiSolve*') решаване на НМУ като специален случай, т.е.:

$$E^T X E = D^T X D - (D^T X B + A^T)(B^T X B + R)^{-1}(D^T X B + A^T)^T + C^T Q C \quad (4.22)$$

където матриците $R = D = 0$ и $C = E = B = I$. Използването на Mathematica чрез функцията '*DiscreteRiccatiSolve*' е невъзможно защото изисква $\det R \neq 0$.

4.4 Бърз метод на Бауер (Скаларен случай)

Спектрално разлагане на произведение на скаларен филтър на степен $k=1$:

$$\begin{aligned} p(z) &= h(z)h^T(z) = (h_0 + h_1 z^{-k})(h_0^T + h_1^T z^k) \\ &= h_1 h_0^T z^{-k} + (h_0 h_0^T + h_1 h_1^T) + h_0 h_1^T z^k \\ &= h_0 h_1 z^{-k} + (h_0^2 + h_1^2) + h_0 h_1 z^k \end{aligned} \quad (4.23)$$

чрез БМБ води до НМУ:

$$x = p_0 - p_1^T x^{-1} p_1 = p_0 - p_1^2 x^{-1}. \quad (4.24)$$

От решението $x = h_0^2$ като квадратен корен се намира първия коефициент h_0 :

$$h_0 = \sqrt{x}, \quad (4.25)$$

а втория коефициент h_1 се получава чрез произведението:

$$h_1 = p_1 h_0^{-1} = \frac{p_1}{\sqrt{x}}. \quad (4.26)$$

4.5 Бърз метод на Бауер (векторен случай)

4.5.1 Разработване на мултимащабираща функция на Алперт

Произведението на матричен филтър на Алперт е с коефициенти:

$$P_1 = I \text{ и } P_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Решението на НМУ е $X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$. Неговият Холески фактор е първия коефициент:

$$C_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Чрез $C_1 = P_1^T C_0^{-T}$ е получен втория матричен коефициент:

$$C_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \right)^{-T} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

4.5.2 Разработване на мултиуейвлетната функция на Алперт

Мултиуейвлетните коефициенти D_N се намират от ортогоналните условия:

$$\begin{aligned} C_0 C_0^T + C_1 C_1^T &= D_0 D_0^T + D_1 D_1^T = I \\ C_0 D_0^T + C_1 D_1^T &= 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

чрез следните подходи:

(а) Използване връзките между коефициентите D_N и C_N ;

(б) Чрез QR разлагане на мултимащабиращия филтър

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} z^{-1}. \quad (4.31)$$

А) Чрез матричните коефициенти на мултимащабиращата функция

Мултиуейвлетните коефициенти D_0 и D_1 са свързани с мултимащабиращия

коефициент C_0 чрез матриците $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ и $J_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$D_0 = C_0 J_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$D_1 = J C_0 J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Б) Чрез използване на QR разлагане

Чрез QR разлагане на мултимащабирания филтър

$$\begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \end{bmatrix} H_0^T = Q^T H_0^T = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

са получени нов вариант на мултиуейвлетни коефициенти:

$$\hat{D}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \hat{D}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Друг мултиуейвлетен филтър със симетрични функции е получен от автора в [89] чрез ляво умножение на ортогонална матрица U :

$$[D_0 \ D_1] = U[\hat{D}_0 \ \hat{D}_1] \quad (4.40)$$

Автора в [89] доказва, че съществуват два варианта за ортогонална матрица U :

❖ *Вариант 1:*

$$\text{С ортогонална матрица } U = \begin{bmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix};$$

С този избор, първата уейвлетна функция ψ_0 е симетрична, втората ψ_1 – асиметрична, и двете уейвлетни функции са:

$$[\hat{\psi}_0 \ \hat{\psi}_1] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [\psi_1 \ -\psi_0] \quad (4.41)$$

$$[\hat{\psi}_0 \ \hat{\psi}_1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-\psi_1 \ \psi_0]. \quad (4.42)$$

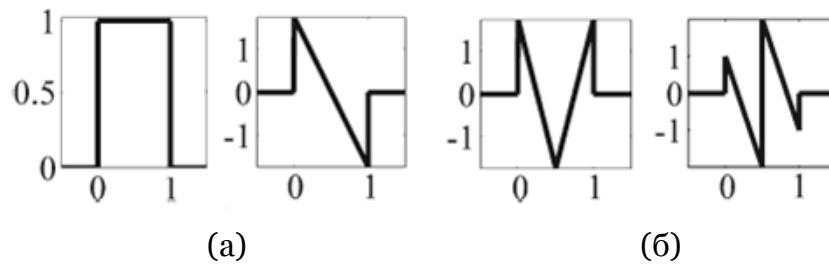
С избор (4.42) се намира уейвлетния матричен филтър на Алперт показан **фиг. 4.3**.

❖ *Вариант 2:*

$$\text{С ортогонална матрица } U = \begin{bmatrix} \mp 1 & \\ & \pm 1 \end{bmatrix};$$

Този избор е свързан със смяна на знаците в двете уейвлетни функции:

$$[\hat{\psi}_0 \ \hat{\psi}_1] \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} = [-\psi_0 \ \psi_1] \text{ или } [\hat{\psi}_0 \ \hat{\psi}_1] \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} = [\psi_0 \ -\psi_1]. \quad (4.42)$$



Фиг. 4.3 Ортогонален филтър на Алперт: (а) мултимасшабираща функция $\Phi(t) = [\phi_0, \phi_1]^T$; (б) мултиуейвлетна функция $\Psi(t) = [\psi_0, \psi_1]^T$;

4.6 Резултати и изводи

Представените в *Глава 4* резултати са следствие от изпълнението на изследователски задачи 4 и 5 на дисертацията. Тя е посветена на разработване на *Алгоритъм 1* и *Алгоритъм 2* за численото решаване на БМБ. Това е наложено от факта, че класическият метод за спектрално разлагане на сингулярно произведение на скаларен (матричен) филтър изисква построяване на блокова лентова Тьоплецова матрица с огромни размери ($>10^6$) и нейното Холески разлагане.

При разработването и изследването на метода БМБ са използвани числените решения на НМУ по метода на неподвижната точка, метода на Нютон, и обобщеното дискретно алгебрично уравнение на Рикати.

Главното предимство на разработения *Алгоритъм 2* е възможността мултимасшабиращите функции да бъдат с точни коефициенти, следователно и мултиуейвлетните функции, и да удовлетворяват желани мултифилтърни свойства. Това е верифицирано чрез разработването мултифилтър на Алперт.

Научно – приложни резултати, получени при изпълнение на задача 4 и 5:

1. Разработени е алгоритъм за понижаване степента на произведението на матрични филтри [т.4.1].
2. Разработени са *два авторски алгоритъма* за бърз метод на Бауер;
 - (а) *Алгоритъм 1* - за изчисляване на бърз метод на Бауер [т.4.2].
 - (б) *Алгоритъм 2* - за изчисляване на точен метод на Бауер [т.4.2].
3. Разработени са *два авторски численни метода* за решаване на НМУ за БПБ и е представена тяхната изчислителна сложност [т.4.3.1] и [т.4.3.2].
4. Приложен е класическият и бърз метод на Бауер за спектрално разлагане на произведението на скаларен филтър [т.4.4] и произведението на матричен филтър на Алперт [т.4.5.1].

5. Разработен са два авторски варианта за намиране на симетрични уейвлетни функции на Алперт. [т.4.5.2].

Следните твърдения доказват постигането на заложеното в хипотезата:

(б) Разработване на *Алгоритъм 1* е *Алгоритъм 2* за бърз и точен Метод на Бауер;

Авторски публикации, в които са представени част от постигнатите резултати:

Kolev V., Cooklev T., Keinert F., Design of a simple orthogonal multiwavelet filter by matrix spectral factorization, Circuits, Systems and Signal Processing, vol. 39, no.4, pp.2006 – 2041, **2020**, Springer, IF 1.681, SJR 0.39, **Q3**(WoS)

Kolev V., Cooklev T., Keinert F., *Bauer's Spectral Factorization Method for Low Order Multiwavelet Filter Design*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 441, Elsevier, 115713, 2024. IF 2.4, SJR 0.8, **Q1**(WoS)

ГЛАВА 5

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ НА РАЗРАБОТЕНИТЕ МЕТОДИ ЗА ПОСТРОЯВАНЕ НА УЕЙВЛЕТНИ И МУЛТИУЕЙВЛЕТНИ ФИЛТЪРНИ БАНКИ

Главата е посветено на експериментално изследване на класическия и бърз метод на Бауер за спектрално разлагане и сравнителен анализ чрез 7 примера, както и построяване мащабиращите функции на Хаар, Добеши4, и мултимащабиращата функция на Алперт. Сравнени са различни приложения на ортогонални мултиуейвлет филтъра за обработка на тестващи изображения с ниво на сиво и изображения от сканирани фотографски плаки. Извършено е експериментално изследване на разработени от автора модули без умножение за биортогонална 5/3 филтърна банка проектирани и реализирани върху препрограмируема интегрална схема.

5.1 Експериментално изследване и сравнителен анализ на класическия и бърз метод на Бауер за спектрално разлагане

5.1.1 Експериментално изследване на класическия метод на Бауер за скаларно спектрално разлагане (мащабираща функция на Хаар)

Произведението на филтъра на Хаар е сингулярен скаларен пара-Ермитов полином с двойна нула на единичната окръжност ($z = -1$) на степен $k = 1$,

$$p(z) = \frac{1}{2} z^{-1} + 1 + \frac{1}{2} z \quad (5.1)$$

Спектралното разлагане произведението (5.1) води до спектралния фактор с точни коефициенти:

$$h_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}. \quad (5.2)$$

Сходимостта на метода на Бауер за спектралното разлагане зависи от сингулярността на произведението (5.1). Това се очевидно от абсолютната грешка получена за коефициента в диагонала на $n \times n$ блоково лентовата Тьоуплецова матрица за ред $n \rightarrow 1$

$$\varepsilon_{Haar} = \left| \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right| \quad (5.3)$$

Постигането на желана точност на спектралния фактор е необходимо:

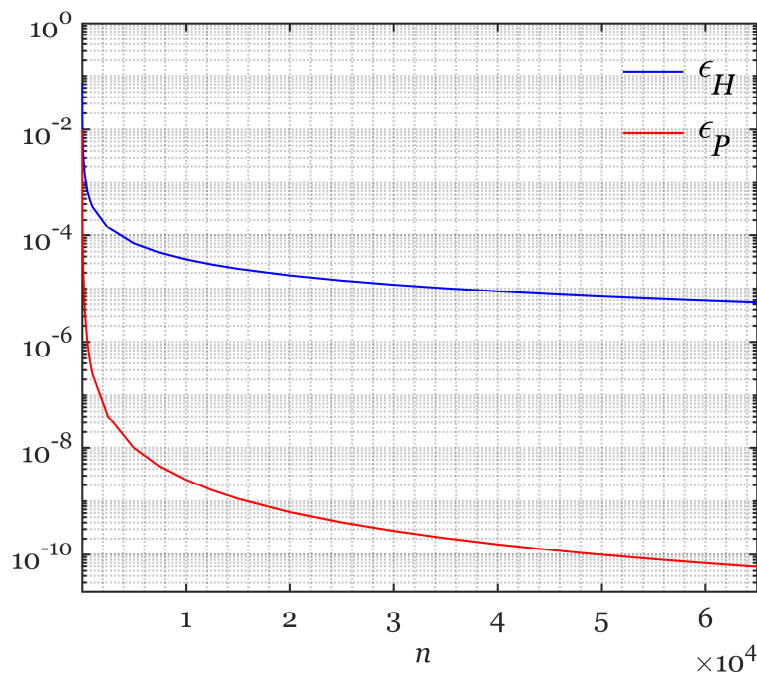
$$(a) \ n = 10^4, \text{ тогава } \varepsilon_{Haar} = \left| \sqrt{1 + \frac{1}{10000}} - \left(1 + \frac{1}{20000} \right) \right| = 1.3 \times 10^{-9};$$

$$(б) n = 10^7, \text{ тогава } \varepsilon_{Haar} = \left| \sqrt{1 + \frac{1}{10^7}} - \left(1 + \frac{1}{2 \times 10^7} \right) \right| = 1.25 \times 10^{-15}.$$

При разработването на произведението на филтър на Хаар е построена Тьоплецова матрица с $n=5-65 \cdot 10^3$ като числените грешки на спектралния фактор ε_h и произведението на филтъра ε_p са изчислени чрез:

$$\begin{aligned} \varepsilon_h &= \|h(z) - h^{(n)}(z)\|_\infty \\ \varepsilon_p &= \|p(z) - h^{(n)}(z)h^{(n)}(z^{-1})\|_\infty, \end{aligned} \quad (5.4)$$

където $h^{(n)} = h_0^{(n)} + h_1^{(n)}z^{-1}$. Стойностите на грешките в **табл. 5.1 (Приложение 2)** показват силното влияние на двукратната нула (**фиг. 5.1**).



Фиг. 5.1 Влияние големината n на Тьоплецовата матрица върху точността на по метода на Бауер за скалярно спектрално разлагане за произведение на филтъра на Хаар в *log* формат: Грешки на спектралния фактор ε_h (син цвят) и грешки на филтъра произведение ε_p (червен цвят);

5.1.2 Експериментално изследване на класическия метод на Бауер за скалярно спектрално разлагане (мащабираща функция на Добеши 4)

Произведението на филтър на Добеши 4 е сингулярен скаларен пара-Ермитов полином с четворна нула на единичната окръжност ($z = -1$) на степен на степен $k = 3$:

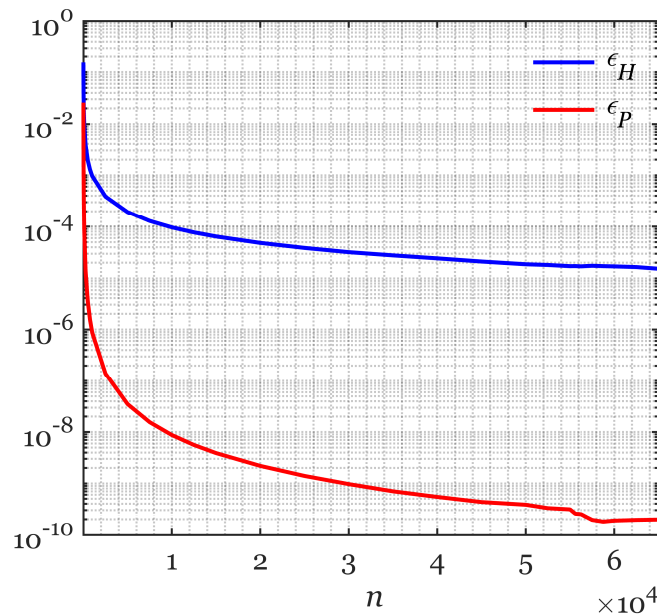
$$\begin{aligned}
p(z) &= h(z)h(z^{-1}) \\
&= \frac{1}{16}(-z^{-3} + 9z^{-1} + 16 + 9z - z^3). \\
&= -\frac{(1+z)^4(z^2 - 4z + 1)}{16}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Спектралното разлагане води до добре известния минимално фазов *Добеши 4* филтър:

$$h(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}}[(1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})z^{-1} + (3 - \sqrt{3})z^{-2} + (1 - \sqrt{3})z^{-3}]. \tag{5.6}$$

Числените грешки получени за $n = 5 - 65 \cdot 10^3$ са дадени в **табл.5.2** (**Приложение 2**) и показани на **фиг. 5.2**. Резултатите показват силното влияние на четирикратната нула на единичната окръжност.

Минималната грешка на произведението на филтъра $\epsilon_P \approx 1.793 \times 10^{-10}$ е постиганата за $n=58750$, докато минималната грешка за спектралния фактор $\epsilon_H \approx 1.534 \times 10^{-5}$ е постиганата за $n=65000$.



Фиг. 5.2 Влияние големината n на Тьоплецовата матрица върху точността на по метода на Бауер за скалярно спектрално разлагане за произведение на филтъра на *Добеши 4* в *log* формат: Грешки на спектралния фактор ϵ_H (син цвят) и грешки на филтъра произведение ϵ_P (червен цвят);

5.1.3 Експериментално изследване на класическия метод на Бауер за матрично спектрално разлагане (мултимащабираща функция на Алперт)

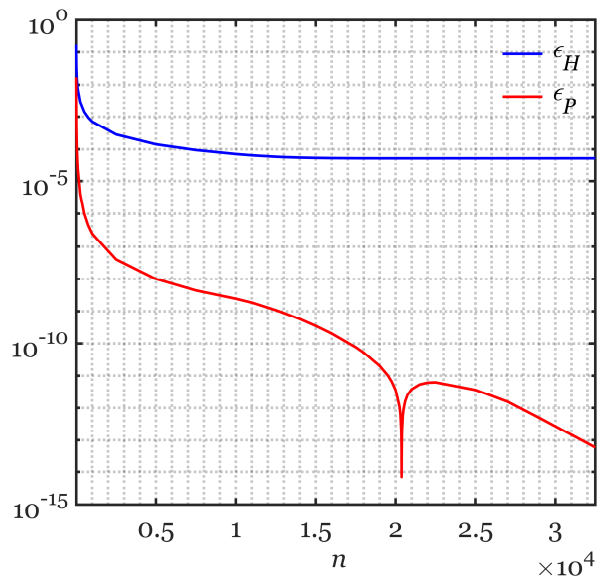
Произведението на матричен филтър на Алперт е сингулярния пара-Ермитов полином $P(z) \in C^{2 \times 2}[z, z^{-1}]$ с четирикратна нула на единичната окръжност и степен $k = 1$:

$$P(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} z, \quad (5.7)$$

Спектралното разлагане е изследвано за $n = 5-32.5 \times 10^3$. Грешките на произведението на филтъра и спектралния фактор са оценени чрез

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \| P(z) - H^{(n)}(z)H^{(n)T}(z^{-1}) \|_\infty \\ \varepsilon_H &= \| H(z) - H^{(n)}(z) \|_\infty \end{aligned} \quad (5.8)$$

където $H^{(n)}(z) = H_0^{(n)} + H_1^{(n)}z^{-1}$. Стойностите на ε_H и ε_p са дадени **табл. 5.3 (Приложение 2)** и показани на **фиг.5.3** *loglog* формат. Грешката на произведението на матричния филтър намалява с пик на $n=20375$ до стойност $\varepsilon_p \approx 0.699 \times 10^{-15}$, след което се увеличава до $\varepsilon_p = 6.19879 \times 10^{-12}$ за $n=22500$ отново намалява до $\varepsilon_p \approx 0.5967 \times 10^{-15}$ за $n=32500$.



Фиг. 5.3 Влияние размерността n на Тьоплецова матрица върху точноста на матричното спектрално разлагане по метода на Бауер (в *log* формат): Грешки на спектралния фактор ε_h (син цвят) и грешки на произведението на филтъра ε_p (червен цвят);

5.1.4 Експериментално изследване на БМБ

5.1.4.1 Скаларно спектрално разлагане

А) Мащабираща функция на Хаар

Произведението на филтъра на Хаар (5.1) води до нелинейното уравнение

$$\begin{aligned} x &= p_0 - p^2 x^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} x^{-1} \end{aligned} \quad (5.9)$$

с $x = \frac{1}{2}$. Първият скаларен коефициент се намира от Холески разлагане на $x = h_0^2$:

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.11)$$

Следователно, втория скаларен коефициент е

$$h_1 = p_1 h_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.12)$$

Очевидно, БМБ е прост и елегантен метод за спектрално разлагане с точни стойности на спектралния фактор.

А) Мащабираща функция на Добеши 4

Произведението на филтъра на Добеши 4 е

$$p(z) = -\frac{1}{16}z^{-3} + \frac{9}{16}z^{-1} + 1 + \frac{9}{16}z - \frac{1}{16}z^3. \quad (5.13)$$

Чрез пренареждане на коефициентите на два матрични коефициента се намалява основата на произведението:

$$p(z) = \tilde{p}_1 z^{-1} + \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 z \quad (5.14)$$

където $\tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_0 & p_1 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}$ и $\tilde{p}_1 = \begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_3 & p_2 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$ и се построява НМУ:

$$\tilde{X} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 9 & 1 & 9 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 9 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{X}^{-1} \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

чието решение е:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 0.062250719060187 & 0.556204296277484 & 0.003051789742809 \\ 0.556204296277484 & 0.063143246787321 & 0.618446962448601 \\ 0.003051789742809 & 0.618446962448601 & 0.027157887305668 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Тъй като решението е неположително определена матрица е невъзможно прилагането на Холески разлагане. Следователно, БМБ не гарантира намиране на спектрален фактор.

5.1.4.2 Приложения на БМБ за спектрално разлагане

(А) Чрез прилагане на Алгоритъм 2

Бързият и точния метод на Бауер са изследвани за седем примери - шест сингулярни или несингулярни произведения на матрични полиноми, и един пример на произведение на скаларен филтър (табл. 5.4). Всички спектрални фактори са получени с точни стойности.

Таблица 5.4

Характеристики на произведенията на филтрите– сингулярност и нули на единичната окръжност за примери 1–7

Пример	Сингулярност	Нули на единичната окръжност
1	Не	Няма
2	Да	Две двойни ($z = -1$)
3	Да	Две двойни ($z = \pm 1$)
4	Да	Четирикратна ($z = -1$)
5	Да	Четирикратна ($z = -1$)
6	Да	Четирикратна ($z = -1$)
7	Да	Десетократна ($z = -1$)

В един от примерите е разработен нов ортогонален суперкомпакт мултифилтър с по–добра Соболева гладкост $S_{SUP} = 1.28$ отколкото СЛ мултифилтър $S_{SUP} = 1.06$. Грешките на мащабираща функция и произведение на филтъра се изчисляват с:

$$\begin{aligned} \varepsilon_H &= \| C_0 - C_0^{(n)} \| \\ \varepsilon_P &= \| P_0 - C_0^{(n)} [C_0^{(n)}]^T - C_1^{(n)} [C_1^{(n)}]^T \|. \end{aligned}$$

Пример 1: Произведение на несингулярен филтър

Несингулярният пара–Ермитов матричен полином [95]:

$$P(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} z^{-2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^2$$

е с детерминанта $\det P(z) = \frac{(2z-1)(2-z)}{z}$ и корени $\frac{1}{2}, 2$. Намаляването на основата

на полинома води до НМУ с 4×4 матрици \hat{P}_0 и \hat{P}_1 чието решение е

$$X = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 145 & 8 & -34 \\ -2 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & -34 & 0 & 153 \end{bmatrix}.$$

Прилагайки същите стъпки както за предните спектрални разлагания е получен матричният спектрален фактор с точни коефициенти:

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 17 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} z^{-1} + \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^{-2}.$$

Пример 2: Мащабираща функция на Хаар (Ненормализирана)

Произведението на филтър на Хаар е пара–Ермитов скаларен полином:

$$P(z) = z^{-1} + 2 + z = (1+z)(1+z^{-1}) = \frac{(1+z)^2}{z}$$

с двойна нула на $z=-1$. Тъй като решението на НМУ е $X = 1$, спектралния фактор е ненормализирана мащабираща функция на Хаар:

$$H(z) = 1 + z^{-1}.$$

Пример 3: Сингулярен матричен полином

Сингулярния пара–Ермитов матричен полином [61]

$$P(z) = \begin{bmatrix} 6 & 22 \\ 22 & 84 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 38 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 22 \\ 22 & 84 \end{bmatrix} z$$

с $\det P(z) = -\frac{(z+1)^2(z-1)^2}{z^2}$ и две двойни нули $z = \pm 1$. Решението на НМУ

$X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{bmatrix}$ води до матричния спектрален фактор с точни стойности:

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} z.$$

Пример 4: Целочислен мултифилтър [32]

Произведението на целочислен матричен филтър е пара– Ермитовия матричен полином:

$$P(z) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} z$$

с $\det P(z) = \frac{(1+z^{-1})^4}{8z^2}$ и четирикратна нула. Решението $X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ води до

ортогоналната мултимащабираща функция:

$$H(z) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

Целочисленната мултимащабираща функция се получава чрез произведение с матрицата $C = \text{diag}(\sqrt{2}, 1)$ [89]:

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} z^{-1}$$

Следователно, допълващата целочисленната мултиуейвлетна функция е:

$$G(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} z^{-1}.$$

Пример 5: Нови суперкомпактни мултифилтри [90]

Произведение на матричния CL (Чуи – Лиан) филтър

$$P_{CL}(z) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 1 + \sqrt{7} \\ -(1 + \sqrt{7}) & -\sqrt{7} \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & -(1 + \sqrt{7}) \\ \sqrt{7} + 1 & -\sqrt{7} \end{bmatrix} z$$

е с $\det P_{CL}(z) = \frac{(4 - \sqrt{7})(1 + z)^4}{32z^2}$ и четирикратна нула. То е получено от CL

мултимащабираща функция в [35]:

$$H_{CL} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2 + \sqrt{7}}{4} \\ 0 & \frac{2 - \sqrt{7}}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} \frac{2 - \sqrt{7}}{4} & 0 \\ \frac{2 + \sqrt{7}}{4} & 0 \end{bmatrix} z^{-2}.$$

Решението НМУ за P_{CL} е несингулярна матрица $X = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{7} + 1 \\ \sqrt{7} + 1 & 4 \end{bmatrix}$. Първият

коэффициент е получен чрез Холески разлагане на X (*Приложение 3*).

$$C_0 = \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{7} + 1 & \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} \end{bmatrix}.$$

Тъй като стойността $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$ може да се представи с два различни множителя:

$$\begin{aligned} \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} &= \sqrt{(1 - \sqrt{7})^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} - 1)} = \sqrt{(1 - \sqrt{7})(1 - \sqrt{7})} \end{aligned}$$

тогава получените ортогонални мултимащабиращи функции са две:

$$(M1) \ (\sqrt{7} - 1): \ H(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{7} + 1 & \sqrt{7} - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -\sqrt{7} - 1 & \sqrt{7} - 1 \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

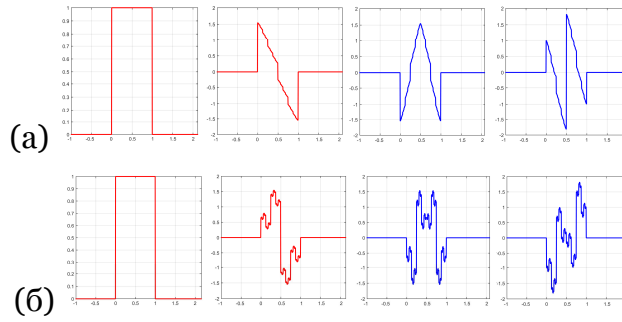
$$(M2) \ (1 - \sqrt{7}): \ H(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{7} + 1 & -(1 - \sqrt{7}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -\sqrt{7} - 1 & -(\sqrt{7} - 1) \end{bmatrix} z^{-1} \right)$$

като допълващите ортогонални мултиуейвлетни функции са:

$$(M1) \quad G(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -(1 - \sqrt{7}) & 1 + \sqrt{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 - \sqrt{7} & 1 + \sqrt{7} \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

$$(M2) \quad G(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -(1 - \sqrt{7}) & -(1 + \sqrt{7}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 - \sqrt{7} & -(1 + \sqrt{7}) \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

На **фиг. 5.4** са показани новите два мултимащабиращи и мултиуейвлетни функции.



Фиг.5.4 Авторски ортогонални суперкомпактни мултимащабираци $\Phi(t) = [\phi_0, \phi_1]^T$ (червено) и мултиуейвлетни функции $\Psi(t) = [\psi_0, \psi_1]^T$ (синьо) (а) (M1); (б) (M2);

Пример 6: Мултимащабираща функция на Алперт

Произведението на сингулярния матричен филтър на Алперт е пара-Ермитовия полином

$$P(z) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} z$$

с $\det P(z) = \frac{z^2(1+z)^4}{16}$ и четирикратна нула. Решението на НМУ, $X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$

чрез Холески разлагане води първия матричен коефициент:

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Вторият матричен коефициент:

$$C_1 = P_1 C_0^{-T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Пример 7: (Лежандър полином на степен 5)

Произведението на матричен филтър от Лежандър полином на степен 5 е сингулярния пара-Ермитов матричен полином:

$$P(z) = P_0 + P_1 z^{-1},$$

където $P_0 = I$, $P_1 = \frac{1}{256} \begin{bmatrix} 128 & 64\sqrt{3} & 0 & -16\sqrt{7} & 0 \\ -64\sqrt{3} & -64 & 16\sqrt{15} & 16\sqrt{21} & -8\sqrt{3} \\ 0 & -16\sqrt{15} & -112 & -8\sqrt{15} & 24\sqrt{5} \\ -64\sqrt{7} & 16\sqrt{21} & 8\sqrt{35} & -40 & -39\sqrt{7} \\ 0 & 8\sqrt{3} & 24\sqrt{5} & 39\sqrt{7} & 53 \end{bmatrix}$, детерминанта

$\det P(z) = \frac{(z+1)^{10}}{z^5 2^{25}}$ и десеткратна нула на единичната окръжност. Решението на НМУ

$$X = \frac{1}{256} \begin{bmatrix} 128 & -64\sqrt{3} & 0 & 16\sqrt{7} & 0 \\ -64\sqrt{3} & 128 & -16\sqrt{15} & 0 & 8\sqrt{3} \\ 0 & -16\sqrt{15} & 128 & -16\sqrt{15} & 0 \\ 16\sqrt{7} & 0 & -16\sqrt{35} & 128 & -21\sqrt{7} \\ 0 & 8\sqrt{3} & 0 & -21\sqrt{7} & 128 \end{bmatrix}$$

води до ортогоналната мултимащабираща функция

$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{32} \left(\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3} & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\sqrt{15} & 4 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 2\sqrt{21} & -2\sqrt{35} & 2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 6\sqrt{5} & 3\sqrt{7} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8\sqrt{3} & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{15} & 4 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{7} & 2\sqrt{21} & 2\sqrt{35} & 2 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 6\sqrt{5} & -3\sqrt{7} & 1 \end{bmatrix} z^{-1} \right)$$

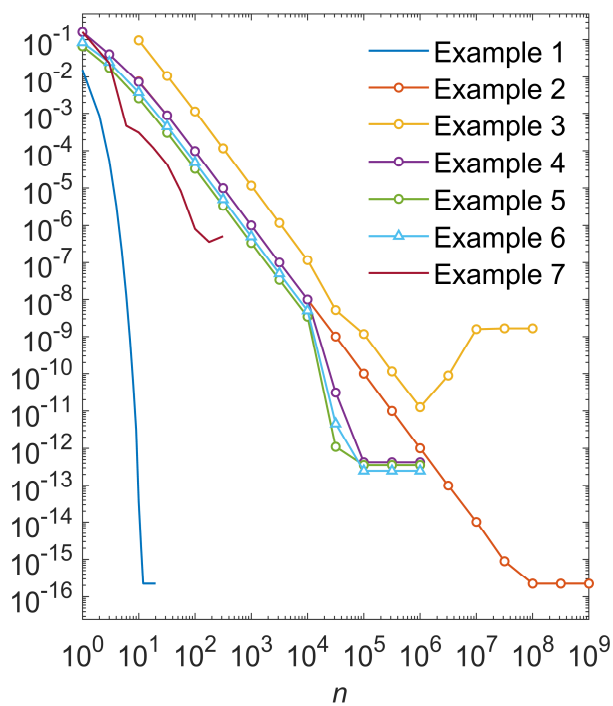
Численните грешки получени от 'Алгоритъм 1' за БМБ по метода на неподвижната точка и метода на Нютон за производението на филтър ε_p и спектралния фактор ε_H за **примери 1–7** са показани на **фиг.5.5** и **фиг.5.6** с изчислителна сложност за двата численни метода на **табл.5.5**. Резултатите и за двата метода показват че сходимоста е подлинейна.

Относно броя на итерации за разлагане на сингулярни скаларни или матрични пара-Ермитови полиноми, метода на Нютон изисква няколко, докато метода на неподвижната точка изисква минимум няколко хиляди.

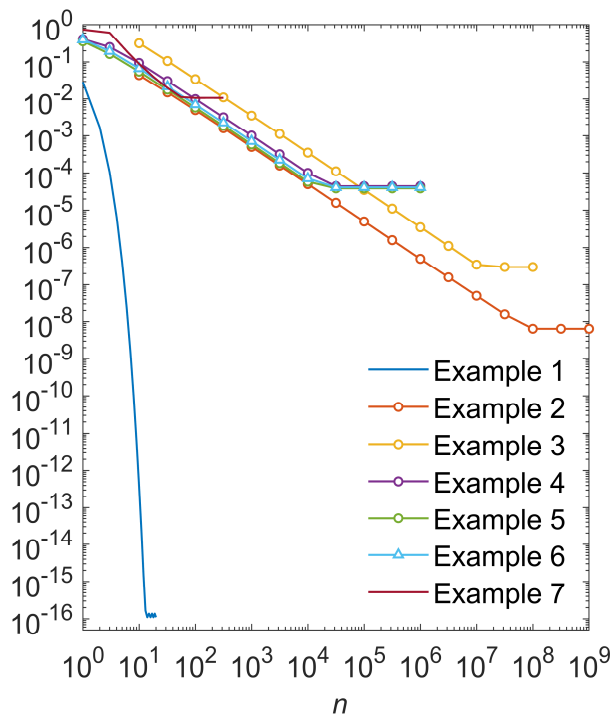
Таблица 5.5

Изчислителна сложност на БМБ за m - степенно произведение на филтър с $r \times r$ матрични коефициенти чрез метода на неподвижната точка и метода на Нютон

Метод	Изчислителна сложност	Итерации
Метод на неподвижната точка	$O((mn)^3)$	Хиляди (не по – малко 5×10^3)
Метод на Нютон	$O((mn)^6)$	Няколко (по – малко от 50)

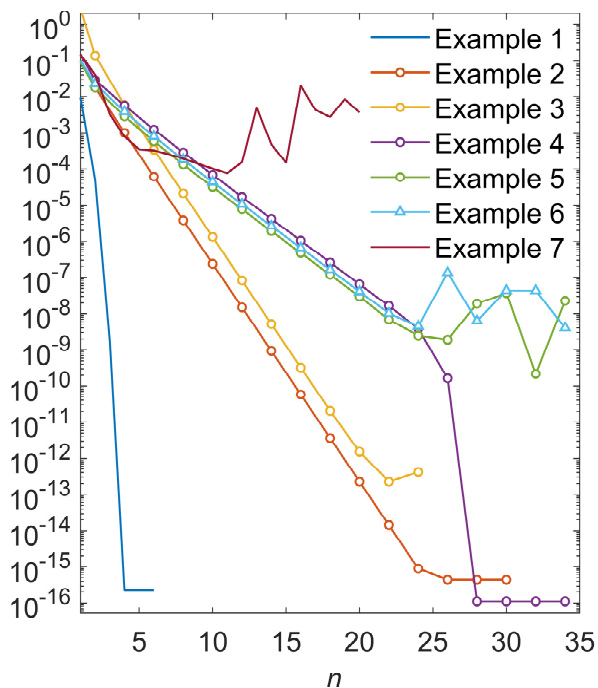


(a)

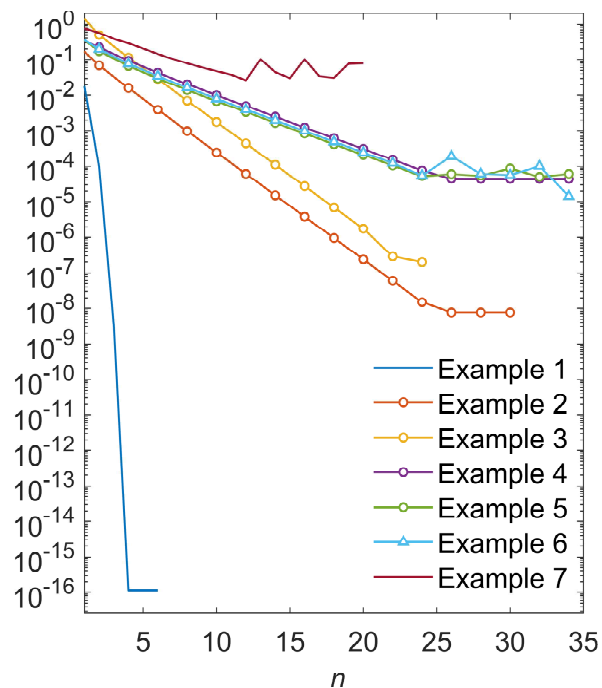


(b)

Фиг. 5.5. Численни грешки на БМБ по *метод на неподвижната точка* за скалярно и матрично спектрално разлагане в *log-log* формат; (a) ε_p на филтър на произведение; (b) ε_H на спектралния фактор;



(a)



(b)

Фиг. 5.6. Численни грешки на БМБ по *метод на Нютон* за скалярно и матрично спектрално разлагане в *semi-log* формат; (a) ε_p на филтър на произведение; (b) ε_H на спектралния фактор;

Б) Чрез използване на вградени софтуерни функции

Бързият и точния метод на Бауер са изследвани за седем примери за решаване на НМУ чрез *обобщеното дискретно алгебрично уравнение на Рикати* (ОДАУР). Използвани са вградените софтуерни функции за символно пресмятане в *Maple* ('*dare*') и *Matlab* ('*dare*' и '*idare*').

Maple - Численните грешки от *Maple* (табл.5.6) показват, че спектрално разлагане с висока точност се постигна единствено за несингулярен матричен полином ($\sim 10^{11}$) (Пример 1). В случай на сингулярни пара-Ермитови матрични полиноми с многократни нули на единичната окръжност точността е $\sim 10^4$ (Примери 4-7), а случай с двойни нули или различни знаци (т.е. $z=\pm 1$, Пример 3) решението на НМУ е с неправилни стойности. Следователно, използване на вградената функция ('*dare*') в *Maple* е непрепоръчително.

Matlab - Численните грешки от *Matlab* (табл. 5.7) показват по-добра точност в R2018a, където се решават примери 1-6 като точността е по-добра от от *Maple*. Единствено за пример 7 точността е по – ниска от *Maple*.

Таблица 5.6

Численни грешки ε_X , ε_H , и ε_P получени при използване на вградената '*dare*' функция за Maple 17 за примери 1–7

Примери	ε_X	ε_H	ε_P
1	2.35e-11	7.01e-11	3.29e-9
	$p_0 = 2, p_1 = 1$		
2	1.22e-8	6.10e-9	0
	$p_0 = 1, p_1 = 1/2$		
	6.10e-9	4.50e-9	5.55e-17
3	Некоректно решение на X		
4	5.95e-4	5.95e-4	6.59e-10
5	1.69e-4	2.90e-4	6.59e-10
6	2.20e-4	5.95e-4	2.64e-10
7	2.61e-3	4.41e-2	7.82e-3

Таблица 5.7

Численни грешки ε_x , ε_H , и ε_p за примери 1–7 получени при използване на вградените функции ('dare' и 'idare') за 14 версии на Matlab

Matlab версия	Пример	ε_x	ε_H	ε_p	
R2011a (DARE) R2012a (DARE)	1	1.78e-15	5.55e-17	5.90e-16 6.11e-16 (R2011a)	
	2	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions, Report = -1* ----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$			
	3	4.95e-09	3.50e-09	0	
	4	1.49e-06	8.31e-07	5.68e-14	
	5	No solutions. Report = -1*			
	6	No solutions. Report = -1*			
	7	0.00105	0.0137	1.09e-10	
	R2015a (DARE) R2016a (DARE)	1	1.78e-15	5.55e-17	4.44e-16
		2	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No Solutions. Report = -1* $p_0 = 1, p_1 = 1/2$		
		3	4.95e-09	3.50e-09	0
		4	1.49e-06	8.31e-07	5.69e-14
		5	No Solutions. Report = -1*		
		6			
		7	0.00111 (R2016a)	0.0147 (R2016a)	1.53e-11 (R2016a)
R2018a (DARE)	1	7.11e-15	4.16e-17	1.78e-15	
	2	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions, Report = -1* ----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$			
	3	7.00e-09	4.95e-09	5.55e-17	
	4	1.56e-06	7.98e-07	9.95e-14	
	5	5.45e-05	5.45e-05	8.88e-16	
	6	3.58e-05	6.16e-05	6.66e-14	
	7	4.32e-05	6.12e-05	4.44e-16	
	7	0.00108	0.01418	1.978e-11	

Таблица 5.7 (Продължение)

Matlab версия	Пример	ε_x	ε_H	ε_P
	1	3.55e-15	1.11e-16	3.55e-15
	2	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions. Report = -1* ----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$		
R2019a (IDARE)	2	5.55e-09	3.92e-09	0
R2019b (IDARE)	2	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions. Report = 3** ----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$ No solutions. Report = 3**		
R2020a (IDARE)	3	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions. Report = 3** ----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$ No solutions. Report = 3**		
R2020b (IDARE)	4	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions. Report = 3** ----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$ No solutions. Report = 3**		
R2021a (IDARE)	5	4.45e-05	7.64e-05	2.29e-13
R2021b (IDARE)	6	4.33e-05	6.12e-05	8.88e-16
R2022a (IDARE)	7	0.00101	0.0131	9.50e-11 (R2022a,b) 1.46e-10
R2022b (IDARE)	7	0.00101	0.0131	9.50e-11 (R2022a,b) 1.46e-10
	1	5.33e-15	8.88e-16	3.55e-15
	2	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions. Report = 3** ----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$ No solutions. Report = 3**		
R2021a	3	8.54e-07	6.44e-07	1.56e-13
Update 4 (IDARE)	4	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions. Report = 3** ----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$ No solutions. Report = 3**		
	5	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions. Report = 3** ----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$ No solutions. Report = 3**		
	6	4.73e-05	6.69e-05	8.88e-16
	7	9.87e-04	0.01277253	2.97e-10

Легенда:

*Report -1 – Когато свързваща симплектична матрица има собствени стойности на или много близо до единичната окръжност.

**Report 3 – Решение не е намерено тъй като симплектичния спектър има собствени стойности на единичната окръжност.

5.1.5 Сравнителен анализ на методите на Бауер

Както бе споменато в предишните глави главен недостатък на класическия *метод на Бауер* е необходимостта от Холески разлагането на Тьоплецова матрица с големи размери (*повече от $n = 65 \times 10^3$*). Това е породено от факта, че спектралното разлагане е приложено върху произведения на филтри с кратни и/или многократни нули на единичната окръжност.

Нещо повече, спектрален фактор може да бъде с приближени стойности (*грешката на мащабираща функция на Добеши 4 е $\varepsilon_H \approx 10^{-5}$* , мултимащабираща функция

на Алперт $\varepsilon_H \approx 10^{-6}$), а в някои случаи дори невъзможно (ГНМ мултимасцабираща функция).

Главните *предимства* на БМБ е избягване от построяване на Тъоплецова матрица и получаване на спектралния фактор с точни стойности.

Главен *недостатък* на БМБ е подлинейната сходимост при разлагане на пара – Ермитови полиноми с кратни и/или многократни нули, което не гарантира получаването на спектрален фактор (произведение на *Добещи 4* функция).

5.2 Приложение на ортогонални мултифилтърни банки

5.2.1 Разработване и приложение на лифтинг схема за филтър на Алперт. Диадична апроксимация на $\sqrt{3}$ за 2D сигнали

При разработването на хардуерна реализация на мултифилтър е необходимо входния сигнал да се преобразува във векторен както и филтърните коефициенти да бъдат кватувани, т.е. да бъде направена диадична апроксимация. Подходяща структура за реализация на мултифилтър е лифтинг схемата [134]. Тя е разработена за построяване на мултифилтър на Алперт от автора за пръв път в [89].

Лифтинг схемата на анализиращата част с входен вектор $x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ се описва чрез уравненията:

$$\begin{aligned} y_0 &= t_0 \\ y_1 &= t_1 \\ y_2 &= -\frac{1}{2}t_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}t_1 + t_2 \\ y_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}t_0 + \frac{1}{2}t_1 - \sqrt{3}t_2 + t_3 \end{aligned} \quad , \quad \text{където} \quad \begin{aligned} t_0 &= x_0 + x_2 \\ t_1 &= x_1 - x_3 \\ t_2 &= x_2 + \sqrt{3}x_3 \\ t_3 &= 4x_3 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Лифтинг схемата за възстановяващата част с изходен вектор $\hat{x} = \{\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$ се описва чрез уравненията:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= t_0 - \hat{x}_2 \\ \hat{x}_1 &= t_1 + \hat{x}_3 \\ \hat{x}_2 &= t_2 - \sqrt{3}\hat{x}_3 \\ \hat{x}_3 &= \frac{t_3}{4} \end{aligned} \quad , \quad \text{където} \quad \begin{aligned} t_0 &= y_0 \\ t_1 &= y_1 \\ t_2 &= y_2 + \frac{1}{2}t_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}t_1 \\ t_3 &= y_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}t_0 + \frac{1}{2}t_1 + \sqrt{3}t_2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Коефициентът $\sqrt{3}$ е квантуван с 2–и и 3–бита като диадична апроксимация ($\sqrt{3}=a/b$), чиито абсолютни грешки са показани на **табл. 5.8**. Стойностите на пиково сигнал/шум ниво (*ПСШН*) получени за изображение с ниво на сиво 'Lena' с големина 256×256 пиксела без обработка на **табл. 5.9**. Възстановените изображения (**фиг.5.7** и **фиг.5.8**) показват, че 2–битово квантуване на $\sqrt{3}$ води нежелани квадратни ефекти по контурите,

мрежеста структура в изображенията за нива на разлагане $J > 1$ с небалансирана филтърна банка (фиг.5.7) и $J \geq 4$ с балансирана мултифилтърна банка (фиг.5.8).

Според фиг. 5.9 и фиг. 5.10 3-битово квантуване на $\sqrt{3}$ е напълно достатъчно за избягване на нежелани ефекти и получаване на висококачествени възстановени изображения.

Таблица 5.8

Абсолютни грешки $\varepsilon_{(\bullet)} = |\sqrt{3} - a/b|$ за 2- и 3-битово квантуване на $\sqrt{3}$

Брой битове	$\sqrt{3}$	$\varepsilon_{(\bullet)}$
2	$3/2^1$	$\varepsilon_2 = 0.232050$
3	$7/2^2$	$\varepsilon_3 = 0.017949$

Таблица 5.9

ПСШН, dB за 2 и 3-битово квантуване на $\sqrt{3}$ в небалансирана и балансирана мултифилтърна банка на Алперт без обработка

Брой битове	Балансиран	Нива на разлагане			
		1	2	4	6
2 ($\sqrt{3} \approx 3/2$)	Не	∞	18.84	17.12	16.92
	Да	323.35	38.10	30.07	26.00
3 ($\sqrt{3} \approx 7/4$)	Не	∞	39.83	38.07	37.84
	Да	323.35	59.41	50.44	46.09



1 ниво, $ПСШН = \infty$



2 нива, $ПСШН = 18.84$ dB



4 нива, $ПСШН = 17.12$ dB



6 нива, $ПСШН = 16.92$ dB

Фиг. 5.7 Влияние нивата на разлагане $J=1 - 6$ в небалансирана мултифилтърна банка на Алперт без обработка с 2-битово квантуване на коефициента $\sqrt{3}(\sqrt{3} \approx 7/4)$



1 ниво, ПСШН = 323.35 dB



2 нива, ПСШН = 38.10 dB



4 нива, ПСШН = 30.07 dB



6 нива, ПСШН = 26.00 dB.

Фиг. 5.8 Влияние нивата на разлагане $J=1 - 6$ в балансирана мултифилтърна банка на Алперт без обработка с 2-битово квантуване на коефициента $\sqrt{3}(\sqrt{3} \approx 7/4)$



1 ниво, ПСШН = ∞



2 нива, ПСШН = 39.83dB



4 нива, ПСШН = 38.07 dB



6 нива, ПСШН = 37.84 dB.

Фиг. 5.9 Влияние нивата на разлагане $J=1-6$ в небалансирана мултифилтърна банка на Алперт без обработка с **3-битово** квантуване на коефициента $\sqrt{3}(\sqrt{3} \approx 7/4)$



1 ниво, ПСШН = 323.35 dB



2 нива, ПСШН = 59.41 dB



4 нива, ПСШН = 50.44 dB



6 нива, ПСШН = 46.09 dB

Фиг. 5.10 Влияние нивата на разлагане $J=1 - 6$ в балансирана мултифилтърна банка на Алперт без обработка с 3-битово квантуване на коефициента $\sqrt{3}(\sqrt{3} \approx 7/4)$

5.2.2 Сравнителен анализ на три ортогонални мултиуейвлтни филтри за обезшумяване на изображения с ниво на сиво

Обезшумяването е от най-честите обработки на сигнали. Това е процес на намаляване или отстраняване на адитивен бял Гаусов шум (АБГШ), $e \sim N(0, \sigma^2)$ към оригинален сигнал s и получаване на обезшумен сигнал \hat{s} . Запазване характеристиките на оригиналния сигнал изисква прилагане на подходяща техника за обезшумяване,

например, мултиуйвлетната трансформация Θ . Тя концентрира енергията на входния сигнал в няколко уйвлетни коефициента, а енергията на шума в подлентите, която е с Гаусово разпределение. Това дава възможност при зададен праг “мек” или “твърд” малките уйвлетни коефициенти да бъдат намалени или анулирани.

Мултиуйвлетна трансформация Θ с пре-филтър M и сигнал с шум $\tilde{S} = s + \varepsilon$ се описва с:

$$\Theta M \tilde{S} = \Theta M s + \Theta M \varepsilon. \quad (5.19)$$

чиято корелация между уйвлетните коефициенти с техните съседни чрез блокове Y_j е:

$$\tilde{\mathbf{d}}_k^j = \mathbf{d}_k^j + \mathbf{f}_k^j. \quad (5.20)$$

чрез скаларните стойности $\omega_k^j = \sqrt{(\tilde{\mathbf{d}}_k^j)^T Y_j^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_k^j}$ върху, които се прилагат [48]:

$$\begin{aligned} \text{➤ мек праг} \quad \tilde{\mathbf{d}}_k^j &= \begin{cases} \tilde{\mathbf{d}}_k^j \frac{\omega_k^j - \lambda}{\omega_k^j}, & \omega_k^j \geq \lambda \\ 0, & \omega_k^j < \lambda \end{cases} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \text{➤ твърд праг} \quad \tilde{\mathbf{d}}_k^j &= \begin{cases} \tilde{\mathbf{d}}_k^j, & \omega_k^j \geq \lambda \\ 0, & \omega_k^j < \lambda \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Обезшумяването с мек праг води до по-гладки контури и намален ефекта на псевдо-Гибс феномена. Обезшумяването с твърд праг запазва детайлните коефициентите на високите честоти, задържа по-добре локалните характеристики на контурите в изображението, и е удобен за шум с внезапни промени. Недостатък е появата на псевдо-Гибс феномен.

В това изследване са използвани три балансирани и небалансирани ортогонални мултифилтри: ГНМ, СЛ, и Алперт за обезшумяване на 7 изображения с ниво на сиво, с големина 256×256 пиксела и 512×512 пиксела, и АБГШ с дисперсия $\sigma = 10, 20$ за нива на разлагане $J = 5$ (фиг. 5.11 и фиг. 5.12).



Фиг. 5.11 Тестови изображения с ниво на сиво и големина 256×256 пиксела ('Lena', 'Couple', 'Lizard', 'Cameraman', 'House')



Фиг. 5.12 Тестови изображения с ниво на сиво и големина 512×512 пиксела ('Fountain', 'Kiel', 'House', 'Lizard')

Качеството на обезшумяването на изображение с големина $N \times N$ е получено чрез средно квадратичната грешка (СКГ) (mean square error)(MSE):

$$MSE = \frac{1}{N^2} \sum_{x,y=1}^N (f(x,y) - \tilde{f}(x,y))^2. \quad (5.23)$$

където $f(x,y)$ е оригиналното изображение, и $\tilde{f}(x,y)$ е обезшуменото.

Друга мярка в логаритмична скала е пиково сигнал/шум ниво (ПСШН) (*peak signal-to-noise ratio, PSNR*):

$$PSNR = 10 \log_{10}(255^2 / СКГ), \text{ dB}. \quad (5.24)$$

Стойностите на ПСШН за изображения с 256×256 пиксела и $\sigma = 10, 20$ са показани в табл. 5.10 и табл. 5.11, а за 512×512 пиксела в табл. 5.12 и табл. 5.13, като максималните стойности са отбелязани с удебелен шрифт. Стойностите в табл. 5.10 и табл. 5.11 показват, че въпреки по-късата си дължина и по-малкия коефициент на усилване (КУ), балансирания мултифилтър на Алперт постига по-добри ПСШН отколкото GNM и CL мултифилтри. Нещо повече, за изображение 'Lizard' балансирания и небалансирания мултифилтър на Алперт е с по-добри ПСШН.

Сравнявайки двата прага, с твърд праг най-висок ПСШН е получен за мултифилтър на Алперт, докато с мек праг – най-висок ПСШН с GNM мултифилтър.

Изображения с 512×512 пиксела и $\sigma=10$ обезшумени с небалансиран мултифилтър на Алперт показват по-добър ПСШН отколкото GNM и CL, както и за 'Kiel' по-добри ПСШН са получени с балансирания и небалансирания мултифилтър на Алперт (табл.5.12).

За изображения с 512×512 пиксела и $\sigma=20$ с балансирания мултифилтър на Алперт и твърд праг се постигат по-добри ПСШН отколкото GNM и CL, както и по-добри ПСШН за 'House' за двата прага (табл.5.13).

Таблица 5.10 [89]

Сравнителни резултати на *ПСШН*, dB на обезшумяваване на тестови изображения (256×256 пиксела) с адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) и дисперсия $\sigma = 10$ с приложен векторен праг на $J = 5$ нива на разлагане за 3 ортогонални мултифилтри (GHM, CL, Алперт). Максималните стойности са с удебелен шрифт.

Изобр.	Праг	Мулти - филтър	Нива на разлагане									
			1		2		3		4		5	
			Балансиран									
Не	Да	Не	Да	Не	Да	Не	Да	Не	Да	Не	Да	
Couple	Мек	GHM	25.79	28.48	24.96	28.12	23.64	27.83	24.51	27.71	24.47	27.67
		CL	24.49	28.52	23.26	28.00	22.98	27.71	22.91	27.61	22.89	27.57
		Alpert	24.20	28.59	23.00	28.04	22.70	27.80	22.63	27.70	22.61	27.67
	Твърд	GHM	28.11	28.48	27.88	29.36	27.83	29.34	27.81	29.34	27.81	29.34
		CL	28.13	29.42	28.07	29.53	28.01	29.52	28.00	29.52	28.00	29.52
		Alpert	28.12	29.42	28.09	29.54	28.03	29.54	28.02	29.53	28.01	29.53
Lizart	Мек	GHM	25.59	27.33	24.65	26.80	24.30	26.55	24.19	26.46	24.15	26.43
		CL	22.46	27.29	23.23	26.64	22.94	26.38	22.86	26.30	22.84	26.27
		Alpert	24.18	27.35	22.98	26.76	22.68	26.50	22.60	26.41	22.58	26.38
	Твърд	GHM	28.13	28.87	27.96	28.99	27.91	28.99	27.91	28.99	27.91	28.99
		CL	28.13	28.97	28.09	29.07	28.05	29.07	28.04	29.07	28.04	29.07
		Alpert	28.13	29.03	28.11	29.16	28.08	29.16	28.07	29.16	28.07	29.16
House	Мек	GHM	25.77	31.17	25.17	31.72	24.99	31.48	24.89	31.32	24.86	31.25
		CL	24.42	31.31	23.18	31.64	22.91	31.43	22.84	31.27	22.82	31.38
		Alpert	24.12	31.40	22.90	31.96	22.61	31.79	22.54	31.65	22.52	31.59
	Твърд	GHM	28.12	30.96	27.91	31.77	27.91	31.87	27.91	31.88	27.91	31.88
		CL	28.13	31.18	28.09	31.99	28.04	32.19	28.03	32.20	28.03	32.20
		Alpert	28.13	31.21	28.12	32.14	28.09	32.27	28.07	32.27	28.06	32.27
Camerman	Мек	GHM	26.20	29.62	25.42	29.56	25.17	29.33	25.06	29.20	25.02	29.16
		CL	24.80	29.71	23.64	29.53	23.36	29.29	23.28	29.17	23.26	29.13
		Alpert	24.58	29.78	23.41	29.66	23.11	29.45	23.02	29.34	23.00	29.30
	Твърд	GHM	28.31	30.15	28.11	30.62	28.08	30.70	28.07	30.70	28.07	30.70
		CL	28.02	30.36	28.00	30.88	27.95	30.97	27.95	30.97	27.95	30.97
		Alpert	28.00	30.39	27.98	30.94	27.95	31.04	27.94	31.04	27.94	31.04

Таблица 5.11

Сравнителни резултати на *ПСШН*, dB на обезшумяваване на тестови изображения (256×256 пиксела) с адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) и дисперсия $\sigma = 20$ с приложен векторен праг на $J = 5$ нива на разлагане за 3 ортогонални мултифилтри (GHM, CL, Алперт). Максималните стойности са с удебелен шрифт.

Изобр.	Праг	Мултифил.	Нива на разлагане									
			1		2		3		4		5	
			Балансиран									
		Не	Да	Не	Да	Не	Да	Не	Да	Не	Да	
Couple	Мек	GHM	20.91	24.52	20.55	24.79	20.27	24.52	20.13	24.35	20.07	24.28
		CL	18.78	24.60	17.71	24.71	17.47	24.43	17.41	24.28	17.39	24.21
		Alpert	18.52	24.68	17.40	24.80	17.15	24.51	17.08	24.36	17.06	24.30
	Твърд	GHM	22.04	24.39	21.99	24.87	21.93	24.86	21.91	24.86	21.91	24.86
		CL	22.09	24.48	21.79	24.93	21.74	24.94	21.73	24.94	21.73	24.94
		Alpert	22.08	24.53	21.91	25.00	21.84	25.02	21.83	25.01	21.83	25.01
Lizart	Мек	GHM	20.69	23.30	20.10	23.07	19.78	22.81	19.64	22.69	19.60	22.65
		CL	18.74	23.29	17.64	22.94	17.39	21.83	17.32	22.53	17.30	22.49
		Alpert	18.49	23.31	17.36	23.02	17.09	22.73	17.02	22.61	17.00	22.56
	Твърд	GHM	21.90	23.52	21.73	23.67	21.65	23.66	21.63	23.66	21.63	23.66
		CL	22.10	23.61	21.86	23.77	21.80	22.97	21.77	23.76	21.76	23.76
		Alpert	22.10	23.67	21.92	23.86	21.86	23.85	21.84	23.84	21.84	23.84
House	Мек	GHM	20.80	26.59	20.75	28.30	20.63	28.30	20.52	28.06	20.47	27.94
		CL	18.66	26.71	17.55	28.12	17.32	28.14	17.26	27.92	17.24	27.81
		Alpert	18.39	26.82	17.24	28.62	16.72	28.69	16.92	28.54	16.90	28.44
	Твърд	GHM	22.01	25.91	22.13	27.39	22.20	27.70	22.19	27.73	22.19	27.73
		CL	22.10	26.06	21.86	27.57	21.83	27.92	21.82	27.95	21.82	27.95
		Alpert	22.09	26.13	21.93	27.77	21.86	28.11	21.86	28.16	21.86	28.16
Camerman	Мек	GHM	21.16	25.36	20.93	26.07	20.73	25.90	20.60	25.73	20.55	25.66
		CL	19.23	25.44	18.17	26.02	17.92	25.83	17.85	25.65	17.83	25.60
		Alpert	19.02	25.47	17.90	26.13	17.63	25.98	17.55	25.84	17.53	25.78
	Твърд	GHM	22.42	25.09	22.47	25.96	22.50	26.12	22.49	26.13	22.49	26.13
		CL	22.21	25.25	22.09	26.18	22.07	26.33	22.07	26.35	22.07	26.34
		Alpert	22.24	25.31	22.21	26.29	22.16	26.47	22.15	26.49	22.15	26.49

Таблица 5.12 [89]

Сравнителни резултати на ПСШН, dB на обезшумяваване на тестови изображения (512×512 пиксела) с адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) и дисперсия $\sigma = 10$ с приложен векторен праг на $J = 5$ нива на разлагане за 3 ортогонални мултифилтри (GHM, CL, Алперт). Максималните стойности са с удебелен шрифт.

Изобр.	Праг	Мултифил.	Нива на разлагане									
			1		2		3		4		5	
			Балансиран									
		Не	Да	Не	Да	Не	Да	Не	Да	Не	Да	
Couple	Мек	GHM	25.97	30.49	25.13	30.27	24.81	29.83	24.69	29.66	24.65	29.61
		CL	24.25	30.63	23.02	30.10	22.74	29.68	22.66	29.52	22.64	29.48
		Alpert	23.95	30.54	22.73	30.08	22.42	29.69	22.34	29.55	22.32	29.50
	Твърд	GHM	28.00	30.71	27.72	31.14	27.67	31.19	27.66	31.20	27.66	31.20
		CL	28.13	30.92	27.98	31.37	27.88	31.42	27.86	31.43	27.86	31.43
		Alpert	28.12	30.87	29.00	31.32	27.95	31.37	27.93	31.38	27.93	31.38
Lizart	Мек	GHM	25.38	27.92	24.45	27.53	24.18	27.30	24.07	27.21	24.04	27.18
		CL	24.18	27.92	22.89	27.45	22.60	27.22	22.52	27.13	22.49	27.11
		Alpert	23.89	27.96	22.63	27.52	22.32	27.29	22.24	27.21	22.22	27.18
	Твърд	GHM	28.09	29.37	27.78	29.58	27.72	29.61	27.71	29.61	27.71	29.61
		CL	28.12	29.49	28.05	29.73	27.97	29.77	27.95	29.77	27.96	29.77
		Alpert	28.11	29.49	28.07	29.72	28.02	29.76	28.00	29.77	28.00	29.77
House	Мек	GHM	25.62	33.29	25.09	34.14	24.93	34.63	24.84	34.30	24.81	34.17
		CL	24.12	33.42	22.83	34.94	22.56	34.44	22.49	34.13	22.47	34.01
		Alpert	23.80	33.44	22.55	34.94	22.25	34.51	22.18	34.25	22.16	34.15
	Твърд	GHM	28.13	32.80	27.97	34.61	27.90	34.75	27.88	34.76	27.88	34.76
		CL	28.13	32.93	28.06	34.75	27.98	34.89	27.98	34.90	27.98	34.90
		Alpert	28.13	32.89	28.08	34.55	28.01	34.70	27.99	34.73	27.99	34.73

Таблица 5.13

Сравнителни резултати на *ПСШН*, dВ на обезшумяваване на тестови изображения (512×512 пиксела) с адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) и дисперсия $\sigma = 20$ с приложен векторен праг на 5 нива на разлагане за 3 ортогонални мултифилтри (GHM, CL, Алперт).
Максималните стойности са с удебелен шрифт.

Изобр.	Праг	Мултифил.	Нива на разлагане									
			1		2		3		4		5	
			Балансиран									
		Не	Да	Не	Да	Не	Да	Не	Да	Не	Да	
Couple	Мек	GHM	21.28	26.27	21.03	27.10	20.73	26.66	20.58	26.41	20.53	26.32
		CL	18.69	26.41	17.66	26.98	17.44	26.53	17.37	26.30	17.35	26.22
		Alpert	18.45	26.34	17.35	26.88	17.10	26.47	17.02	26.25	17.00	26.17
	Твърд	GHM	22.36	25.84	22.35	26.83	22.30	26.92	22.28	26.93	22.28	26.93
		CL	21.88	26.02	21.53	27.00	21.46	27.12	21.44	27.13	21.43	27.13
		Alpert	21.79	25.98	21.51	26.94	21.39	27.05	21.36	27.06	21.36	27.06
Lizart	Мек	GHM	19.93	23.84	19.71	23.63	19.71	23.63	19.59	23.51	19.55	23.47
		CL	17.30	23.79	17.05	23.57	17.05	23.57	16.98	23.46	16.95	23.42
		Alpert	17.01	23.84	16.73	23.61	16.73	23.61	16.66	23.50	16.64	23.46
	Твърд	GHM	21.97	24.79	21.93	24.85	21.92	24.85	21.91	24.85	21.91	24.85
		CL	21.86	24.95	21.80	25.01	21.80	25.01	21.77	25.03	21.77	25.03
		Alpert	21.90	24.97	21.80	25.04	21.91	25.04	21.79	25.05	21.79	25.05
House	Мек	GHM	20.79	27.69	20.87	31.16	20.79	31.33	20.71	30.99	20.67	30.80
		CL	18.40	27.80	17.26	30.99	17.04	30.12	16.98	30.79	16.97	30.61
		Alpert	18.11	27.92	16.94	31.23	16.69	31.44	16.62	31.18	16.60	31.02
	Твърд	GHM	21.98	27.18	22.16	29.97	22.21	30.52	22.21	30.59	22.21	30.59
		CL	22.07	27.27	21.80	30.04	21.75	30.63	21.73	30.69	21.72	30.70
		Alpert	22.05	27.33	21.80	30.09	21.71	30.68	21.70	30.75	21.70	30.77

5.2.3 Сравнителен анализ на ортогонални скаларни и векторни филтри за компресия на изображения от сканирани фотографски плаки

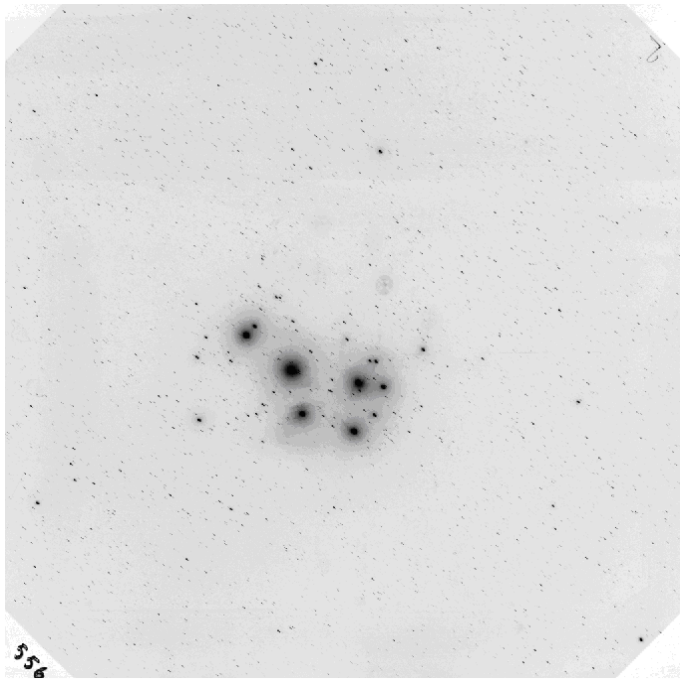
Чрез използване на скаларните филтърни банки на Хаар и Добеши 4 са построени векторните Хаар–подобен (Haar-like) и Добеши 4– подобен (Daubechies 4-like), които са приложени за компресия на астрономически изображения от сканирани фотографски плаки (СФП) [88]. Качеството на компресия е сравнено чрез СКГ и ПСШН.

Резултатите от компресия със скаларни филтърни банки на Хаар и Добеши 4, векторни на Хаар–и Добеши 4–подобен, и ГНМ мултиуейвлетни филтърни банки са показани на **фиг. 5.13** и **фиг. 5.14**. Компресия с добро качество е постигната с векторните Хаар– и Добеши 4–подобни филтърни банки. Изключително ефективна компресия е Хаар–подобна филтърна банка до 5 нива на разлагане за изображения със силно негладки области с равномерна интензивност (**фиг. 5.13(а)**).

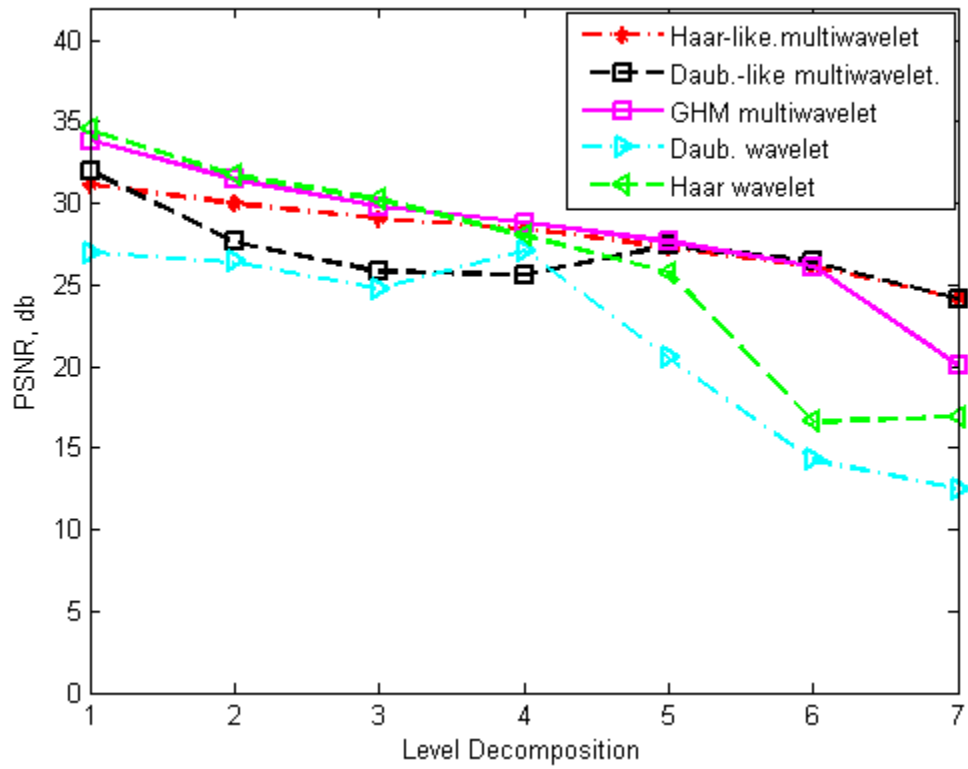
Недостатък на скаларната Добеши 4 филтърна банка е нейната зависимост от структурата на астрономическото изображение от СФП. Ако има концентрация в центъра на изображението от различни планети, галактики, плеяди, или много звезди, тогава компресираното изображение до 3 нива е с по – високо качество (**фиг. 5.13(а)** и **фиг. 5.14(а)**).

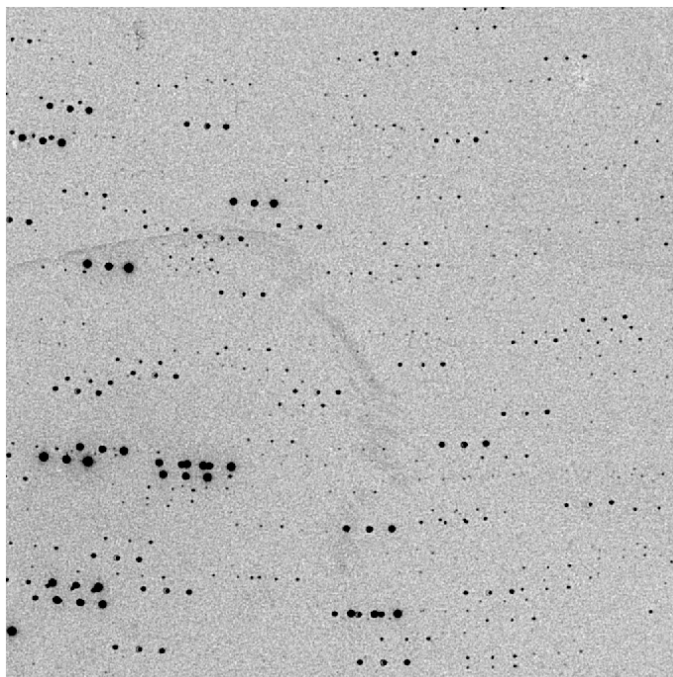
Ако в изображение има локални обекти с големи области на равномерна интензивност, подходящ избор за компресия са векторните Хаар – и Добеши 4– подобни филтърни банки (**фиг. 5.13(б)** и **фиг. 5.14(б)**).

В заключение, компресия на астрономически изображения от СФП чрез декорелация с мултифилтри зависи от пре- и пост-филтрацията, балансираността, дължината на мултифилтрите, и притежаването на добри мултифилтърни свойства.

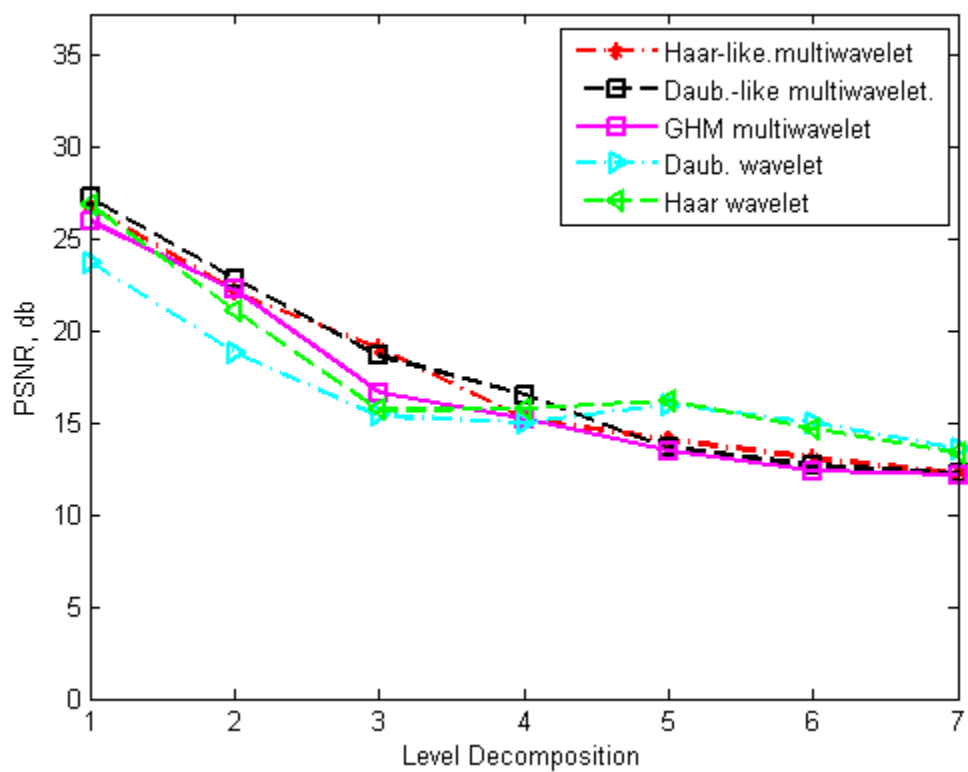


a) СФП No. M45-556p

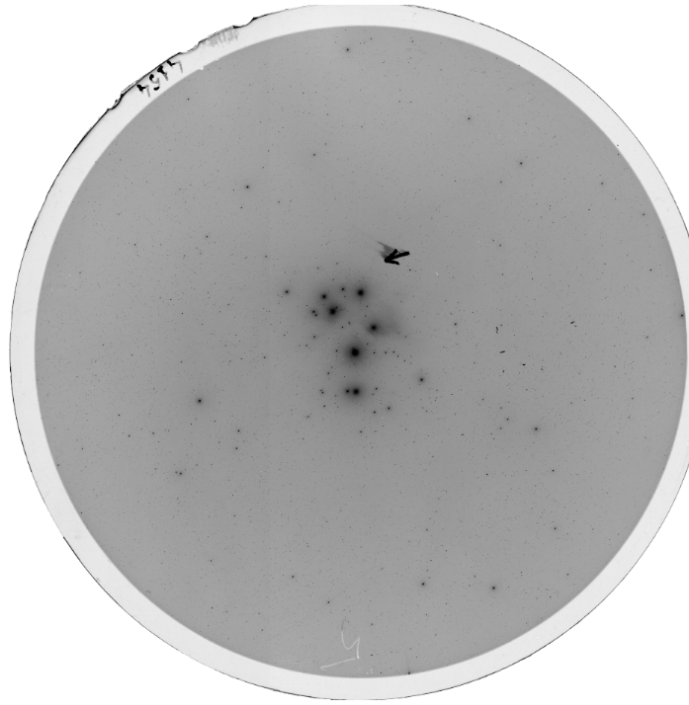




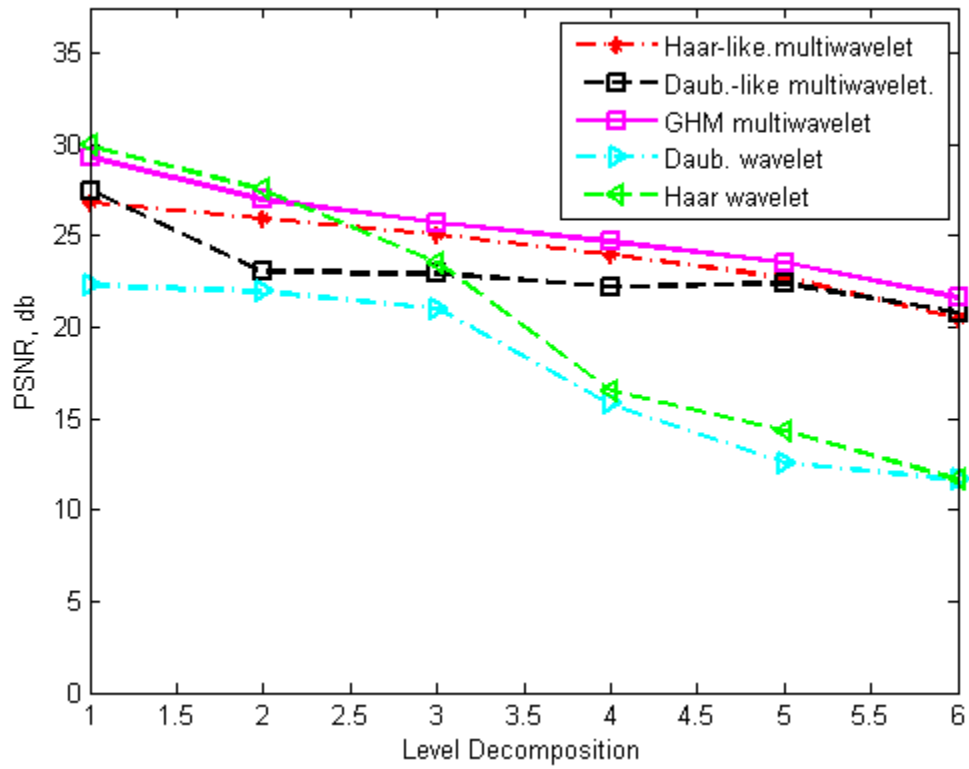
б) СФП No. BON034_001820

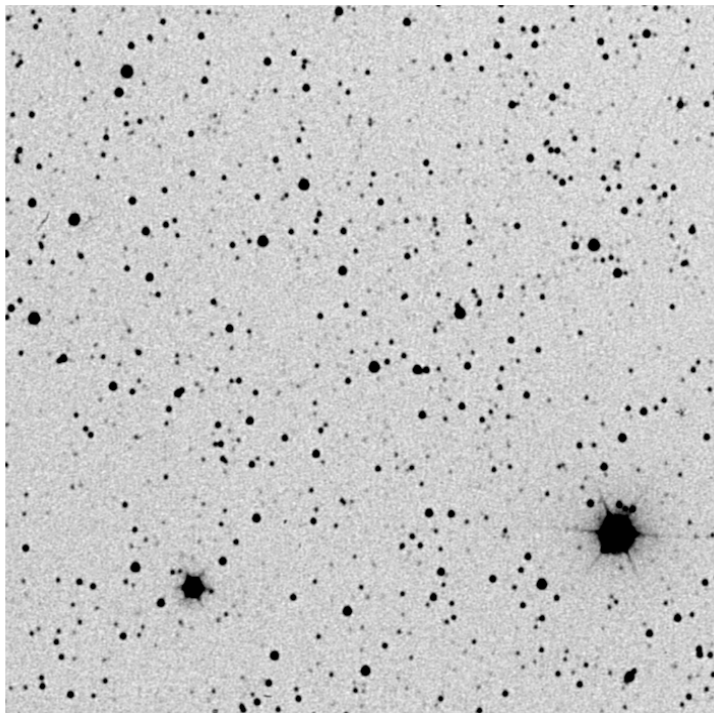


Фиг. 5.13 ПСНН за компресия на астрономически изображения от СФП за седем нива на разлагане (1024x1024 пиксела);

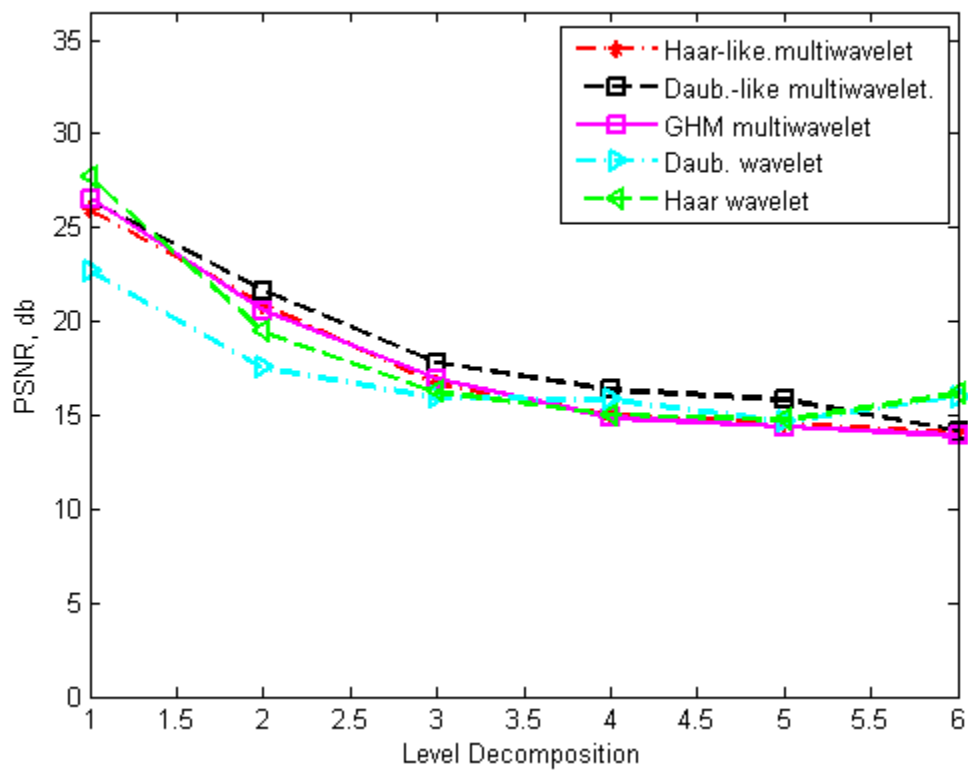


a) СФП No. M45-S40-4154p





б) СФП No. ADH5269



Фиг. 5.14 ПСНН за компресия на астрономически изображения от СФП за седем нива на разлагане (512x512 пиксела);

5.3 Експериментално изследване на модули без умножение за 5/3 филтърна банка реализирани върху препрограмируема интегрална схема

Авторските модули без умножение (Глава 1 и фиг. 1.11) са използвани за разработване на биортогонална 5/3 филтърна банка с перфектно възстановяване реализирана върху препрограмируема логическа интегрална схема (ПЛИС) (*Field programmable gate array* (FPGA)) на фирмата Xilinx от сериите Virtex и Spartan които имат интегриран софтуер за проектиране на цифров хардуер. ПЛИС имат сложна структура и голям брой логически елементи позволяващи *свръхголяма степен на интеграция* (*very large scale integration* (VLSI)) позволяващи разработване на многофункционални електронни схеми – процесори, цифрови устройства за паралелни изчисления, контролери, памети, входно-изходни модули и др. Главното им предимство е матричната структура с голям брой препрограмируеми логически блокове, лесното им свързване, и голямата гъвкавост за различни хардуерни реализации.

Едни от най-известните серии на Xilinx е Spartan чиято архитектура се състои от пет функционални елемента: входно-изходни блокове (*input-output block*), конфигурируеми логически блокове (*configurable logic block*), вградена блокова RAM памет, блок за цифрова обработка на сигнал (*digital signal processing*), и блок за цифрово управление такт (*digital clock manager*).

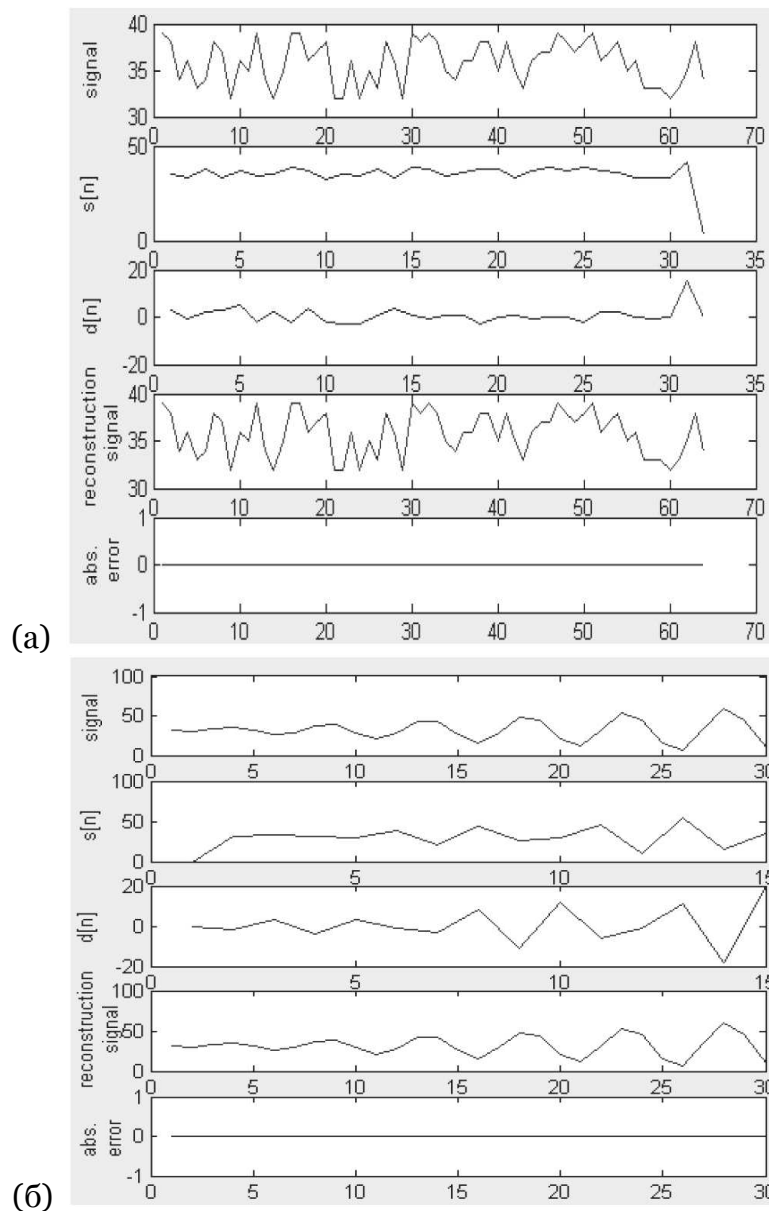
За професионални цели се използва серията Virtex чиято архитектура съдържа *модул с подобрена блокова архитектура* (*advanced silicon modular block* (ASMBL) architecture). Тази серия е предназначена за реализация на високоскоростни системи за цифрова обработка на сигнали.

За разработването на биортогоналната 5/3 филтърна банка, разположение (*placed*) елементите на модулите и трасиране (*routed*) на връзките между тях е използван програмата Xilinx Foundation ISE4.2i [153] на фирмата Xilinx и език за описание на хардуер за високоскоростни интегрални схеми (**V**ery-**H**igh-**S**peed **I**ntegrated **C**ircuit **H**ardware **D**escription **L**anguage (VHDL)). Програмата на фирмата Mentor Graphics, ModelSim XE5.6a [108] е използвана за симулации.

Хардуерните характеристики на модулите за анализ и възстановяване са показани на табл.5.14. Те са тествани за 5/3 филтърна банка с перфектно възстановяване за два сигнала с различни дължини за едно ниво на разлагане и възстановяване [85]. Грешките при възстановяване са нулеви константи, което доказва, че филтърната банка е перфектно възстановяваща (фиг.5.15).

Табл. 5.14 Хардуерни FPGA характеристики на модулите без умножение за анализ и възстановяване на 5/3 филтърна банка [85]

Модул Анализ	Модул Възстановяване
FPGA: Virtex E xcv200e-pq240-8	FPGA: Spartan2 xc2s150-fg256-6
# Work frequency (MHz):100 # Registers : 30 8-bit register : 30 # Adders/Subtractors : 5 8-bit subtractor: 1 8-bit adder: 4	# Work frequency (MHz) :100 # Registers : 21 9-bit register : 21 # Adders/Subtractors : 6 9-bit adder : 6



Фиг. 5.15 Приложение на 5/3 филтърна банка с авторските модули без умножение за едно ниво на разлагане и възстановяване с 8-битови тест сигнали: (а) 64 стойности; (б) 32 стойности;

5.4 Резултати и изводи

Представените в *Глава 5* резултати са следствие на изпълнението на изследователски задача 6 на дисертацията. Те показват, че *бързия метод на Бауер* за разлика от класическия намира скаларен (матричен) спектрален фактор с точни стойности без Холески разлагане на $n \times n$ Тьоплецова матрица с големи размери.

За избягване на нежелани дефекти при обработка на изображение с ниво на сиво с балансиран или небалансиран мултифилтър е напълно достатъчно 3-битово квантуване на коефициента $\sqrt{3}$.

При обезшумяване на тестови изображения с ниво на сиво балансирания мултифилтър на Алперт, въпреки по-късата си дължина и по-малкия КУ, постига по-високо *ПСШН* в сравнение с GNM и CL мултифилтри. Нещо повече, за 'Lizard' и балансирания и небалансирания мултифилтър на Алперт показва най-добри *ПСШН*.

Компресията на астрономически изображение на СФП чрез скаларната филтърна банка на Добеши 4 води нисък *ПСШН* поради зависимостта от структурата на цялото изображение.

Компресията с Хаар – подобен (Haar - like) и Добеши – подобен (Daubechies - like) мултифилтърни банки постигат по-високи *ПСШН* за астрономически изображение на СФП с равномерна интензивност и съдържащи локални обекти с големи области.

Глава 5 е посветена на:

- (1) Разработване мащабиращите функции на Хаар, Добеши 4, и мултимащабираща функция на Алперт чрез четирите метода;
- (2) Експериментално изследване на бързия и точен метод на Бауер за скаларно и векторно спектрално разлагане - мащабираща функция на Хаар и Добеши 4;
- (3) Експериментално изследване на точен метод на БМБ за спектрално разлагане за седем произведения на филтри чрез прилагане на Алгоритъм 2;
- (4) Експериментално изследване на БМБ за спектрално разлагане върху седем произведения на филтри чрез използване на вградени софтуерни функции;
- (5) Експериментално изследване на лифтинг схемата на мултифилтър на Алперт с 2- и 3-битово квантуване на коефициента $\sqrt{3}$ за изображение с ниво на сиво;
- (6) Експериментално изследване на компресията на астрономически изображения от СКФ чрез скаларни и векторни ортогонални филтърни банки;
- (7) Експериментално изследване на модулите без умножение реализирани върху препрограмируема интегрална схеми на фирмата Xilinx от сериите Virtex и Spartan за биортогонална $5/3$ филтърна банка с перфектно възстановяване;

Научно – приложни резултати, получени при изпълнение на задача 6:

1. Разработени са два нови авторски суперкомпактни ортогонални мултифилтри [т.5.1.4.2(A)].
2. Разработена и изследвана е авторска лифтинг схема на мултифилтъра на Алперт с 2- и 3-битово квантуване на $\sqrt{3}$ за изображение с ниво на сиво [т.5.2.1].

Приложни резултати, получени при изпълнение на задача 6:

1. Изследвани са численните грешки за двата метода на Бауер на мащабиращите функции на Хаар, Добеши 4, и мултимащабираща функция на Алперт. [т.5.1]
2. Изследван е БМБ за седем пара-Ерминови полинома чрез използване на числени методи (на неподвижната точка и на Нютон). [т. 5.1.4.2 (A)].
3. Изследвани са численните грешки при решаване НМУ чрез ОДАУР за 14 версии на Matlab ('dare' и 'idare') и Maple 17 ('dare'). [т. 5.1.4.2 (B)]
4. Разработена и изследвана е авторска лифтинг схема на мултифилтърна банка на Алперт с различно квантуване на коефициента $\sqrt{3}$ за анализ и възстановяване на изображение с ниво на сиво [т.5.2.1].
5. Изследвани са ортогоналните мултифилтърни банки на CL, GHM, и Алперт за обезшумяване на изображения с ниво на сиво с размер 256×256 и 512×512 пиксела с адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) и дисперсия ($\sigma = 10, 20$). [т.5.2.2]
6. Изследвани са скаларни филтърни банки на Хаар и Добеши, мултифилтрите на Хаар – подобен (Haar-like), Добеши-подобен (Daubechies-like), и GHM при компресия на астрономически изображения от сканирани фотографски плаки (СФП). [т.5.2.3]
7. Реализирани са модулите без умножение върху препрограмируема интегрална схеми на фирмата Xilinx от сериите Virtex и Spartan за перфектно възстановяваща биортогонална $5/3$ филтърна банка [т.5.3];

Авторски публикации, в които са представени част от постигнатите резултати:

Kolev V., Multiplierless modules for forward and backward integer wavelet transform, In *Proceedings of the 4th international conference on Computer systems and technologies: e-Learning*, pp. 284-289. 2003. <https://doi.org/10.1145/973620.973667>

Kolev V., *Orthogonal Multifilters Image Processing of Astronomical Images from Scanned Photographic Plates*, Proceedings of the 11th International Conference on Computer Systems and Technologies and Workshop for PhD Students in Computing on International Conference

on Computer Systems and Technologies, ACM Inter. Conf. Proceeding Series 471, pp. 490 – 495, 2010, DOI:10.1145/1839379.1839467, 490-495

Kolev V., Cooklev T., Keinert F., Design of a simple orthogonal multiwavelet filter by matrix spectral factorization, Circuits, Systems and Signal Processing, vol. 39, no.4, pp.2006 – 2041, **2020**, Springer, IF 1.681, SJR 0.39, **Q3**(WoS), DOI:10.1007/s00034-019-01240-9.

Kolev V., Cooklev T., Keinert F., *Bauer's Spectral Factorization Method for Low Order Multiwavelet Filter Design*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 441, Elsevier, 115713, 2024. IF 2.4, SJR 0.8, **Q1**(WoS), DOI: 10.1016/j.cam.2023.115713

Твърдения доказващи постигането на заложеното в хипотезата:

(а) Разработени са методи за построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции от полиноми и сплайни (*Глава 2*)

(б) Разработени са Алгоритми за Бърз и Точен Метод на Бауер (*Глава 4 и 5*)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дисертацията са изследвани проблеми свързани с нови методи за разработване на мащабиращи или мултимащабиращи функции.

Разработени и изследвани са четири явни и прости метода доказващи хипотезата, че мултфилтърните банки може да бъдат построени от различни базисни функции (полиноми, сплайни) и произведения на матричен филтър чрез спектрално разлагане. Представеният анализ на разработените и приложени методи са нова област на развитие на уейвлетната теория. Той дава възможност да се прилагат и други полиноми и сплайн функции неразгледани в дисертационния труд.

Голямо внимание е обърнато на разработването на бързия метод на Бауер за спектрално разлагане на пара-Ермитови полиноми чрез който се избягва Холески разлагане на Тьоплецова матрица с големи размери. Той е полезен за решаване на многомерни сингулярни пара-Ермитови матрични полиноми както и за намиране на ортогонални мултимащабиращи функции с желана гладкост. Това е доказано с изследване на численните грешки на *Алгоритма 1* и *2* получени по метода на неподвижната точка, метода на Нютон, за 14 версии на Matlab ('*dare*' и '*idare*'), и Maple 17 ('*dare*').

За обезшумяване и компресия на изображения с ниво на сиво и астрономически изображения от сканирани фотографски плаки (СФП) са изследвани скаларните филтърни банки на Хаар и Добеши, ортогонални мултифилтърни банки на Хаар – подобен (Haar - like), Добеши – подобен (Daubechies - like), CL, Алперт, и GHM.

За да може да бъдат лесни и удобни за прилагане, както от студенти така и от научни работници, разработването на четирите метода се основава на основни познания по матричен и функционален анализ, елементарна теория на филтърни банки, и базови познания по Matlab и Maple.

ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА БЪДЕЩО РАЗВИТИЕ

Съвременната обработка на сигнали претърпява бързо развитие както в аналоговата така и в дискретната област. В частност уейвлетната теория е основа в много научни изследвания в много области.

Ето защо, ново направление за бъдещо развитие са разработените три директни методи за построяване на мултифилтри както и бързия метода на Бауер за спектрално разлагане на многопроменливи пара-Ермитови матрични полиноми. Включването им в смесени системи за обработка като дълбоко обучение (deep learning), размита логика (fuzzy logic), и др. може да доведе до подобряване на обезшумяването, компресията, или анализа на едномерни/многомерни сигнали в областа на големите данни.

Друго ново направление за бъдещо развитие е разработването и изследването на лифтинг схеми и техните софтуерни или хардуерни реализации на нови ортогонални мултифилтри.

В това научно изследване някои от резултатите са постигнати при обработка на тестови изображения с ниво сиво. Но в съвременният свят и особено в комуникациите се обработват RGB изображения. Следователно, друго направление за бъдещо развитие е разработване и изследване на предимствата и недостатъците на мултифилтрите при обработка на цветни изображение или видео.

Научни приноси

1. Разработени са три метода за директно получаване на скаларни и векторни функции: смяна на базиса [т.2.1], директен метод [т.2.2], и метод на външно скаларно произведение [т. 2.3].
2. Разработен е авторско произведение на матричен филтър на Алперт [т. 3.1].
3. Разработени са два авторски ортогонални мултимащабиращи функции с точни стойности чрез метода на БМБ за спектрално разлагане и техните допълващи ортогонални мултиуейвлетни функции [т. 5.1.4.2 (A)];

Научно – приложни приноси

1. Разработени са мащабиращи и мултимащабиращи функции от линеен B – сплайн [т. 2.1.3.1, т. 2.2.1, и т. 2.3.1], квадратичен B – сплайн [т. 2.1.2.1, т. 2.1.3.2], кубичен Ермитов сплайн [т. 2.1.2.2, т. 2.1.3.3, т. 2.2.2, и т. 2.3.2], квинтик Ермитов сплайн [т. 2.1.3.4], и Лежандър полиноми [т. 2.1.3.5, т. 2.2.3, и т. 2.3.3] чрез използване на разработените метод чрез смяна на базиса, директен метод, и метод чрез външното скаларно произведение.
2. Разработени са *авторски численни метода* за решаване на НМУ чрез класическия и бърз метод на Бауер за спектрално разлагане (*Алгоритъм 1* - за изчисляване на бърз метод на Бауер [т.4.2] и *Алгоритъм 2* - за изчисляване на точен метод на Бауер [т.4.2]), сравнителен анализ на вградените функции ‘*dare*’ и ‘*idare*’ в Maple и Matlab за решаване на ОДАУР, и са получени ортогонални мултимащабиращи функции по метода на неподвижната точка и метода на Нютон [т.5.1.4.2(A)], [т.4.3.1] - [т.4.3.3], [т.4.4], и [т.4.5.1].
3. Разработена и изследвана е *авторска лифтинг схема* на мултифилтъра на Алперт с различно квантуване на коефициента $\sqrt{3}$ за анализ и възстановяване на изображение с ниво на сиво [т.5.2.1].
4. Реализирани са модулите без умножение върху препрограмируема интегрална схеми на фирмата Xilinx от сериите Virtex и Spartan за перфектно възстановяваща биортогонална $5/3$ филтърна банка [т.5.3].

**СПИСЪК НА АВТОРСКИТЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМАТА НА
ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД**

Kolev V., Multiplierless modules for forward and backward integer wavelet transform, In *Proceedings of the 4th international conference on Computer systems and technologies: e-Learning*, pp. 284-289, 2003. <https://doi.org/10.1145/973620.973667>

Kolev V., Уейвлет и мултиуейвлетни ортогонални филтри, Научни трудове на Русенски университет, том 46, серия 3.1, стр. 97 – 101, 2007, [ISSN 1311 – 3321](#).

Kolev V., *Universal representation of orthogonal wavelet and multiwavelet filters*, Втора научна конференция с международно участие, Висше училище – колеж “Телематика”, стр. 197 – 214, 2008, [ISBN 978–954–8638–51–7](#)

Kolev V., *Orthogonal Multifilters Image Processing of Astronomical Images from Scanned Photographic Plates*, Proceedings of the 11th International Conference on Computer Systems and Technologies and Workshop for PhD Students in Computing on International Conference on Computer Systems and Technologies, ACM International Conference Proceeding Series 471, pp. 490 – 495, 2010, [DOI:10.1145/1839379.1839467](#), 490-495

Kolev V., Cooklev T., Keinert F., *Design of a simple orthogonal multiwavelet filter by matrix spectral factorization*, Circuits, Systems and Signal Processing, vol. 39, pp. 2006 – 2041, 2020, Springer, IF 1.681, SJR 0.39, **Q3**(WoS), [DOI:10.1007/s00034-019-01240-9](#).

Kolev V., Cooklev T., Keinert F., *Bauer’s Spectral Factorization Method for Low Order Multiwavelet Filter Design*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 441, Elsevier, 115713, 2024. IF 2.4, SJR 0.8, **Q1**(WoS), [DOI: 10.1016/j.cam.2023.115713](#)

ЦИТИРАНИЯ НА ПУБЛИКАЦИИТЕ СВЪРЗАНИ С ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Kolev V., Multiplierless modules for forward and backward integer wavelet transform, In *Proceedings of the 4th international conference on Computer systems and technologies: e-Learning*, pp. 284-289. 2003. <https://doi.org/10.1145/973620.973667>

Цитирана в:

1. Bohra A., Izharuddin I., Farooq O. and Ghani F., FPGA based implementation of discrete wavelet transform, Proceeding of the 12-th Inter. Conf. on Aerospace Sciences&Aviation Technology Conference, 29-31 May, vol.12, Article 44, 2007.
2. Akshay N., Harish B. and Dhanorkar S., Multiplierless Design for Multilevel Forward and Inverse 2D Discrete Wavelet Transform, IJCA Proc. on Intern. Conf. and workshop on Emerging Trends in Technology (ICWET), vol. 10, pp. 15 – 21, 2011.
3. Naregalkar A., Harish B., Dhanorkar S., Raju B. L., FPGA implementation of multiplierless 5/3 LeGall discrete wavelet transform using lifting approach, Proc. of the Inter. Conf. & Workshop on Emerging Trends in Technology, February 25-26, pp. 1066-1071, 2011, Mumbai, India.
4. Akshay N., Satish B., and Raju B., Implementation of 3D DWT With 5/3 LeGall Filter For Image Processing, Inter. Journal on Comp. Science and Eng., vol. 4, no.5, pp.729-734, 2012.

Kolev V., *Orthogonal Multifilters Image Processing of Astronomical Images from Scanned Photographic Plates*, Proceedings of the 11th International Conference on Computer Systems and Technologies and Workshop for PhD Students in Computing on International Conference on Computer Systems and Technologies, ACM International Conference Proceeding Series 471, pp. 490 – 495, 2010, DOI:[10.1145/1839379](https://doi.org/10.1145/1839379)

Цитирана в:

1. Alkhidhr H. A., Correspondence between Multiwavelet Shrinkage/Multiple Wavelet Frame Shrinkage and Nonlinear Diffusion, PhD Thesis, University of Missouri – St. Louis, May, 2017.

Kolev V., Cooklev T., Keinert F., *Design of a simple orthogonal multiwavelet filter by matrix spectral factorization*, Circuits, Systems and Signal Processing, vol. 39, pp. 2006 – 2041, 2020, Springer, IF 1.681, SJR 0.39, Q3(WoS), DOI:[10.1007/s00034-019-01240-9](https://doi.org/10.1007/s00034-019-01240-9).

Цитирана в:

1. Gupta G., Xiao X., and Bogdan P., Multiwavelet-based Operator Learning for Differential Equations, M. Ranzato and A. Beygelzimer and P.S. Liang and J.W.

Vaughan and Y. Dauphin (Eds), (NeurIPS 2021) NeurIPS: Proceedings of the 34th Advances in Neural Information Processing Systems Conference, December 06 - 14, 2021, Vancouver, Canada, 2021.

2. Gupta G., Dealing with unknown unknowns, PhD Thesis, University of Southern California, 2022. <http://guptagaurav.me/docs/dissertation.pdf>

3. Yan X., Wu H.-C., Wang Q., Yin C., Li P., Computationally Efficient Multiwavelets Construction Method with New Signal – Dependent - Multiplicity Determination Scheme, *Circuits Systems and Signal Processing*, vol. 41, pp. 5084–5107, 2022.

4. Geronimo J.S., Woerdeman H.J., and Wong C.Y., The autoregressive filter problem for multivariable degree one symmetric polynomials, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, vol. 89, pp. 509–532, 2023.

5. Yang G., Wu Z., Nie M., Yan X., Jiang F., 基于 CWGAN-SLM 的多小波 OFDM 系统峰均比抑制算法研究(Research on PAPR reduction algorithm based on CWGAN-SLM for multi-wavelet OFDM system), *Journal on Communications*, vol. 44, no. 4, pp. 99 – 110, 2023.

ДЕКЛАРАЦИЯ ЗА ОРИГИНАЛНОСТ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Декларирам, че настоящата дисертация съдържа оригинални резултати, получени при проведени от мен научни изследвания. Резултатите, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са надлежно и подробно цитирани в библиографията.

Настоящата дисертация не е прилагана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпис:

/Васил Колев/

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Богданова Б., Анализ на финансови времеви редове чрез трансформация с вълнички, Монография, Ди Ем Ай Дивелопмънт ЕООД, София, 2015. ISBN 978-954-939-930-1.
- [2] Богданова Б., Недев Б., Анализ на цикличните компоненти на борсовия индекс S&P500 чрез трансформация с вълнички, Икономически и социални алтернативи, брой 4, стр. 95 – 105, 2019.
- [3] Велчев Ю., Алгоритми за компресия на електрокардиографски сигнали, ТУ-София, EUT+ Academic Press, 2022, ISBN: 978-619-92237-2-7.
- [4] Манчева В., Даскалов П., Уейвлит базиран подход за синтез на признаци за класифициране на здрави и заразени с Фузариум царевични зърна, Научни трудове на Русенски университет, том 50, серия 3.1, стр. 208 – 215, 2011.
- [5] Методиев К., Определяне на когнитивното натоварване на оператор БЛА чрез измерване разширението на зеницата, Proceedings of 17th Intern. Scientific Conference Space, Ecology, Safety, 20–22 October 2021, Sofia, Bulgaria, стр. 139 – 144.
- [6] Недев Б., Сплайн-функциите – Теория и приложения, Годишник на Стопанския факултет на СУ „Св. Климент Охридски, том 19, по. 1, pp.129-146, 2020.
- [7] Трифонов Т., Иванов И., Статистически анализ и моделиране чрез уейвлети, сп. Статистика, бр.2, стр. 91-101, 2005.
- [8] Йорданов С., Иванов С., Тодоров Т., Михалев Г., Интелигентна система за окачествяване на хранителни продукти базирана на ESP32 и газови сензори, сп. Информатика и иновативни технологии, по. 2-3, стр. 53–63, 2019.
- [9] Турсунов Д. А., Применение сплайн-вейвлетов для решения интегро-дифференциальных уравнений, Известия АлтГУ., по.1, 2011.
- [10] Турсунов Д. А., Применение кубических мультвейвлетов к численному решению дифференциальных уравнений второго порядка с условием Неймана, Вестник ОшГУ., по 3., 2012.
- [11] Турсунов Д.А., Шумилов Б.М., Кудуев А.Ж., Турсунов Э.А., Мультивейвлеты седьмой степени, ортогональные с производными второго порядка. Вестник ОшГУ, по. 3, 2012.
- [12] Anderson B., Continuity of the spectral factorization operation, Math. Appl. Comput., vol.4, no.2, pp. 139 – 156, 1985.
- [13] Узунов А, Детекция на говор в системи за разпознаване на диктори, Дисертация, ИИКТ-БАН, 2020.
- [14] Anderson B., Hitz K., Diem N., Recursive algorithm for spectral factorization, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 21, no.6, pp. 742 – 750, 1974.
- [15] Alpert B., A class of bases in L^2 for the sparse representation of integral operators, SIAM J. Math. Anal., vol. 24, no.1, pp. 246 - 262, 1993.
- [16] Alpert B., Beylkin G., Gines D., and Vozovoi L., Adaptive solution of partial differential equations in multiwavelet bases, J. Comput. Phys., vol. 182, no. 1, pp.149-190, 2002.

- [17] Ahlberg, Nielson, and Walsh, *The Theory of Splines and Their Applications*, 1967.
- [18] Arnold W.I., Laub A.J., Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic riccati equations, *Proc. IEEE*, vol. 72, pp. 1746 – 1754, 1984.
- [19] Birkhoff D., Fluid dynamics, reactor computations, and surface representation, in “A History of Scientific Computation”, S. Nash, Ed., 1990.
- [20] Barclay S., Continuity of the spectral factorization mapping, *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 2, no. 70, pp. 763–779, 2004.
- [21] Bartels, Beatty, and Barsky, *An Introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling*, 1987.
- [22] Battle G., A block spin construction of ondelettes, part I: Lemarid functions, *Comm. Math. Phys.*, vol. 110, pp. 601 – 615, 1987.
- [23] Bauer F.L., Ein direktes iterations verfahren zur Hurwitz-zerlegung eines polynoms, *Archiv Elektrische Uebertragung*, vol. 9, pp. 285–290, 1955.
- [24] Bauer F.L., Beitrage zur entwicklung numerischer verfahren fur programmgesteuerte rechenanlagen, II. Direkte faktorisierung eines polynoms. Sitzung Bericht Bayerischen Akademische Wissenschaften, pp. 163–203, 1956.
- [25] Beylkin G., Coifman R., Rokhlin V., Fast wavelet transforms and numerical algorithms. I, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 44, pp. 141 – 183, 1991.
- [26] Birkhoff G. and de Boor C., Piecewise polynomial interpolation and approximation, *Approximation of Functions* (H. L. Garabedian, ed.), Elsevier, New York, pp. 164 – 190, 1965.
- [27] Boche H. & Pohl V., Calculating the spectral factorization and outer functions by sampling-based approximations – Fundamental limitations, *Journal of Approximation Theory*, vol. 257, 105450, 2020.
- [28] Bogert B. P., Healy J. R. and Tukey J. W., The quefreny analysis of time series for echoes cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum, and saphe cracking, *Proc. of the Symposium on Time Series Analysis*, pp. 209 -243, 1963.
- [29] Callier F.M., On polynomial spectral factorization by symmetric extraction, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 30, no. 5, pp. 453 – 464, 1985.
- [30] Charoenlarnopparut C., One-dimensional and multidimensional spectral factorization using Gröbner basis approach. in *Asia-Pacific Conference on Communications (2007)*, pp. 201 – 204, 2007.
- [31] Chen X. and Parks T. W., Design of optimal minimum phase FIR filters by direct factorization, *Signal Processing*, vol. 10, pp. 369 – 383, 1986.
- [32] Cheung K.-W., Cheung C.-O., Po L.-M., Novel multiwavelet-based integer transform for lossless image coding, in *ICIP’99*, vol. 1, pp. 444–447, Kobe, Japan, 1999.
- [33] Childers D.G., Skinner D.P., Kemerait R.C., The cepstrum: a guide to processing, *Proc. of the IEEE*, vol. 65, no 10, pp. 1428 – 1443, 1977.
- [34] Chui C., *Introduction in wavelets*, Elsevier, Academic Press, 2001.

- [35] Chui C.K. and Lian J., A study on orthonormal multiwavelets, *J. Appl. Numer. Math.*, vol. 20, pp. 272 – 298, 1996.
- [36] Chui C. K, and J. Wang, A cardinal spline approach to wavelets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 113, no. 3, pp. 785 – 793, 1991.
- [37] Cohen A., Daubechies I., P.Vial, Wavelets on the interval and fast wavelet transforms, *Appl. Comp. Harmon.Anal.*, vol.1, pp. 54 – 81, 1993.
- [38] Cooklev T., Nishihara A., Kato M. and Sabalatsh M., Two - channel multifilter banks and multiwavelets, *IEEE Int. Conf. ASSP*, pp. 2769 – 2773, 1996.
- [39] Cotronei M., Montefusco L. B., and Puccio L., Multiwavelet analysis and signal processing, *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, vol. 45, no. 8, pp. 970 – 987, 1998.
- [40] Cui L. and Cong R., Construction for a class of interpolation multiscaling functions with dilation factor $a \geq 3$, *Comp. and Math. with Appl.*, vol. 56, pp. 2948 – 2956, 2008.
- [41] Dahmen W., Wavelet methods for PDEs—some recent developments, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 128, pp. 133 – 185, 2001.
- [42] Davis P., B-splines and Geometric design, *SIAM News*, vol.29, no. 5, 1996.
- [43] Daubechies I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [44] Daubechies I., Cohen A., Plonka G., Regularity of refinable function vectors, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol.3, no. 3, pp. 295 – 324, 1997.
- [45] Dijkema T.J., Schwab C., and Stevenson R., An adaptive wavelets method for solving high-dimensional elliptic PDEs, *Constr. Approx.*, vol. 30, pp. 423 – 455, 2009.
- [46] Djokovic I. and Vaidyanathan P. P., On optimal analysis/synthesis filters for coding gain maximization, *IEEE Ttrans. On Signal Processing*, vol. 44, no. 5, 1996.
- [47] Donoho D.L., Dyn N., and Levin D., Smooth Multiwavelets Duals of Alpert Bases by Moment-Interpolating Refinement, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol.9, pp. 166 – 203, 2000.
- [48] Donoho D.L., Johnstone I.M., Ideal spatial adaption via wavelet shrinkage, *Biometrika*, vol. 81, no. 3, pp. 425 – 455, 1994.
- [49] Donovan G.C., Geronimo J.S., and Hardin D.P., Orthogonal polynomials and the construction of piecewise polynomials smooth wavelets, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 30, pp. 1028-1056, 1999.
- [50] Donovan G.C., Geronimo J.S., Hardin D.P., and Massopust P.R., Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions, *SIAM J. Math. Anal.*, vol.27, pp. 1158– 1192, 1996.
- [51] Donovan G.C., Geronimo J.S., and Hardin D.P., Intertwining multiresolution analyses and the construction of piecewise polynomial wavelets, *SIAM J. Math. Anal.*, vol.27. pp. 1791–1815, 1996.
- [52] Donovan G., Geronimo J. S., Hardin D. H., A class of orthogonal multiresolution analyses in 2D, in “Mathematical methods for curves and surfaces”, Edited by M. Daehlen, T. Lyche, L. L. Schumaker, pp.99 – 110, 1995.
- [53] Dritschel M.A., On factorization of trigonometric polynomials, *Integral Equ. Oper. Theory*, 49(1), pp. 11– 42, 2004.

- [54] Du B., Xu X., Dai X., Minimum-phase FIR precoder design for multicasting over MIMO frequency selective channels. *J. Electron. (China)*, vol. 30, no. 4, pp. 319 – 327, 2013.
- [55] Garnett J.B., *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, 1981.
- [56] Georgiou T.T., Khargonekar P.P., Spectral factorization of matrix-valued functions using interpolation theory, *IEEE Trans. Circuit. Syst.*, vol.36, no.4, pp.568 – 574, 1989.
- [57] Geronimo J. S., Hardin D. H. and Massopust P. R., Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions, *J.Approx. Theory*, vol. 78, pp. 373–401, 1994.
- [58] Goodman T.N.T., Micchelli CA, Rodriguez G, Seatzu S., Spectral factorization of Laurent polynomials, *Advances in Computational Mathematics*, vol. 7, pp. 429 – 445, 1997.
- [59] Ephremidze L., Janashia G., Lagvilava E., A new efficient matrix spectral factorization algorithm., *SICE Annu. Conf. 2007*, pp. 20 – 23, 2007.
- [60] Ephremidze L., Janashia G., and Lagvilava E., A simple proof of the matrix-valued, Fejer-Riesz theorem, *Journal of Fourier Analysis and Applic.*,15(1), pp.124-127, 2009.
- [61] Ephremidze L., Saied F., Spitkovsky I., On the algorithmization of Janashia-Lagvilava matrix spectral factorization method. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 64(2), pp.728–737, 2018.
- [62] Frazier M. W., *An Introduction to wavelets through linear algebra*, 1999.
- [63] Hardin D.P., Kessler B., and Massopust P.R., Multiresolution analyses and fractal functions, *J. Approx. Theory*, vol. 71, pp. 104–120, 1992.
- [64] Hardin D. P., Marasovich J.A., Biorthogonal multiwavelets on $[-1,1]$, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 7, pp. 34–53, 1999.
- [65] Hardin D. P., and Roach D. W., Multiwavelet prefilters I: orthogonal prefilters preserving approximation order $p \leq 2$, *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, vol.45, no. 8, pp.1106 - 1112, 1998.
- [66] Heil C., Strang G., and Strela V., Approximation by translates of refinable functions, *Numer. Math.*, vol.73, no.1, pp. 75 - 94, 1996.
- [67] Heisenberg W., Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik (in German)*, vol. 43, no. 3 – 4, pp. 172 – 198, 1927.
- [68] Hildebrandt K., Schulz C., von Tycowicz C., Polthier K., Interactive spacetime control of deformable objects, *ACM Trans. on Graph.*, vol. 31, no. 4, pp. 71:1 – 71:8, 2012.
- [69] Hsung T.C., Sun M.C., Lun D.P.K., Siu W.C., Symmetric prefilters for multiwavelets, *IEE Proc.- Vision, Image and Signal Proc.*, vol. 150, no. 1, pp. 59 –68, 2003.
- [70] Hsung T.-C., Lun D. P., Shum Y.-H., Ho K. C., Generalized discrete multiwavelet transform with embedded orthogonal symmetric prefilter bank, *IEEE Trans. Signal Proc.*, 1(55), pp. 5619-5629, 2007.
- [71] Fejér L., Über trigonometrische polynome.*J. Reine Angew. Math.(Crelles J.)*,vol.146, pp. 53–82, 1916.
- [72] Jacob B., Winkin J., Zwart H., Continuity of the spectral factorization on a vertical strip, *Systems Control Lett.*, vol. 37, pp. 183 – 192, 1999.

- [73] Jia R.-Q., Liu S.-T. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval, *Advances Computational Mathematics*, vol. 25. 2006.
- [74] Jiang Q., On the regularity of matrix refinable functions, *SIAM J. Math. Anal.*, vol.29, pp. 1157–1176, 1998.
- [75] Jiang Q., On the design of multifilter banks and orthogonal multiwavelet bases, *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 46, no. 12, pp. 3292 - 3303, 1998.
- [76] Femandes F. and Burrus S., Multiwavelet systems with disjoint multiscaling functions, *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 3, pp.1205-1208, 1999.
- [77] Femandes F. and Burrus S., *M*-band multiwavelet systems, *Proc. IEEE ICASSP*, March, 1999.
- [78] Fischer R.F.H., Sorted spectral factorization of matrix polynomials in MIMO communications. *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, no.6, pp. 945–951, 2005.
- [79] Gan L., Ma K.-K., On minimal lattice factorizations of symmetric-antisymmetric multifilterbanks, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 53, no. 2, pp. 606 – 621, 2005.
- [80] Hardin D. P., Hogan T. A, and Sun Q., The matrix-valued Riesz lemma and local orthonormal bases in shift-invariant spaces, *Advances in Computational Mathematics*, 20(4), pp.367-384, 2004.
- [81] Hansen M., Christensen L.P.B., Winther O., Computing the minimum-phase filter using the QL factorization, *IEEE Trans. Signal Process.*, 58(6), pp. 3195 – 3205, 2010.
- [82] Kalathil S., Elias E., Prototype filter design approaches for near perfect reconstruction cosine modulated filter banks:a review, *J. Signal Process. Syst.*, 81(2), pp.183–195, 2015.
- [83] Kemerait R., Childers D., Signal detection and extraction by cepstrum techniques, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, no.6, pp. 745 – 759, 1972.
- [84] Kishore A., Chaitali C., A VLSI architecture for lifting-based forward and inverse wavelet transform, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(4), pp.966–977, 2002.
- [85] **Kolev V.**, Multiplierless modules for forward and backward integer wavelet transform, In *Proceedings of the 4th international conf. on Computer systems and technologies: e-Learning*, pp. 284-289. 2003.
- [86] **Kolev V.**, Уейвлет и мултиуейвлетни ортогонални филтри, *Научни трудове на Русенски университет, том 46, серия 3.1, стр. 97 – 101, 2007.*
- [87] **Kolev V.**, *Universal* representation of orthogonal wavelet and multiwavelet filters, *Втора научна конференция с международно участие, Висше училище – колеж “Телематика”, стр. 197–214, 2008.*
- [88] **Kolev V.**. Orthogonal multifilters image processing of astronomical images from scanned photographic plates, *Proc. of the 11th Inter. Conf. on Comp. Systems and Technologies and Workshop for PhD Students in Computing on Inter. Conf. on Comp. Systems and Technologies*, *ACM Inter. Conf. Proc. Series 471*, pp.490–495, 2010.
- [89] **Kolev V.**, Cooklev T., Keinert F., Design of a simple orthogonal multiwavelet filter by matrix spectral factorization, *Circuits, Systems and Signal Proc.*, 39(4),pp.2006–2041, 2020.

- [90] **Kolev V.**, Cooklev T., Keinert F., Bauer's spectral factorization method for low order multiwavelet filter design, *Journal of Comp. and Applied Math.*, vol. 441, 115713, 2024.
- [91] Koosis P., *Introduction to spaces*, Cambridge University Press, 1980.
- [92] Konstantinov M., Pasheva V., Petkov P., Numerical Issues in using MATLAB, Числени аспекти при използване на MATLAB, *Union of Bulgarian Mathematicians*, 41(1), pp. 239 – 246, 2012.
- [93] Konstantinov M., Todorov V., Pelova G., Boneva J., Using MATLAB in technical universities, *Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians Albena*, April 6–10, pp. 347 – 353, 2010.
- [94] Krein M.G., Integral equations of the half–line with kernel depending upon the difference of the arguments, *Uspechi Mat. Nauk.*, 13(5), pp. 3–120, 1958 (*Russian*); English translation, *AMS translations*, vol. 22, pp. 163 – 288. 1962.
- [95] Kucera V., *Discrete linear control: The polynomial approach*, John Wiley, 1979.
- [96] Lebrun J. and Vetterli M., Balanced multiwavelets: Theory and design, *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 46, no. 4, pp. 1119 – 1125, 1998.
- [97] Lebrun J., and Vetterli M., High-order balanced multiwavelets: theory, factorization, and design, *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol.49, no. 9, pp. 1918 – 1930, 2001.
- [98] Lewis A. S. and Knowles G., A 64 Kb/s video codec using the 2-D wavelet transform, in *Proc. Data Compression Conf.*, Snowbird, UT, 1991.
- [99] Li B. and Peng L., Balanced multiwavelets with interpolatory property, *IEEE Trans. Image Proc.*, vol.20, no. 5, pp. 1450-1457, 2011.
- [100] Li Y. and Yang S., Construction of paraunitary symmetric matrix and parameterization of symmetric and orthogonal multiwavelets filter banks, *Acta Math. Sinica, Chinese Series*, vol.53, no. 2, pp. 279 – 290, 2010.
- [101] Lian J., Armlets and balanced multiwavelets: flipping filter construction, *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 53, issue 5, pp. 1754 – 1767, 2005.
- [102] Malyshev A.N., On the acceleration of an algorithm for polynomial factorization. *Dokl. Math.*, vol. 88, no.2, pp. 586 – 589, 2013.
- [103] Malyshev A.N., Sadkane M., The Bauer-type factorization of matrix polynomials revisited and extended. *Comput. Math. Math. Phys.*, 58(7), pp. 1025 – 1034, 2018.
- [104] Massopust P., Ruch D., and Van Fleet P., On the support properties of scaling vectors, *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, vol.3, no. 3, pp.229 – 238, 1996.
- [105] Meyer Y., Ondelettes sur l'intervalle, *Rev. Mat. Iberoamericana*, vol.7, pp.115–133, 1991.
- [106] Micchelli C. A., Sauer T., Regularity of multiwavelets, *Adv.Comp.Math.*, vol.7, pp. 455–545, 1997.
- [107] Mohammadi F. and Hosseini M.M., A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 8, pp. 1787 – 1796, 2011.
- [108] <http://www.xilinx.com/webpack/index.htm#MXE>

- [109] Moir T.J., Toeplitz matrices for LTI systems, an illustration of their application to Wiener filters and estimators. *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 49, no.4, pp. 800 – 817, 2018.
- [110] Oppenheim A.V., *Discrete– time signal processing*, Prentice Hall, NJ, 1989.
- [111] Orszag S. A., Spectral methods for problems in complex geometries, *Journal of Computational Physics*, vol.37, pp.70 - 92, 1980.
- [112] Plonka G. and Strela V., Construction of multiscaling functions with approximation and symmetry, *SIAM J. Math. Anal. Appl.*, vol. 29, pp. 481 - 510, 1998.
- [113] Pommaret J.F., Quadrat A., Generalized Bezout identity, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, vol. 9, pp. 91 – 116, 1998.
- [114] Riesz F., Über ein problem des Herrn Carathéodory. *J. Reine Angew. Math (Crelles J.)*, vol.146, pp. 83–87, 1916.
- [115] Rissanen J. and Barbosa L., Properties of infinite covariance matrices and stability of optimum predictors, *Information Sciences*, vol. 1, pp.221 - 236, 1969.
- [116] Rissanen J, Kailath T., Partial realization of random systems, *Automatica*, vol. 8, pp. 389–396, 1972.
- [117] Rissanen J., Algorithms for triangular decomposition of block Hankel and Toeplitz matrices with application to factoring positive matrix polynomials, *Mathematics of Computation*, vol.27, pp. 147–154, 1973.
- [118] Rieder P. and Nossek J., Smooth multiwavelets based on two scaling functions, *Proc. of the IEEE Inter. Sym. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 309 – 312, 1996.
- [119] Rieder P., Parameterization of symmetric multiwavelets, *Proc.ICASSP*,vol.3, pp.2461-2465, 1997.
- [120] Rosenblum M., and Rovnyak J., *Hardy classes and operator theory*, Oxford University Press, 1985.
- [121] Rudin W., The extension problem for positive-definite functions. *Ill. J. Math.*, 7(3), pp.532 – 539, 1963.
- [122] Sayed A. H., Kailath T., A survey of spectral factorization methods, *Numerical Linear Algebra with Applications*, vol.8, no.6 - 7, pp. 467 – 496., 2001.
- [123] Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.*, 4(1), pp. 45 – 99 and no.2, pp.112 – 141, 1946.
- [124] Shannon C.E., Communication in the presence of noise, *Proc. IRE*, 37(1), pp.10–21, 1949.
- [125] Shen L. and Tan H., On a family of orthonormal scalar wavelets and related balanced multiwavelets, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, issue 7, pp. 1447 - 1452, 2001.
- [126] Shen L. X., Than H.H., and Than J.Y., Symmetric-antisymmetric orthogonal multiwavelets and related scalar wavelet, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 8, pp. 258 - 279, 2000.
- [127] Smith M. J. T. and Barnwell III T. P., Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders, *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 34, no. 3, pp. 434 – 441, 1986.

- [128] Soman K.P., Ramachandran K.I, and Resmi N.G., Insight into wavelets: From theory to practice, New Delhi, 3Ed., 2010.
- [129] Strang G. and Nguyen T., Wavelet and Filter banks, Cambridge Press, 1996.
- [130] Strang G. and Strela V., Short wavelets and matrix dilation equations, IEEE Trans. Signal Processing, vol.45, no. 1, pp. 108 – 115, 1995.
- [131] Strang G. and Strela V., Orthogonal multiwavelets with vanishing moments, J. Optical Engineering, vol.33, no. 7, pp. 2104 - 2107, 1994.
- [132] Strela V., Multiwavelets: Theory and Applications, MIT, 1996.
- [133] Strela V., Walden A. T., Orthogonal and biorthogonal multiwavelets for signal denoising and image compression, SPIE Proceedings, vol. 3391, pp.96 – 107, 1998.
- [134] Sweldens W., The lifting scheme: a construction of second generation wavelets. SIAM J. Math. Anal., vol. 29, no. 2, pp. 511 – 546, 1998.
- [135] Tan H. H., Shen L. X., and Tham J. Y., New biorthogonal multiwavelets for image compression, *Signal Process.*, vol. 48, pp. 45–65, 1999.
- [136] Tham J., Shen L., Lee S., and H. Tan, Good multifilter properties: A new tool for understanding multiwavelets, Inter. Conf. on Imaging Science Systems and Technology, pp. 52 – 59, 1998.
- [137] Tham J., Shen L., Lee S., and Tan H., A General approach for analysis and application of discrete multiwavelet transforms, IEEE Trans. on Sig. Proc., vol. 48, no. 2, pp. 457 – 464, 2000.
- [138] Trenas M. A., Opez J. L, and Zapataa E. L., Configurable architecture for the wavelet packet transform, Journal of VLSI Signal Processing, vol.32, no.3, pp.255–273, 2002.
- [139] Vaidyanathan P. P., Multirate systems and filter banks, Prentice-Hall, NJ, 1993.
- [140] Wasin S. and Jianzhong W., Estimating the support of a scaling vector, SIAM J. Matrix Analysis and Applications, vol.18, no. 1, pp. 63-73, 1997.
- [141] Wang Z., McWhirter J.G., Weiss S., Multichannel spectral factorization algorithm using polynomial matrix eigenvalue decomposition, in 49th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, pp. 1714 – 1718, 2015.
- [142] Wilson G. Factorization of the covariance generating function of a pure moving average process. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 6, pp. 1 – 7, 1969.
- [143] Wua G., D. Lib, Xiaoa H. and Liuc Z., The M - band cardinal orthogonal scaling function, Appl. Math. and Comp., vol. 215, no. 9, pp. 3271 – 3279, 2010.
- [144] Xia X. G., Geronimo J. S., Hardin D. P., and Suter B.W., Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms, IEEE Trans. on Signal Process., 44(1), pp. 25 - 35, 1996.
- [145] Yang S.Z., Cheng Z.X., and Wang H.Y., Construction of biorthogonal multiwavelets, Journal Math. Anal. Appl., vol. 276, pp. 1 – 12, 2002.
- [146] Yousefi S. A., Numerical solution of Abel’s integral equation by using Legendre wavelets, Applied Mathematics and Computation, vol. 175, no. 1, pp. 574 – 580, 2006.
- [147] Yousefi S. A., Legendre wavelets method for solving differential equations of Lane–Emden type, Applied Mathematics and Computation, 181(2), pp. 1417 - 1422, 2006.

- [148] Yin S.S., Zhou Y., Chan S.C., An efficient method for designing of modulated filter banks with causal stable IIR filters, *J. Signal Process. Syst.*, vol. 78, no.2, pp. 187 – 197, 2015.
- [149] Youla D.C., Kazanjian N.N., Bauer-type factorization of positive matrices and the theory of matrix polynomials orthogonal on the unit circle, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 25, no. 2, pp. 57–69, 1978.
- [150] Young D. M., Garrett Birkhoff and applied mathematics, *Notices of the AMS*, vol. 44, no. 11, pp. 1446 - 1449, 1997.
- [151] Zhou D.-X., Interpolatory Orthogonal multiwavelets and refinable Functions, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.50, no. 3, pp. 520 – 527, 2002.
- [152] Paley R.E.A.C., Wiener N., *Fourier transforms in the complex domain*, vol.19, AMS,1934.
- [153] <https://www.xilinx.com/support/download/index.html/content/xilinx/en/downloadNv/vivado-design-tools/archive-ise.html>

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Тъждество на Безуаут (Bezout identity) [113]

$$(1-y)^n Q(y) + y^n Q(1-y) = 2, \quad z \in C \quad (\text{П1})$$

е частен случай разгледан в [111]. Полинома $Q(y) \in \Pi_{n-1}$, където Π_{n-1} – линейно пространство от скаларни полиноми на степен $\leq n$, е получен в явен вид от израза (П1)

$$Q(y) = \frac{1}{(1-y)^n} (2 - y^n Q(1-y)) \quad (\text{П2})$$

Чрез повтаряне на геометрично сходящия степенен ред $\frac{1}{1-y} = \sum_{j=0}^{\infty} y^j, |y| < 1$ е получена

формулата за множителя $\frac{1}{(1-y)^n}$ развит в ред на Тейлор или биномни коефициенти е:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-y)^n} &= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+j-1)}{j!} \\ &= \frac{(n+j-1)!}{j!} = \binom{n+j-1}{j} y^j, |y| < 1 \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

която заместена в (П2) води до уравнението и може да се извлече последователността $(\alpha_j : j \in Z^+) \subset R$ такава че

$$\begin{aligned} Q(y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} y^j - y^n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} y^j Q(1-y) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j-1}{j} y^j + y^n \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j y^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j-1}{j} y^j + y^n R\left(\frac{1}{2} - y\right) \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

където $R\left(\frac{1}{2} - y\right)$ е асиметричен полином изразяващ степените на свобода и променящ свойствата на уейвлетите. Когато $R\left(\frac{1}{2} - y\right) = 0$ уейвлетните функции притежават максимален брой на нулеви моменти, които са представени чрез уейвлетни функции на Добешии получените филтри са с максимално стръмни честотни характеристики. Но, тъй като полинома $Q(y) \in \Pi_{n-1}$, което означава че степента на $Q(y)$ е $n-1$, предполага че коефициентите в (П4) ще са $\alpha_j = 0$. Следователно, от (П4) получаваме явното представяне на полинома:

$$Q_{n-1}(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j-1}{j} y^j. \quad (\text{П5})$$

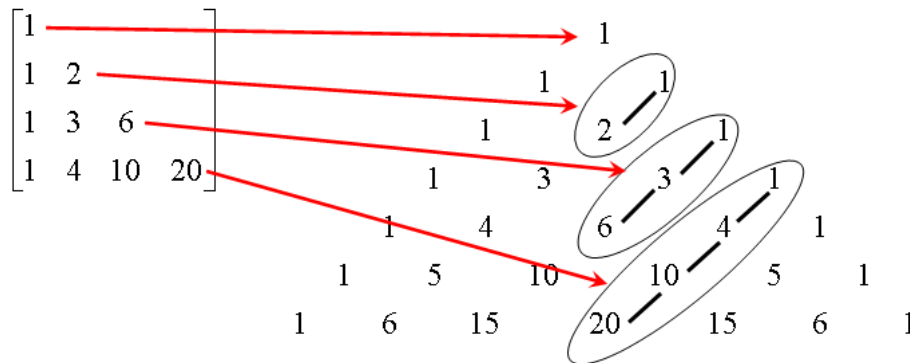
Първите няколко решения на (П5) за $n = [1 - 4]$ са:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q_0(y) &= 1 \\ \frac{1}{2} Q_1(y) &= 1 + 2y \\ \frac{1}{2} Q_2(y) &= 1 + 3y + 6y^2 \\ \frac{1}{2} Q_3(y) &= 1 + 4y + 10y^2 + 20y^3 \end{aligned}$$

или матричен вид

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 3 & 6 & \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} = Pas_3 \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix}. \quad (\text{П6})$$

Очевидно, матрицата от решения в (П6) са диагоналите от триъгълника на Паскал Pas_{m-1} , показано на фиг. П1 за $n = [1 - 4]$, което в матрично представяне е еквивалентно на $m^{\text{я}}$ стълб:



фиг. П1 Връзка на редовете от матрицата Pas_3 с триъгълника на Паскал за $n = [1 - 4]$;

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица 5.1

Влияние размерността $n = 5 - 65 \times 10^3$ на Тъоплецовата матрица за произведение на филтър на Хаар върху точноста при скаларно спектрално разлагане по метода на Бауер измерено чрез численни грешки - ε_H за спектрален фактор $h^{(n)}$ и ε_P за филтър на

произведение $p^{(n)}$

n	ε_H	ε_P
5	0.074651249152872	0.010102051443364
10	0.036286387936611	0.002506281446690
25	0.014286458158997	4.0016012812821300e-04
50	0.007106781186548	1.000100020004946e-04
100	0.003544417213033	2.500062503124623e-05
250	0.001415630611453	4.000016000094142e-06
500	7.074606885727475e-04	1.000000999951123e-06
750	4.715617604753586e-04	4.444446419782366e-07
1000	3.536418231639971e-04	2.500000624294785e-07
2500	1.414355012028246e-04	4.000000164428030e-08
5000	7.071421400717259e-05	1.000000005024759e-08
7500	4.714202353484076e-05	4.444444423601368e-09
10000	3.535622299399854e-05	2.499999984806323e-09
12500	2.828483696160067e-05	1.600000021362291e-09
15000	2.357061889468604e-05	1.111110920225540e-09
20000	1.767789050954871e-05	6.249999962015806e-10
25000	1.414227705609505e-05	3.999999775849972e-10
30000	1.1785211232129280e-05	2.7777780076121420e-10
35000	1.010159760439500e-05	2.040816959869574e-10
40000	8.838890016238388e-06	1.5624995741703170e-10
45000	7.8567856716116320e-06	1.2345674482716602e-10
50000	7.0711031655568140e-06	1.000000637851883e-10
55000	6.428272681602287e-06	8.264455786388680e-11
60000	5.892581057542756e-06	6.944445019030354e-11
65000	5.439303850884869e-06	5.917155654344697e-11

Таблица 5.2

Влияние размерности $n = 5 - 65 \times 10^3$ на Тъоплецовата матрица за произведение на филтър на Добеши 4 върху точността при скаларно спектрално разлагане по метода на Бауер измерено чрез численни грешки - ε_H за спектрален фактор $h^{(n)}$ и ε_P за филтър на произведение $p^{(n)}$

n	ε_H	ε_P
5	1.53972562239323e-01	2.5962444104774e-02
10	8.6014963533250e-02	7.416297191849e-03
25	3.6859776127510e-02	1.3048789124449e-03
50	1.8866520589513e-02	3.376483078425530e-04
100	9.545268004866e-03	8.592571385690473e-05
250	3.845368056176e-03	1.389804915041815e-05
500	1.927259703463e-03	3.487205618268874e-06
750	1.285859043739e-03	1.551759501783323e-06
1000	9.647768334260232e-04	8.733974896646401e-07
2500	3.861864836640083e-04	1.398976507971383e-07
5000	1.931367434792330e-04	3.498807610302634e-08
7500	1.287681935613905e-04	1.555091555527355e-08
10000	9.658184041702600e-05	8.750688840208909e-09
12500	7.725216782517030e-05	5.603190245118128e-09
15000	6.440754063324894e-05	3.894787603542227e-09
20000	4.830844783920707e-05	2.193665582517212e-09
25000	3.864980038101318e-05	1.398537841090786e-09
30000	3.198967413930998e-05	9.702860737093033e-10
35000	2.774457457652146e-05	7.017555425647970e-10
40000	2.431791656956617e-05	5.455034202128672e-10
45000	2.113655397889547e-05	4.333970959891076e-10
50000	1.871269579503676e-05	3.837491435731977e-10
52500	1.813935345029716e-05	3.290786532161860e-10
55000	1.721223149728224e-05	3.11281119976300e-10
55600	1.726291978151884e-05	2.563125267585065e-10
56250	1.708117263485298e-05	2.504773055633791e-10
57500	1.750457163851582e-05	1.940654303922429e-10
58750	1.722465866488276e-05	1.792871406891550e-10
60000	1.703737949260153e-05	1.880211542015786e-10
62500	1.652751037006794e-05	1.937799920526118e-10
65000	1.534130125302458e-05	1.974612695576639e-10

Таблица 5.3

Влияние размерноста $n = 5 - 32.5 \times 10^3$ на Гьоплецовата матрица за произведение на матричен филтър на Алперт върху точноста при скаларно спектрално разлагане по метода на Бауер измерено чрез численни грешки - ε_H за спектрален фактор $L^{(n)}$ и ε_P за филтър на произведение $P^{(n)}$

n	ε_H	ε_P
5	0.178141786731868	0.016849753997996
10	0.078755831233412	0.003310721628609
25	0.029474503940720	4.495937751228252e-04
50	0.014432191874756	1.060999075271352e-04
100	0.007142671246832	2.575624859468828e-05
250	0.002839797616806	4.048160037795068e-06
500	0.001417049024908	1.006009850534895e-06
750	9.440684492890150e-04	4.462236985469659e-07
1000	7.078158201041518e-04	2.507495621140166e-07
2500	2.829690894413095e-04	4.004226550335943e-08
5000	1.415526330929562e-04	9.984906401694360e-09
7500	9.463480016574932e-05	4.399161368517923e-09
10000	7.144632967515108e-05	2.438197532761421e-09
11000	6.531629195621891e-05	1.855127829131220e-09
12500	5.917501140662029e-05	1.081583822504228e-09
13000	5.778948765106096e-05	8.827406583478137e-10
14000	5.576464243867152e-05	5.696861871129499e-10
15000	5.450941887613636e-05	3.488032085385839e-10
16000	5.374486547771173e-05	2.021278144859195e-10
17500	5.318611613314150e-05	7.648826017003785e-11
18000	5.309605515108062e-05	5.197997587913505e-11
19000	5.299878350056852e-05	2.002908949805260e-11
19500	5.297771532614126e-05	1.031158491926476e-11
19750	5.297176784324620e-05	6.614153669204370e-12
20000	5.296820297456817e-05	3.559930128460564e-12
20250	5.296659422115990e-05	1.067257393572163e-12
20300	5.296647388847164e-05	6.293299215087700e-13
20350	5.296641417584791e-05	2.098876628053858e-13
20360	5.296640927870966e-05	1.282307593442056e-13
20370	5.296640668300823e-05	4.729550084903167e-14
20375	5.296640624252724e-05	6.994405055138486e-15
20380	5.296640641838657e-05	3.319566843629218e-14
20400	5.296641274954439e-05	1.902367152695206e-13
20450	5.296646694524787e-05	5.739297925799747e-13
20500	5.296657420827966e-05	9.402756351306607e-13
20600	5.296693805667552e-05	1.622257883582279e-12
20750	5.296782362501640e-05	2.530559095603735e-12
21000	5.297006725113462e-05	3.761352340703183e-12
21500	5.297665188469525e-05	5.298206318116172e-12
22000	5.298475779091927e-05	6.046607659015990e-12
22500	5.299347244291930e-05	6.198791480116483e-12
25000	5.302957608788184e-05	3.602840248362327e-12
27000	5.304368998371167e-05	1.557864948154020e-12
29000	5.304899562663667e-05	4.876654635666000e-13
30000	5.305003262340291e-05	2.676192600858940e-13
31000	5.305060164473296e-05	1.468269950066770e-13
32500	5.305101226527054e-05	5.967448757360216e-14

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

1) Matlab R2022a

```
X= [4          1+sym(sqrt(7));
    1+sym(sqrt(7))  4 ]/8;
```

```
C0 = chol(X, 'lower')
```

$$C_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{7}}{8} + \frac{1}{8} \right) & \sqrt{\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{\sqrt{7}}{8} + \frac{1}{8} \right)^2} \end{pmatrix}$$

```
C0 = simplify(C0)
```

$$C_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{7}}{8} + \frac{1}{8} \right) & \frac{\sqrt{32} (\sqrt{7} - 1)}{32} \end{pmatrix}$$

2) Mathematica 11.2

```
In[4]= CholeskyDecomposition[ $\frac{\{\{4, 1 + \text{sqrt } 7\}, \{1 + \text{sqrt } 7, 4\}\}}{8}$ ]
```

```
Out[4]=  $\left\{ \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1 + 7 \text{sqrt}}{4 \sqrt{2}} \right\}, \left\{ 0, \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{32} (1 + 7 \text{sqrt}) (1 + 7 \text{Conjugate}[\text{sqrt}])} \right\} \right\}$ 
```