

# Резюмета на научните публикации на

доц. Станислав Николаев Харизанов

за участие в конкурс за академична длъжност “професор” по професионално направление 4.5. Математика, спец. “Изчислителна математика”, обявен в ДВ бр. 21/15.03.2022 г. за нуждите на секция “Научни пресмятания с Лаборатория по 3D дигитализация и микроструктурен анализ”,  
Институт по информационни и комуникационни технологии,  
Българска академия на науките

1. S. Harizanov, R. Lazarov, S. Margenov, P. Marinov. Numerical solution of fractional diffusion-reaction problems based on BURA. *Computers & Mathematics with Application* 80(2), 316 – 331. Elsevier, 2020. **IF: 3.476 (Q1, WoS)**  
**ISSN: 0898-1221** <https://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2019.07.002>

## Abstract

The paper is devoted to the numerical solution of algebraic systems of the type  $(\mathbb{A}^\alpha + q\mathbb{I})\mathbf{u} = \mathbf{f}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $q > 0$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ , where  $\mathbb{A}$  is a symmetric and positive definite matrix. We assume that  $\mathbb{A}$  is obtained by finite difference approximation of a second order diffusion problem in  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2$  so that  $\mathbb{A}^\alpha + q\mathbb{I}$  approximates the related fractional diffusion-reaction operator or could be a result of a time-stepping procedure in solving time-dependent sub-diffusion problems. We also assume that a method of optimal complexity for solving linear systems with matrices  $\mathbb{A} + c\mathbb{I}$ ,  $c \geq 0$  is available. We analyze and study numerically a class of solution methods based on the best uniform rational approximation (BURA) of a certain scalar function in the unit interval.

The first such method, originally proposed in Harizanov et al. (2018) for numerical solution of fractional-in-space diffusion problems, was based on the BURA  $r_\alpha(\xi)$  of  $\xi^{1-\alpha}$  in  $[0, 1]$  through scaling of the matrix  $\mathbb{A}$  by its largest eigenvalue. Then the BURA of  $t^{-\alpha}$  in  $[1, \infty)$  is given by  $t^{-1}r_\alpha(t)$  and correspondingly,  $\mathbb{A}^{-1}r_\alpha(\mathbb{A})$  is used as an approximation of  $\mathbb{A}^{-\alpha}$ . Further, this method was improved in Harizanov et al. (2019) using the same concept but by scaling the matrix  $\mathbb{A}$  by its smallest eigenvalue. In this paper we consider the BURA  $r_\alpha(\xi)$  of  $1/(\xi^{-\alpha} + q)$  for  $\xi \in (0, 1]$ . Then we define the approximation of  $(\mathbb{A}^\alpha + q\mathbb{I})^{-1}$  as

$r_\alpha(\mathbb{A}^{-\alpha})$ . We also propose an alternative method that uses BURA of  $\xi^\alpha$  to produce certain uniform rational approximation (URA) of  $1/(\xi^{-\alpha} + q)$ . Comprehensive numerical experiments are used to demonstrate the computational efficiency and robustness of the new BURA and URA methods.

### Абстракт

Тази статия е посветена на численото решаване на система линейни алгебрични уравнения от вида  $(\mathbb{A}^\alpha + q\mathbb{I})\mathbf{u} = \mathbf{f}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $q > 0$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ , където  $\mathbb{A}$  е симетрична, положително определена матрица. Допускаме, че  $\mathbb{A}$  е генерирана посредством метод на крайните разлики (МКР), приложен към дифузионна задача от втори ред в областта  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2$  така, че  $\mathbb{A}^\alpha + q\mathbb{I}$  или да апроксимира съответния дробен дифузионно-реактивен оператор или да е резултат от времева дискретизация при решаването на нестационарна суб-дифузионна задача. Също така, предполагаме, че разполагаме с оптимален метод за решаване на алгебрични системи линейни уравнения от вида  $\mathbb{A} + c\mathbb{I}$ ,  $c \geq 0$ . В резултат, анализираме и числено изследваме клас от методи за решаване на  $(\mathbb{A}^\alpha + q\mathbb{I})\mathbf{u}$ , базиран на елемента на най-добра равномерна рационална апроксимация (BURA) за определена скаларна функция в единичния интервал.

Първият такъв метод, предложен в Harizanov et al. (2018) за числено решаване на дробни-по-пространството дифузионни задачи, се основава на BURA елемента  $r_\alpha(\xi)$  за  $\xi^{1-\alpha}$  в  $[0, 1]$  посредством скалиране на матрицата  $\mathbb{A}$  с най-голямата ѝ собствена стойност. Тогава, BURA елементът за  $t^{-\alpha}$  в  $[1, \infty)$  се записва като  $t^{-1}r_\alpha(t)$  и съответно  $\mathbb{A}^{-1}r_\alpha(\mathbb{A})$  се използва за приближение на  $\mathbb{A}^{-\alpha}$ . Този метод бе доразвит в Harizanov et al. (2019), използвайки същата концепция, но скалирайки матрицата  $\mathbb{A}$  с най-малката ѝ собствена стойност. В настоящата статия разглеждаме BURA елемента  $r_\alpha(\xi)$  за  $1/(\xi^{-\alpha} + q)$  при  $\xi \in (0, 1]$ . След това дефинираме приближението на  $(\mathbb{A}^\alpha + q\mathbb{I})^{-1}$  посредством  $r_\alpha(\mathbb{A}^{-\alpha})$ . Също така, предлагаме и алтернативен подход за пресмятане на определен елемент на равномерно рационално приближение (URA) за  $1/(\xi^{-\alpha} + q)$ , базиран на BURA елемента за  $\xi^\alpha$ . Проведени са редица числени експерименти, които демонстрират изчислителната ефективност и робастност на новите BURA и URA методи.

2. S. Harizanov, N. Kosturski, S. Margenov, Y. Vutov. Neumann fractional diffusion problems: BURA solution methods and algorithms. *Mathematics and Computers in Simulation* 189, 85 – 98. Elsevier, 2021. **IF: 2.463 (Q1, WoS)**  
**ISSN: 0378-4754** <https://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2020.07.018>

### Abstract

Let us consider the non-local problem  $-\mathcal{L}^\alpha u = f$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\mathcal{L}$  is a second order self-adjoint elliptic operator in  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  with Neumann boundary conditions on  $\partial\Omega$ . The problem is discretized by finite difference or finite element method, thus obtaining the linear system  $\mathcal{A}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ ,  $\mathcal{A}$  is sparse symmetric and positive semidefinite matrix. The proposed method is based on best uniform rational approximations (BURA) of degree  $k$ ,  $r_{\alpha,k}$ , of the scalar function  $t^\alpha$ ,  $t \in [0, 1]$ . Then, the approximate solution  $\mathbf{u}_r$  of the fractional power linear system is defined as  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_r = \lambda_2^{-\alpha} r_{\alpha,k}(\lambda_2 \mathcal{A}^\dagger) \mathbf{f}$ , where  $\lambda_2$  is the first positive eigenvalue of  $\mathcal{A}$ , and  $\mathcal{A}^\dagger$  stands for the Moore-Penrose pseudo inverse of  $\mathcal{A}$ . The BURA method reduces the non-local problem to solution of  $k$  linear systems with matrices  $\mathcal{A} + d_i \mathcal{I}$ ,  $d_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . An exponential convergence rate with respect to  $k$  is proven. The error estimates are robust with respect to the condition number of  $\mathcal{A}$  in the subspace orthogonal to the constant vectors. The algorithm has almost optimal computational complexity assuming that optimal iterative solvers are applied to the auxiliary sparse linear systems. The first group of numerical tests illustrate in details the obtained theoretical results. Finite difference discretization of a model 2D problem is used for this purpose. The second part of numerical tests demonstrate the applicability of BURA methods for 3D problems in domains with general geometry. Linear finite elements on unstructured tetrahedral meshes with local mesh refinement are used in the presented large-scale experiments, confirming also the almost optimal computational complexity.

### Абстракт

Да разгледаме нелокалната задача  $-\mathcal{L}^\alpha u = f$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , където  $\mathcal{L}$  е самоспрегнат елиптичен оператор от втори ред в областта  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  с гранични условия върху  $\partial\Omega$  от тип Нойман. Задачата е дискретизирана посредством метод на крайни разлики (МКР) или метод на крайни елементи (МКЕ) и е получена линейната система  $\mathcal{A}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ , за която  $\mathcal{A}$  е разредена, симетрична и положително полуопределена матрица. Предложеният в статията метод за решаване е базиран на елемента  $r_{\alpha,k}$  на най-добро равномерно рационално приближение (BURA) от степен  $k$  за скаларната функция  $t^\alpha$ ,  $t \in [0, 1]$ . В резултат, приближеното решение  $\mathbf{u}_r$  на линейната система от дробна степен се задава чрез  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_r = \lambda_2^{-\alpha} r_{\alpha,k}(\lambda_2 \mathcal{A}^\dagger) \mathbf{f}$ , където  $\lambda_2$  е най-малката положителна собствена стойност за  $\mathcal{A}$ , а с  $\mathcal{A}^\dagger$  сме означили псевдо-обратната матрица за  $\mathcal{A}$  в смисъла на Мур-Пенроуз. BURA

методът редуцира нелокалната задача до решаването на  $k$  линейни системи с разредени матрици  $\mathcal{A} + d_i \mathcal{I}$ ,  $d_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Доказана е експоненциална скорост на сходимост в зависимост от  $k$ . Оценка за грешката са робастни спрямо числото на обусловеност за  $\mathcal{A}$  в линейното подпространство, ортогонално на константните вектори. Предложеният алгоритъм притежава почти оптимална изчислителна сложност при предположение, че се прилагат оптимални итеративни солвъри за решаването на помощните разредени линейни системи. Първата група от проведени числени експерименти детайлно илюстрира изведените теоретични резултати, като за целта е приложен МКР към моделна 2D задача. Втората част от проведените числени експерименти демонстрира приложимостта на BURA методите към задачи в тримерна област със сложна геометрия. За тези големи задачи са използвани линейни крайни елементи върху неструктурирани тетраедрални мрежи с локално съгъстяване, като почти оптималната изчислителна сложност на алгоритмите е числено потвърдена и в тази постановка.

3. S. Harizanov, N. Kosturski, I. Lirkov, S. Margenov, Y. Vutov. Reduced Sum Implementation of the BURA Method for Spectral Fractional Diffusion Problems. In *LSSC 2021: Large-Scale Scientific Computing*, LNCS 13127, pp 57–64. Springer, 2022.

**SJR: 0.249**

**ISSN: 0302-9743**

**ISBN: 978-303097548-7**

[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-97549-4\\_6](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-97549-4_6)

### Abstract

The numerical solution of spectral fractional diffusion problems in the form  $\mathcal{A}^\alpha u = f$  is studied, where  $\mathcal{A}$  is a selfadjoint elliptic operator in a bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , and  $\alpha \in (0, 1]$ . The finite difference approximation of the problem leads to the system  $\mathbb{A}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ , where  $\mathbb{A}$  is a sparse, symmetric and positive definite (SPD) matrix, and  $\mathbb{A}^\alpha$  is defined by its spectral decomposition. In the case of finite element approximation,  $\mathbb{A}$  is SPD with respect to the dot product associated with the mass matrix. The BURA method is introduced by the best uniform rational approximation of degree  $k$  of  $t^\alpha$  in  $[0, 1]$ , denoted by  $r_{\alpha, k}$ . Then the approximation  $\mathbf{u}_k \approx \mathbf{u}$  has the form  $\mathbf{u}_k = c_0 \mathbf{f} + \sum_{i=1}^k c_i (\mathbb{A} - \tilde{d}_i \mathbb{I})^{-1} \mathbf{f}$ ,  $\tilde{d}_i < 0$ , thus requiring the solving of  $k$  auxiliary linear systems with sparse SPD matrices. The BURA method has almost optimal computational complexity, assuming that an optimal PCG iterative solution method is applied to the involved auxiliary linear systems. The presented analysis shows that the absolute values of first  $\left\{ \tilde{d}_i \right\}_{i=1}^{k'}$  can be extremely large. In such a case the condition number of  $\mathbb{A} - \tilde{d}_i \mathbb{I}$  is practically equal to one. Obviously, such systems do not need preconditioning. The next question is if we can replace their solution by directly multiplying  $\mathbf{f}$  with  $-c_i / \tilde{d}_i$ . Comparative analysis of numerical results is presented as a proof-of-concept for the proposed RS-BURA method.

## Абстракт

В тази статия е изучавано численото решение на задачи със спектрална дробна дифузия от вида  $\mathcal{A}^\alpha u = f$ , където  $\mathcal{A}$  е самоспрегнат елиптически оператор в ограничена област  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , а  $\alpha \in (0, 1]$ . Дискретизация чрез крайни разлики води до системата  $\mathbb{A}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ , където  $\mathbb{A}$  е разредена, симетрична и положително определена (СПО) матрица, а  $\mathbb{A}^\alpha$  се дефинира посредством спектралната ѝ декомпозиция. При дискретизация чрез крайни елементи  $\mathbb{A}$  е СПО матрица спрямо скаларното произведение, индуцирано от матрицата на масата. BURA методът е записан на база елемента на най-добро равномерно рационално приближение от степен  $k$  за  $t^\alpha$  в  $[0, 1]$ , който ще означавме с  $r_{\alpha,k}$ . Тогава приближението  $\mathbf{u}_k \approx \mathbf{u}$  е във вида  $\mathbf{u}_k = c_0 \mathbf{f} + \sum_{i=1}^k c_i (\mathbb{A} - \tilde{d}_i \mathbb{I})^{-1} \mathbf{f}$ ,  $\tilde{d}_i < 0$ , следователно изисква решаването на  $k$  спомагателни линейни системи с разредени СПО матрици. BURA методът притежава почти оптимална изчислителна сложност при предположение, че се използват оптимални итеративни солвъри, базирани на метода на спрегнатия градиент с преобусловител, за решаването на помощните разредени линейни системи. Представеният анализ показва, че абсолютните стойности на първите  $\left\{ \tilde{d}_i \right\}_{i=1}^{k'}$  могат да са изключително големи. В такъв случай числото на обусловеност за  $\mathbb{A} - \tilde{d}_i \mathbb{I}$  е на практика единица. Очевидно, такива системи не се нуждаят от преобуславяне. Следващият въпрос е дали можем напълно да избегнем тяхното решаване чрез директното умножаване на  $\mathbf{f}$  с  $-c_i/\tilde{d}_i$ . Представен е сравнителен експериментален анализ, илюстриращ на концептуално ниво предимствата на предложениия редуциран BURA метод.

4. S. Harizanov, R. Lazarov, S. Margenov, P. Marinov, J. Pasciak. Comparison analysis on two numerical methods for fractional diffusion problems based on rational approximations of  $t^\gamma$  on  $[0, 1]$ . In *30th Chemnitz Finite Element Symposium, 2017*, LNCSE 128, pp 165–185. Springer, 2019. **SJR: 0.496** **ISSN: 1439-7358** **ISBN: 978-303014243-8**  
[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-14244-5\\_9](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-14244-5_9)

## Abstract

The paper is devoted to the numerical solution of algebraic systems of the type  $\mathbb{A}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , where  $\mathbb{A}$  is a symmetric and positive definite matrix. We assume that  $\mathbb{A}$  is obtained from finite difference or finite element approximations of second order elliptic problems in  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2$  and we have an optimal method for solving linear systems with matrices  $\mathbb{A} + c\mathbb{I}$ . We study and compare experimentally two methods based on best uniform rational approximation (BURA) of  $t^\gamma$  on  $[0, 1]$  with the method of Bonito and Pasciak, (Math Comput 84(295):2083–2110, 2015), that uses exponentially convergent quadratures for the Dunford-Taylor integral representation of the fractional powers of elliptic operators. The first method, introduced in Harizanov et al. (Numer Linear Algebra Appl 25(4):115–128, 2018) and based on the BURA  $r_\alpha(t)$  of  $t^{1-\alpha}$  on  $[0, 1]$ , is used to get the BURA of  $t^{-\alpha}$  on

$[1, \infty)$  through  $t^{-1}r_\alpha(t)$ . The second method, developed in this paper and denoted by R-BURA, is based on the BURA  $r_{1-\alpha}(t)$  of  $t^\alpha$  on  $[0, 1]$  that approximates  $t^{-\alpha}$  on  $[1, \infty)$  via  $r_{1-\alpha}^{-1}(t)$ . Comprehensive numerical experiments on some model problems are used to compare the efficiency of these three algorithms depending on  $\alpha$ . The numerical results show that R-BURA method performs well for  $\alpha$  close to 1 in contrast to BURA, which performs well for  $\alpha$  close to 0. Thus, the two BURA methods have mutually complementary advantages.

### Абстракт

Статията е посветена на численото решаване на линейни алгебрични системи от типа  $\mathbb{A}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , където  $\mathbb{A}$  е симетрична и положително определена матрица. Предполагаме, че  $\mathbb{A}$  е генерирана посредством МКР или МКЕ за елиптични задачи от втори ред в  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2$  и, че разполагаме с оптимален метод за решаване на линейни системи с матрици  $\mathbb{A} + c\mathbb{I}$ . Изследваме и числено сравняваме два солвъра, базирани на най-доброто равномерно рационално приближение (BURA) за  $t^\gamma$  в  $[0, 1]$  с метода на Бонито и Пашек (Math Comput 84(295):2083–2110, 2015), който използва експоненциално сходящи квадратурни формули за интегралното представяне от тип Дънфорд-Тейлър на дробната степен на елиптичен оператор. Първият метод, предложен в Harizanov et al. (Numer Linear Algebra Appl 25(4):115–128, 2018), използва BURA елемента  $r_\alpha(t)$  за  $t^{1-\alpha}$  в  $[0, 1]$  за да апроксимира  $t^{-\alpha}$  в  $[1, \infty)$  чрез  $t^{-1}r_\alpha(t)$ . Вторият метод, разработен в настоящата статия и означен с R-BURA, използва BURA елемента  $r_{1-\alpha}(t)$  за  $t^\alpha$  в  $[0, 1]$  за да апроксимира  $t^{-\alpha}$  в  $[1, \infty)$  посредством  $r_{1-\alpha}^{-1}(t)$ . Проведени са изчерпателни числени експерименти върху моделни задачи за да се сравнят ефективността на трите алгоритъма в зависимост от  $\alpha$ . Получените резултати показват, че R-BURA метода се представя добре при  $\alpha$  близко до 1, за разлика от BURA метода, който се представя добре при  $\alpha$  близко до 0. Така, двата BURA метода притежават взаимно допълващи се предимства при решаването на този клас задачи.

5. I. Georgieva, S. Harizanov, C. Hofreither. Iterative low-rank approximation solvers for the extension method for fractional diffusion. *Computers & Mathematics with Application* 80(2), 351 – 366. Elsevier, 2020.

**IF: 3.476 (Q1, WoS)**

**ISSN: 0898-1221**

<https://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2019.07.016>

### Abstract

We consider the numerical method for fractional diffusion problems which is based on an extension to a mixed boundary value problem for a local operator in a higher dimensional space. We observe that, when this problem is discretized using tensor product spaces as is commonly done, the solution can be very well approximated by low-rank tensors; we provide some analysis to support this observation. This fact motivates us to apply iterative low-rank

approximation algorithms in order to efficiently solve this extended problem. In particular, we employ a recently proposed greedy Tucker approximation method as well as a more classical greedy rank one update method. Throughout, all objects of interest are kept in suitable low-rank approximations, which dramatically reduces the required amount of memory compared to the full formulation of the extended problem.

Our approach can be used for general, non-structured space discretizations. If the space discretization itself has tensor product structure, we can further decompose the problem in order to deal with even lower-dimensional objects. We also note that the approach can be directly applied to higher-order discretizations both in space and the extended variable.

A further contribution of our work is a rank one version of a diagonal preconditioner which can mitigate the severe ill-conditioning of the extended problem arising due to mesh grading and singularity of the coefficient. This preconditioner can be realized using a simple pre- and postprocessing step and does not affect the computational effort of our algorithm.

In several numerical examples, we demonstrate the convergence behavior of the proposed methods. In particular, the Tucker approximation approach requires only a few iterations in order to reach the discretization error in all tested settings.

### Абстракт

Разглеждаме числен метод за задачи с дробна дифузия, базиран на аналитично продължение до локална задача със смесени гранични условия върху област от по-висока размерност. Забелязваме, че при стандартна дискретизация на задачата с помощта на пространства от тензорни произведения решението на задачата може да бъде много добре апроксимирано посредством тензори от нисък ранг, което наблюдение подкрепяме с помощта на аналитични средства. Този факт ни мотивира да приложим итеративни алгоритми за приближения от нисък ранг с цел ефективно да решим продължената задача. В частност, прилагаме наскоро предложен алчен метод за апроксимация на Тъкър, както и по-класически алчни методи от първи ранг. В цялото изложение всички изследвани обекти са представени посредством подходящи приближения от нисък ранг, което драматично намалява нужното количество компютърна памет в сравнение с класическата формулировка на продължената задача.

Подходът ни е приложим и за обобщени, неструктурирани пространствени дискретизации. Когато самата пространствена дискретизация има структура на тензорно произведение, ние можем допълнително да разложим задачата и да работим върху обекти с дори още по-ниска размерност. Също така, да отбележим, че подхода е директно приложим към дискретизации от висок ред както по пространствената, така и по допълнителната променлива.

Допълнителен принос от нашата работа е ранг едно версия на диагонален преобусловител, който може да смекчи изключително лошата обусловеност на продължената

задача, възникваща при локално сгъстяване на мрежата и/или сингулярност на коефициента. Този преобусловител може да се реализира с помощта на директна стъпка (преди или след самото числено решаване) и не засяга цялостната изчислителна ефективност на нашия алгоритъм.

Демонстрираме скоростта на сходимост на предложените методи върху няколко числени примери. В частност, при всички тествани постановки на задачата, подходът базиран на апроксимация на Тъкър се нуждае от едва няколко итерации за да достигне порядъка на грешката от дискретизация.

6. R. Adasiewicz, M. Ganzha, M. Paprzycki, M. Ivanovic, C. Badica, I. Lirkov, S. Fidanova, S. Harizanov. Optimal Placement of Internet of Things Infrastructure in a Smart Building. In *2nd Internatinal Conference on Information Management and Machine Intelligence, ICIMMI 2020*, LNNS 166, pp 661–669. Springer, 2021. **SJR: 0.170** **ISSN: 2367-3370**  
**ISBN: 978-981159688-9** [http://dx.doi.org/10.1007/978-981-15-9689-6\\_73](http://dx.doi.org/10.1007/978-981-15-9689-6_73)

#### Abstract

Recently, there is a growing trend to improve the quality of life, while reducing energy consumption and emissions of  $CO_2$ . Here, the use of sensors, controllers, and indoor positioning brings us closer to achieving this goal. The aim of this note is outline an attempt at use of modern infrastructure for optimization of energy management in a building. An architecture of a solution that uses data from sensors to control the state of the object is presented. Performed experiments focus on optimal placement of networking infrastructure inside the building.

#### Абстракт

Напоследък се наблюдава нарастваща тенденция за подобряване на качеството на живот, същевременно намалявайки консумацията на енергия и въглеродните емисии. Използването на сензори, контролери и взимането под внимание на вътрешното разположение на обектите ни доближава до осъществяването на тази идея. Целта на настоящата статия е да очертае опит за прилагане на съвременна инфраструктура за оптимизиране на енергийното управление в сграда. Представена е архитектура на решение, използваща сензорни данни за контрол върху състоянието на обекта. Направените числени експерименти се фокусират върху оптималното разположение на мрежовата инфраструктура вътре в сградата.

7. S. Harizanov, S. Margenov, N. Popivanov. Spectral Fractional Laplacian with Inhomogeneous Dirichlet Data: Questions, Problems, Solutions. In *13th Annual Meeting of the Bulgarian Section of the Society for Industrial and Applied Mathematics, BGSIAM 2018*, SCI 961, pp 123–138. Springer, 2021. **SJR: 0.185** **ISSN: 1860-949X**  
**ISBN: 978-303071615-8** [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-71616-5\\_13](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-71616-5_13)



## Abstract

In this paper we discuss the topic of correct setting for the equation  $(-\Delta)^s u = f$ , with  $0 < s < 1$ . The definition of the fractional Laplacian on the whole space  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$  is understood through the Fourier transform, see, e.g., Karniadakis et.al. (arXiv, 2018). The real challenge however represents the case when this equation is posed in a bounded domain  $\Omega$  and proper boundary conditions are needed for the correctness of the corresponding problem. Let us mention here that the case of inhomogeneous boundary data has been neglected up to the last years. The reason is that imposing nonzero boundary conditions in the nonlocal setting is highly nontrivial. There exist at least two different definitions of fractional Laplacian, and there is still ongoing research about the relations of them. They are not equivalent. The focus of our study is a new characterization of the spectral fractional Laplacian. One of the major contributions concerns the case when the right hand side  $f$  is a Dirac  $\delta$  function. For comparing the differences between the solutions in the spectral and Riesz formulations, we consider an inhomogeneous fractional Dirichlet problem. The provided theoretical analysis is supported by model numerical tests.

## Абстракт

Тази статия дискутира темата за правилната постановка на уравнението  $(-\Delta)^s u = f$ , където  $0 < s < 1$ . Дефиницията на дробния оператор на Лаплас върхи цялото пространство  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$  е свързана с трансформацията на Фурие, виж например Karniadakis et.al. (arXiv, 2018). Истинското предизвикателство, обаче се крие в случая, когато уравнението е зададено върху ограничена област  $\Omega$  и са необходими подходящи допълнителни гранични условия за да бъде съответната задача математически коректна. Да споменем, че до скоро поставянето на нехомогенни гранични условия е било напълно пренебрегвано в литературата. Причината е, че в случая на нелокална задача това изисква силно нетривиален анализ. Съществуват поне две нееквивалентни дефиниции на дробен оператор на Лаплас, като и до днес се изследват връзките между тях. Фокусът на тази статия е върху характеристиките на този оператор. Един от основните ни приноси е свързан със случая дясната страна  $f$  да бъде Дирак функцията  $\delta$ . За илюстриране на разликите в решенията на спектралната формулировка на оператора и тази на Риц, разглеждаме дробна задача с нехомогенни гранични условия на Дирихле. Изведеният теоретичен анализ е подкрепен от моделни числени експерименти.

8. I. Lirkov, S. Harizanov, M. Paprzycki, M. Ganzha. Performance analysis of parallel high-resolution image restoration algorithms on Intel supercomputer. *Concurrency and Computation: Practice and Experience* 33(4), e5996. John Wiley and Sons Ltd, 2021.

**IF: 1.536 (Q3, WoS)      ISSN: 1532-0626      <https://dx.doi.org/10.1002/cpe.5996>**

### Abstract

In this article, we present an experimental performance study of a parallel implementation of two Poissonian image restoration algorithms. Hybrid parallelization, based on MPI and OpenMP standards, is investigated. The implementation is tested for high-resolution radiographic images, on a supercomputer based on Intel Xeon processors, combined with Intel Xeon Phi coprocessors. The experimental results show an essential improvement in the execution times, when running experiments for a variety of problem sizes, and number of threads.

### Абстракт

В тази статия е представен експериментален сравнителен анализ върху резултата от паралелната реализация на два алгоритъм за възстановяване на дигитални изображения, замърсени с Поасонов шум. Изследвана е хибридна паралелизация, основана на MPI и OpenMP стандарти. Съответната имплементацията е тествана върху радиографски изображения с висока резолюция на суперкомпютър с Intel Xeon процесори в комбинация с Intel Xeon Phi копроцесори. Експерименталните резултати показват съществено подобрене във времената за изпълнение на програмата, когато се тестват различни размери на изображенията и брой използвани нишки.

9. N. Popivanov, S. Margenov, I. Ugrinova, S. Harizanov, T. Hristov. Mathematical and computer modeling of COVID-19 transmission dynamics in Bulgaria by time-depended inverse SEIR model. In *46th International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics, AMEE 2020*, AIP Conference Proceedings 2333, 090024. AIP Publishing Haus, 2021. **SJR: 0.177**      **ISSN: 0094-243X**      **ISBN: 978-073544077-7**  
<http://dx.doi.org/10.1063/5.0041868>

### Abstract

Since the end of 2019, with the outbreak of the new virus COVID-19, the world changed entirely in many aspects, with the pandemia affecting the economies, healthcare systems and the global socium. As a result from this pandemic, scientists from many countries across the globe united in their efforts to study the virus's behavior and are attempting to predict mathematically its infection model in order to limit its impact and developing new methods and models to achieve this goal. In this paper we explore a time-depended SEIR model, in which the dynamics of the infection in four groups from a selected target group (population), divided according to the infection, are modeled by a system of nonlinear ordinary differential equations. Several basic parameters are involved in the model: coefficients of infection rate, incubation rate, recovery rate. The coefficients are adaptable to each specific infection, for each individual country, and depend on the measures to limit the spread of the infection and

the effectiveness of the methods of treatment of the infected people in the respective country. If such coefficients are known, solving the nonlinear system is possible to be able to make some hypotheses for the development of the epidemic. This is the reason for using Bulgarian COVID-19 data to first of all, solve the so-called “inverse problem” and to find the parameters of the current situation. Reverse logic is initially used to determine the parameters of the model as a function of time, followed by computer solution of the problem. Namely, this means predicting the future behavior of these parameters, and finding (and as a consequence applying mass-scale measures, e.g., distancing, disinfection, limitation of public events), a suitable scenario for the change in the proportion of the numbers of the four studied groups in the future. In fact, based on these results we model the COVID-19 transmission dynamics in Bulgaria and make a two-week forecast for the numbers of new cases per day, active cases and recovered individuals. Such model, as we show, has been successful for prediction analysis in the Bulgarian situation. We also provide multiple examples of numerical experiments with visualization of the results.

### Абстракт

От края на 2019 година и появяването на COVID-19 вируса, светът коренно се промени в най-различни посоки, главно поради ефекта на пандемията върхи държавните икономики, здравни системи и глобалния социум. В резултат, редица учени от цял свят се обединиха в усилията си да изследват поведението на вируса и да се опитат математически да определят правилния инфекциозен модел. В тази статия разглеждаме зависещ от времето SEIR модел, при който динамиката на заразяване сред таргетираната популация се моделира посредством система нелинейни обикновени диференциални уравнения, описващи връзките между четири основни групи. Моделът се основава на няколко базови параметри като скорост на заразяване, инкубационен период, време за възстановяване. Тези коефициенти са специфични при всеки тип инфекция и се различават между различните държави, поради различните нива на предприети мерки за ограничаване разпространението на вируса, както и различната ефективност на допълнителното и болничното лечение. Ако тези коефициенти са предварително известни, то решаването на нелинейната система диференциални уравнения би могло да помогне за съставянето на хипотези за бъдещото протичане на пандемията. Поради тази причина, използвайки официалните Български COVID-19 данни, ние на първо място решаваме така наречената “обратна задача” и се опитваме да определим моментните стойности на тези параметри, както и поведението им като функция на времето. След това, чрез компютърни симулации се опитваме да предскажем подходящ бъдещ сценарий за изменение в пропорциите на численост в четирите разглеждани групи. Благодарение на този анализ, моделирахме динамиката на COVID-19 разпространението в България и изготвихме двуседмична прогноза напред във времето за дневния брой новозаразени, активни и оздравели/починали случаи. Моделът изглежда да е приложим за ситуацията

в България, като сме представили и редица числени експерименти с визуализация на получените резултати.

10. D. Toneva, S. Nikolova, S. Harizanov, D. Zlatareva, V. Hadjidekov. A dense approach for computation of facial soft tissue thickness data. *Forensic Imaging* 25, 200460. Elsevier Ltd, 2021. **SJR: 0.426**  
**ISSN: 2666-2256** <https://dx.doi.org/10.1016/j.fri.2021.200460>

### Abstract

*Objective:* The present study aims to propose a dense approach for computation of facial soft tissue thickness (FSTT) data. For this purpose, three-dimensional surface models of the skull and skin were generated from computed tomography (CT) data and all possible skull-to-face distances were calculated for each skull-skin pair.

*Material and methods:* The CT images were obtained using a Toshiba Aquilion64 CT system. Based on the scan data for each individual, surface models of the skull and skin were created in InVesalius. The produced models represented orientable irregular dense triangulated meshes with properly oriented outward-pointing normals. The model postprocessing was performed in MeshLab and as a result only the face region from the models was kept. The skull-to-face distances were computed in CloudCompare using the M3C2 plugin.

*Results:* The M3C2 plugin provides measurements perpendicular to the skull surface along the direction of the outward-pointing normal vectors of the triangulated mesh. The measurements originate only from the front skull surface since the distance calculations were restricted to the positive half-space relatively to the normal. The number of calculated distances amounts to over 70,000 per skull-skin pair.

*Conclusion:* The M3C2 plugin enables computation and visualization of dense data of FSTTs.

### Абстракт

*Цел:* Настоящото изследване цели да предложи систематизиран подход за пресмятането на дебелината на лицевата мека тъкан (FSTT). Поради тази причина, чрез компютърна томография са генерирани тримерни модели както на черепната повърхност, така и на кожата върху нея и са пресметнати всевъзможните череп-до-лице разстояния между съответните двойки от точки череп-кожа.

*Методи и материали:* Дигиталните томографски изображения са генерирани посредством томограф Toshiba Aquilion64. Повърхнинни модели на череп и кожа, базирани на сканираните данни за всеки индивид, са създадени посредством софтуеъра InVesalius. Тези модели описват ориентируеми, неравномерни, триангулирани мрежи с ориентирани навън единични нормали. Постпроцесинга им се осъществява в MeshLab, като в резултат само лицевата област на моделите се съхранява за по-нататъшна обработка.

Разстоянията череп-кожа са повъзлово пресметнати чрез софтуеъра CloudCompare, използващ M3C2 плъгин.

*Резултати:* M3C2 плъгинът осигурява измервания, перпендикулярни на черепната повърхност в посока на външно-сочецата нормала във възела от триангулираната мрежа на черепа. Тъй като измерванията са ограничени само върху положителната полуравнина спрямо нормалата, то те отговарят единствено на точки от лицевата черепна повърхност. Общият брой пресметнати разстояния възлиза на над 70,000 за индивидуална двойка череп-кожа.

*Заключение:* M3C2 плъгинът позволява пресмятането и визуализацията на данните от FSTT-та.

11. S. Harizanov, N. Kosturski, I. Lirkov, S. Margenov, Y. Vutov. Reduced Multiplicative (BURA-MR) and Additive (BURA-AR) Best Uniform Rational Approximation Methods and Algorithms for Fractional Elliptic Equations. *Fractal and Fractional* 5(3), 61. MDPI AG, 2021.

**IF: 3.313 (Q1, WoS)**

**ISSN: 2504-3110**

<https://dx.doi.org/10.3390/fractalfract5030061>

### Abstract

Numerical methods for spectral space-fractional elliptic equations are studied. The boundary value problem is defined in a bounded domain of general geometry,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$ . Assuming that the finite difference method (FDM) or the finite element method (FEM) is applied for discretization in space, the approximate solution is described by the system of linear algebraic equations  $\mathbb{A}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Although matrix  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  is sparse, symmetric and positive definite (SPD), matrix  $\mathbb{A}^\alpha$  is dense. The recent achievements in the field are determined by methods that reduce the original non-local problem to solving  $k$  auxiliary linear systems with sparse SPD matrices that can be expressed as positive diagonal perturbations of  $\mathbb{A}$ . The present study is in the spirit of the BURA method, based on the best uniform rational approximation  $r_{\alpha,k}(t)$  of degree  $k$  of  $t^\alpha$  in the interval  $[0, 1]$ . The introduced additive BURA-AR and multiplicative BURA-MR methods follow the observation that the matrices of part of the auxiliary systems possess very different properties. As a result, solution methods with substantially improved computational complexity are developed. In this paper, we present new theoretical characterizations of the BURA parameters, which gives a theoretical justification for the new methods. The theoretical estimates are supported by a set of representative numerical tests. The new theoretical and experimental results raise the question of whether the almost optimal estimate of the computational complexity of the BURA method in the form  $O(N \log^2 N)$  can be improved.

## Абстракт

Изследвани са числени методи за спектрални дробни-по-пространството елиптични уравнения. Граничната задача е зададена върху ограничена област със сложна геометрия  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$ . Допускайки, че за дискретизация по пространството е използван МКР или МКЕ, приближеното решение се описва чрез системата линейни алгебрични уравнения  $\mathbb{A}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Макар, че матрицата  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  е разредена, симетрична и положително определена (СПО), матрицата  $\mathbb{A}^\alpha$  е навсякъде плътна. Последните достижения в тази област се основават на методи за редукция на оригиналната нелокална задача до решаването на  $k$  помощни линейни системи с разредени СПО матрици, които се изразяват в положителни константни отмествания по главния диагонал на  $\mathbb{A}$ . Настоящото изследване е в духа на BURA метода, базиран на елемента  $r_{\alpha,k}(t)$  на най-добро равномерно рационално приближение от степен  $k$  за  $t^\alpha$  в интервала  $[0, 1]$ . Предложените нови адитивен BURA-AR и мултипликативен BURA-MR методи за решаване се основават на наблюдението, че матриците за част от помощните линейни системи притежават съществено различни свойства от останалите. В резултат са разработени алгоритми със съществено подобрена изчислителна ефективност. В статията са изведени нови теоретични характеристики на BURA параметрите, осигуряващи теоретична обосновка на предложените модифицирани методи. Теоретичните оценки са подкрепени от множество представителни числени експерименти. Новите теоретични и експериментални резултати повдигат въпроса, дали почти оптималната оценка за изчислителната сложност на BURA метода във вида  $O(N \log^2 N)$  не може да бъде подобрена.

12. A. Bădică, C. Bădică, M. Bolanowski, S. Fidanova, M. Ganzha, S. Harizanov, M. Ivanovic, I. Lirkov, M. Paprzycki, A. Paszkiewicz, K. Tomczyk. Cascaded Anomaly Detection with Coarse Sampling in Distributed Systems. In *9th International Conference on Big Data Analytics, BDA 2021*, LNCS 13167, pp 181–200. Springer, 2022.

**SJR: 0.249**

**ISSN: 0302-9743**

**ISBN: 978-303096599-0**

[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-96600-3\\_133](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-96600-3_133)

## Abstract

In this contribution, analysis of usefulness of selected parameters of a distributed information system, for early detection of anomalies in its operation, is considered. Use of statistical analysis, or machine learning (ML), can result in high computational complexity and requirement to transfer large amount of data from the monitored system's elements. This enforces monitoring of only major components (e.g., access link, key machine components, filtering of selected traffic parameters). To overcome this limitation, a model in which an arbitrary number of elements could be monitored, using microservices, is proposed. For this purpose, it is necessary to determine the sampling threshold value and the influence of sampling coarseness

on the quality of anomaly detection. To validate the proposed approach, the ST4000DM000 (Disk failure) and CICIDS2017 (DDoS) datasets were used, to study effects of limiting the number of parameters and the sampling rate reduction on the detection performance of selected classic ML algorithms. Moreover, an example of microservice architecture for coarse network anomaly detection for a network node is presented.

### Абстракт

В тази разработка е представен анализ на полезността на избраните параметри в разпределена информационна система за ранното засичане на аномалии в работата ѝ. Използването на статистически анализ или машинно самообучение (ML) могат да доведат до висока изчислителна сложност и необходимост от трансфер на огромно количество данни от елементите на следената система. Това налага следенето единствено на основните компоненти (например, линк за достъп, ключови машинни компоненти, филтриране на избрани параметри на трафик и т.н.). За да преодолеем това ограничение, предлагаме модел, при който произволен набор от елементи може да бъде следен, използвайки микросървис архитектури. За целта е необходимо да се определи пробна стойност за праг и влиянието на грубостта на извадката върху качеството на засичане на аномалии. За валидирането на предложения подход са използвани базите данни ST4000DM000 (повреда в диска) and CICIDS2017 (атака за отказ на услуга) и са изследвани ефектите от ограничаването на броя параметри и честотата на снемане на данни върху успеваемостта за засичане на аномалии сред избрани, класически ML алгоритми. В допълнение е представен и пример за микросървис архитектура за засичане на аномалии върху мрежов възел на груба мрежа.

13. S. Harizanov, I. Lirkov, S. Margenov. Rational Approximations in Robust Preconditioning of Multiphysics Problems. *Mathematics* 10(5), 780. MDPI, 2022. **IF: 2.258 (Q1, WoS)**  
**ISSN: 2227-7390** <https://dx.doi.org/10.3390/math10050780>

### Abstract

Multiphysics or multiscale problems naturally involve coupling at interfaces which are manifolds of lower dimensions. The block-diagonal preconditioning of the related saddle-point systems is among the most efficient approaches for numerically solving large-scale problems in this class. At the operator level, the interface blocks of the preconditioners are fractional Laplacians. At the discrete level, we propose to replace the inverse of the fractional Laplacian with its best uniform rational approximation (BURA). The goal of the paper is to develop a unified framework for analysis of the new class of preconditioned iterative methods. As a final result, we prove that the proposed preconditioners have optimal computational complexity  $O(N)$ , where  $N$  is the number of unknowns (degrees of freedom) of the coupled discrete

problem. The main theoretical contribution is the condition number estimates of the BURA-based preconditioners. It is important to note that the obtained estimates are completely analogous for both positive and negative fractional powers. At the end, the analysis of the behavior of the relative condition numbers is aimed at characterizing the practical requirements for minimal BURA orders for the considered Darcy-Stokes and 3D-1D examples of coupled problems.

### Абстракт

При решаването на мултифизични или многонивови задачи е необходимо да се осигури съгласуваност по границата (интерфейса) между областите, която е алгебрично многообразие от по-ниска размерност. Сред най-ефективните подходи за решаването на особено големи задачи от този клас е използването на блочно-диагонално преобуславяне за съответните системи диференциални уравнения със седлова точка. На операторно ниво, оптималните преобусловители за интерфейсите блокове са дробни оператори на Лаплас. В тази статия предлагаме при решаването на такъв тип задачи след дискретизация, обратния дробен оператор на Лаплас да се замени с неговия BURA аналог. Главната цел е разработката на унифицирана теоретична основа за анализ на предложения клас от итеративни методи с преобуславяне. В резултат, доказваме, че разглежданите преобусловители притежават оптимална изчислителна сложност  $O(N)$ , където  $N$  е броя на неизвестните (степените на свобода) за свързаната дискретна задача. Основният теоретичен принос е изведената обща оценка за числото на преобусловеност на BURA-базираните преобусловители. Важно е да отбележим, че оценките са напълно аналогични при положителна и отрицателна стойност на дробната степен! Също така, изследването на поведението на относителните числа на обусловеност е важна част при определянето на минималната стойност на степента на BURA, необходима в практиката за решаването на конкретни свързани задачи от тип Дарси - Стоукс или 3D-1D.

14. S. Harizanov, S. Margenov. Numerical Solution of Spectral Space-Fractional Diffusion Problems: Recent Advances and Challenges Beyond the Scalar Elliptic Case. In *13th International Hybrid Conference "Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences", AMiTaNS'21*, AIP Conference Proceedings 2522 (accepted, 8 pages). **SJR: 0.177**

### Abstract

Let us consider the equation  $\mathcal{A}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , where  $\mathcal{A}$  is a symmetric positive definite operator corresponding to a second order elliptic boundary value problem in a bounded domain  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$ . We assume that the non-local fractional diffusion operator  $\mathcal{A}^\alpha$  is defined through the spectral decomposition of  $\mathcal{A}$ . The current advances in numerical methods for such spectral spatial-fractional diffusion problems have been analyzed in Harizanov et al.



(Fract. Calc. & Appl. Anal. 23:1605–1646, 2020). The presented results are in the spirit of BURA methods. This class of methods is based on the best uniform rational approximation of a scalar function in the interval  $[0, 1]$  (see Harizanov et al. (J. of Comput. Phys. 408:109285, 2020) and the references therein). The focus of our study is on some challenges beyond the scalar elliptic case.

### Абстракт

Да разгледаме уравнението  $\mathcal{A}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , където  $\mathcal{A}$  е симетричен, положително определен оператор, съответстващ на гранична елиптична задача от втори ред върху ограничена област  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$ . Нека нелокалния дробно-дифузионен оператор  $\mathcal{A}^\alpha$  е дефиниран посредством спектралното разлагане на  $\mathcal{A}$ . Текущото състояние на теоретичния и практически напредък при решаването на такъв тип задачи е обект на анализ в Harizanov et al. (Fract. Calc. & Appl. Anal. 23:1605–1646, 2020). Представените в настоящата статия резултати са в духа на BURA методите. Този клас от методи е изграден върху елементите на най-добро равномерно приближение за специално избрана скаларна функция в интервала  $[0, 1]$  (виж Harizanov et al. (J. of Comput. Phys. 408:109285, 2020) и литературата там). Фокусът на изследването ни е върху някои предизвикателства отвъд скаларната елиптична постановка.

15. N. Popivanov, S. Margenov, I. Ugrinova, S. Harizanov, T. Hristov. Parameters Identification and Forecasting of COVID-19 Transmission Dynamics in Bulgaria with Mass Vaccination Strategy. In *47th International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics, AMEE 2021*, AIP Conference Proceedings (accepted, 16 pages). **SJR: 0.177**

### Abstract

In this paper we introduce a time-dependent SEIR-based model with vaccination. In the suggested model the host population is divided into seven compartments: susceptible, exposed, infectious, recovered, deceased, vaccinated susceptible individuals and individuals with vaccination-acquired immunity. The dynamics of the infection in these groups is modeled by a Cauchy problem for a system of nonlinear ordinary differential equations. Besides the classical SEIR model parameters (infection rate, incubation rate, recovery rate), the new model involves mortality rate and some additional vaccination parameters such as vaccination rate, vaccines effectiveness and takes into account the time taken for antibodies to develop. Using Bulgarian COVID-19 data we solve the so-called “inverse problem” and find the unknown parameters as a function of time. Then based on these results we solve numerically the Cauchy problem in the model and make computer simulation of the COVID-19 dynamics in Bulgaria. This allows us to calculate the number of people with vaccination-acquired immunity in Bulgaria. The proposed model and method for parameters identification can be applied to COVID-19 data in every single country of the world.

## Абстракт

В тази статия разглеждаме зависещ от времето модел от тип SEIR за динамиката на разпространение на COVID-19 при отчетена ваксинация. В предложения модел всеки индивид от таргетираната популация се намира в една от седемте групи: уязвим; контактен; заразен; оздравял; починал; ваксиниран, но с изтекъл срок на защита; и с придобит ваксинационен имунитет. Динамиката на разпространение на болестта е моделирана посредством задача на Коши за система нелинейни обикновени диференциални уравнения. Освен класическите за SEIR-моделите параметри (скорост на заразяване, инкубационен период, време за възстановяване), нашият модел съдържа и допълнителни параметри, като ръст на смъртност, скорост на ваксинация и ефикасност на ваксината, както и отчита времевия прозорец, необходим на организма за изграждане на антители. На база официалните COVID-19 данни за България, ние решаваме така наречената “обратна задача” за да определим стойностите на тези параметри като функция на времето. След това, на база получените резултати, числено решаваме правата моделна задача на Коши и провеждаме компютърни симулации за предвиждане на динамиката на разпространение на пандемията в България за кратък период (до 2 седмици). Този подход ни позволява да следим числеността на групата от българи с придобит ваксинационен имунитет към даден момент. Предложените модел и методология за оценка на параметрите са приложими към COVID-19 данните на всяка една държава в света.

16. S. Margenov, T. Rauber, E. Atanassov, F. Almeida, V. Balanco, R. Čiegis, A. Cabrera, N. Frasher, S. Harizanov, R. Kriauzien, G. Rüdiger, P. San Segundo, A. Starikovicius, S. Szabo, B. Zavalnij. Chapter 6. Applications for ultrascale systems. In *Ultrascale Computing Systems*, pp 189–244. Institution of Engineering and Technology, 2019. **(SCOPUS)**  
**ISBN: 978-178561833-8** [http://dx.doi.org/10.1049/PBPC024E\\_ch6](http://dx.doi.org/10.1049/PBPC024E_ch6)

## Abstract

Many large-scale scientific applications have a need for ultrascale computing due to scientific goals to simulate larger problems within a reasonable time period. However, it is generally agreed that applications have to be rewritten substantially in order to reach ultrascale computing dimensions.

The needed reformulation of algorithms and applications from different areas of research towards their usage for ultrascale systems and platforms has to address different challenges that arise from the different application areas, algorithms and programs. The challenges include scalability of the applications using a large number of system resources efficiently, the usage of resilience methods to include mechanisms to enable application programs to react to system failures, as well as the inclusion of energy-awareness features into the application programs to be able to obtain an energy-efficient execution. The programming models should

enable to concentrate on the algorithmic aspects and problem-specific issues of the specific application area such that program development is supported as far as possible.

Some of these topics are addressed in the previous chapters, while this chapter is concerned with the usage of corresponding results in the context of large-scale applications. An important issue is the integration of the techniques developed to address the different aspects into the application programs. This chapter shows several aspects to adapt the former solutions to ultrascale applications, exploring algorithms, applications, and the impact of their translation into ultrascale systems.

### Абстракт

Поради желанието и практическата нужда компютърно да се симулират все по-големи и по-големи задачи за все по-малко време, много от научните приложения с голяма размерност (large-scale) изискват дори още по-мащабни (свръхмащабни, ultrascale) изчислителни ресурси. Все пак има е общоприето в научната общност, че софтуеъра на тези приложения трябва да бъде съществено пренаписан за да се достигне измерението на свръхмащабните пресмятания.

Необходимото преформулиране на алгоритми и приложения от различни области на изследване към тяхното използване за свръхмащабни системи и платформи трябва да отговори на различни предизвикателства, които възникват от различните области на приложение, алгоритми и програми. Част от предизвикателствата включват постигането на добра паралелна скалируемост на приложенията за ефективното използване на наличните ресурси, внедряването на устойчиви методи, включващи механизми за реакция на апликацията в условие на повреда в системата, както и използването на енергийно щадящи програмни модули за осигуряването на енергийно ефективно изпълнение на програмата. Програмните модели трябва да дават свободата за фокусиране върху алгоритмичните и проблемно-специфичните аспекти на конкретната сфера на приложение, като за целта базовата поддръжка на програмната платформа трябва да бъде максимално осигурена.

Част от тези теми вече са разисквани в предишните глави на книгата, докато в тази глава ще се концентрираме върху използването на съответните резултати за нуждите на високомащабните приложения. Много важна задача е ефективното съвместно интегриране в програмата на разнообразни технологии, разработени за различни нейни компоненти. Ще покажем различни възможности за адаптирането на предишни решения към свръхмащабни приложения, посредством изследване на алгоритмите, изследване на самите приложения, както и изследване на въздействието върху тях на пренаписването им за нуждите на свръхмащабните системи.

17. S. Harizanov, R. Lazarov, S. Margenov, P. Marinov. The Best Uniform Rational Approximation: Applications to Solving Equations Involving Fractional powers of Elliptic Operators. Practical guide.. 9, *IICT-BAS: Lecture Notes in Computer Science and Technologies*, 2019, 85 pages. ISBN:978-619-7320-08-4 <https://pa.iict.bas.bg/lcst/2019/09-2019-HLMM.pdf>

### Abstract

The handbook is intended to be used as a complementary part of the courses on “Numerical Methods for Sparse Linear Systems” and “Convex Analysis and its Applications to Image Processing” that are currently taught within the Master’s program “Computational Mathematics and Mathematical Modelling” in Sofia University “St. Kliment Ohridski”. The presented material can also serve as a short course on numerical methods for solving fractional diffusion problems and as an extension of existing master or PhD programs in the field of advanced scientific computations. The handbook considers the mathematical problem of solving systems equations involving fractional powers of self-adjoint elliptic operators. Due to the mathematical modelling of various nonlocal phenomena using such operators, a number of numerical solution methods have been introduced, studied, and tested in the last two decades. The handbook deals with the discrete counterpart of such problems obtained from finite difference or finite element approximations of the corresponding elliptic problems. All necessary information regarding the recently introduced by the authors’ method based on best uniform rational approximation (BURA) of a proper scalar function in the unit interval is provided. A substantial part of the handbook is the presented 160 tables containing the related coefficients, zeros, poles, extreme points of the error function, the terms of the BURA partial fraction decomposition, etc. Links to website where one can download the files with the data characterizing the particular rational approximations, which are available with enough significant digits, are also provided so one can use them in his/her own computations. The examples are presented in a form ready for computer exercises.

### Абстракт

Настоящото учебно помагало е предназначено да бъде използвано като допълнителна литература по курсовете: „Числени методи за системи с разреждени матрици“ и „Изпъкнал анализ и приложенията му в обработка на изображения“, които в момента се преподават в рамките на магистърската програма „Изчислителна математика и математическо моделиране“ в Софийския университет „Св. Климент Охридски“. Представеният материал може да послужи и като кратък курс по числени методи за решаване на задачи с дробна дифузия и като разширение на съществуващите магистърски или докторантски програми в областта на съвременните научни пресмятания. В помагалото се разглежда една конкретна математическа задача за решаване системи уравнения от дробна степен

на самоспрегнати елиптични оператори. През последните двадесет години бяха предложени, изследвани и тествани редица числени методи за решаване на такива задачи, което се дължи на тяхното приложение в разнообразни математически модели на не-локални явления. Тук се разглеждат дискретни аналози на такива задачи, получени след дискретизация на съответните елиптични задачи по методите на крайните разлики или крайните елементи. Предоставена е цялата необходима информация относно наскоро предложени от авторите метод на базата на най-добро равномерно рационално приближение (BURA) на подходящи скаларни функции в единичния интервал. Съществена част от ръководството са представените 160 таблици, съдържащи съответните коефициенти, нули, полюси, екстремални точки на грешката, разлагане в елементарни дроби на BURA-елементите и т.н. В допълнение са предоставени линкове към уебсайт с файлове с данни, характеризиращи конкретните рационални приближения, които са налични с достатъчно значещи цифри, така че читателят да може да ги използва в собствените си изчисления. Разгледаните примери са в подходящ вид за прилагане в компютърни упражнения.