



БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО ИНФОРМАЦИОННИ
И КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ



Секция: Информационни процеси и системи за вземане на решения

Красимира Донева Стоянова-Чокова

Модели и методи за оптимизация и управление на портфейл с използване на времеви редове

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователна и научна степен
“доктор”

Научна област: 4. Природни науки, математика и информатика
Професионално направление: 4.6 Информатика и компютърни науки
Докторска програма: 01.01.12 Информатика

Научен ръководител:
доц. д-р Васил Георгиев Гуляшки

София
2020

Съдържание

Увод	4
Глава 1. Анализ на моделите и методите за оптимизация и управление на портфейл	6
1.1 Управление на портфейл	6
1.2 Анализ на моделите на лицето вземащо решение (ЛВР) като обект на математическото моделиране	9
1.2.1 Моделиране на динамика в стойността на финансовите инструменти	17
1.2.2 Поведенчески финанси	21
1.2.3 Изводи	24
1.3 Еволюционни алгоритми за задачата за оптимизация на портфейл	24
1.3.1 Обща формулировка на задачата за селекция на портфейл	25
1.3.2 Модел средна вариация (Mean-Variance) на Markowitz (модел MV)	30
1.3.3 Алтернативи на модела средна вариация (Mean-Variance) на Markowitz (модела MV)	31
1.3.4 Реални ограничения (Real-world Constraints)	32
1.3.5 Алгоритми, базирани на евристики, вдъхновени от еволюцията в природата	39
1.3.6 Формулиране на задачи за многокритериална оптимизация	40
1.3.7 Практическа значимост на еволюционните алгоритми във финансовата област	41
1.3.8 Преглед на основните MKEA и техники	43
1.3.9 Изводи	44
1.4 Цел и задачи на дисертационния труд	45
Глава 2. Оптимизация чрез комбинация на FFA-PS. Хибриден еволюционен алгоритъм и методология за селекция на портфейл.	46
2.1. Модел на портфейл за няколко периода	47
2.1.1 Описание на изходните условия на задачата на портфейл за няколко периода	47
2.1.2 Подходът устойчива оптимизация	48
2.2 Динамична теория на перспективите за стойността на функцията	51
2.3 Двукритериален модел за оптимизация на портфейл	52
2.4 Хибриден еволюционен алгоритъм за оптимизация на портфейл на база метода на светулките и метода Pattern search	59
2.5 Методология за формиране на портфейл	68

Глава 3. Резултати от проведените числени експерименти	70
3.1 Модел с три актива и 10-годишни исторически данни	70
3.1.1 Резултати при оптимизация на портфейл с 3 актива чрез предложения двукритериален модел и използване на хибридният алгоритъм и със солвъра <i>fmincon</i> от Matlab	74
3.1.2 Резултати при оптимизация на портфейл с 3 актива чрез предложения двукритериален модел и използване на солвъра <i>fmincon</i> от Matlab	77
3.1.3 Сравнение на резултатите за портфейла с 3 актива, получени с двата подхода	80
3.2 Модел с шест актива и исторически данни за 10 години и 11 месеца	82
3.2.1 Резултати при оптимизация на портфейл с 6 актива чрез предложения двукритериален модел и използване на солвъра <i>fmincon</i> от Matlab	85
3.2.2 Резултати при оптимизация на портфейл с 6 актива чрез предложения модел (2.28) – (2.33) и използване на Хибридният алгоритъм	88
3.2.3 Сравнение на резултатите за модела с 6 актива, получени с двата подхода	91
3.3 Използване на предложените модели и алгоритъм за управление на портфейл	94
3.4 Изводи	96
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	100
Приноси	103
Публикации по темата на дисертационния труд	104
Декларация за оригиналност на резултатите	105
Приложение 1. Класификация на инвеститорите (вземашите решения) според признака „използвана мярка на риск“	123
Приложение 2. Исторически данни за трите актива за десетгодишен период	124
Приложение 3. Исторически данни за шест актива за период от 10 години и 11 месеца	127

Увод

Математическото моделиране във финансовата сфера представлява голям научен и практически интерес, тъй като изследването на икономическите системи, като борсите, банките, застрахователните и инвестиционните компании е важно както за самите участници в тези системи, така и за държавата от гледна точка на функционирането на финансовата система. Относно математическото моделиране, в частност оптимизацията на портфейли нашата страна има приноси в трудовете на Рачев [125, 126], Стоянов [217], Стоилов [216], и др.

Изучаването на горните висши икономически системи се явява сложна задача, доколкото те функционират в условията на неопределеност, причинена от вероятностната природа на протичащите в тях процеси, големият размер и сложността на самите системи, а също и влиянието на човешкия фактор. Във всяка от тези системи човекът като лице вземащо решение, оказва влияние на динамиката на изменението на параметрите на системата, но именно за банките, борсите и пр. това влияние се явява съществена, определяща реакция на системата на вземането на решения, и, най-вече, поведението на самите тях в голяма степен се определя от поведението на участниците, от техните индивидуални и колективни действия.

В класическата теория на финансите е приет математическият модел на представителния агент, явяващ се рационален и вземащ решение посредством максимизиране на своята полезност, въведена с класическата работа на Марковиц [155], при това във всички модели се търси стратегия за оптимално инвестиране. Предполага се, че на вземащият решение е известен законът за разпределението на бъдещата цена на финансовите инструменти. Тези две предпоставки – за рационалността на лицето, вземащо решение и познаването на закона за разпределението на бъдещата цена на активите, в реалния живот далеч не винаги се изпълняват. Изследвания за способностите на вземащите решения могат да бъдат видени в работите на Канеман [122, 123], Барбер и Один [13, 14, 175], Содерлинд [210], Малкиел [149]. Те показват неспособността на вземащите решения, а също и на финансовите аналитици да вземат правилните инвестиционни решения и да предскажат изменението на стойността на финансовите инструменти.

Тези факти поставят пред вземащия решение необходимостта от построяването на сложни модели на търсене на оптимално инвестиране при различни критерии за оптимизация. Също така, почти всички модели на рационалния агент, оптимизиращ своето поведение, изискват неизменност на закона за разпределение на цените на финансовите инструменти и устойчива оценка на неговите параметри. Поради тези

причини математическото моделиране като дейност подпомагаща управлението извършено в дисертацията е актуално.

Дисертационният труд е структуриран в увод, 3 глави, заключение, приноси, списък на публикациите, декларация за оригиналност и библиография.

В първа глава са анализирани съществуващите математически модели на вземащия решение като са представени предимствата и недостатъците им. Във основа на този анализ е обоснована необходимостта от нови, интелигентни, ефективни и същевременно достатъчно точни методи и техники, каквито се явяват еволюционните алгоритми. Направен е обзор на съществуващите еволюционни алгоритми с приложение във финансовата област, по специално за селекцията на портфейли.

Във втора глава е представен предложеният двукритериален оптимизационен модел за формиране на портфейл от различни активи. За решаването на този модел е предложен и Хибриден алгоритъм за селекция на активите, формиращи портфейла. Този нов хибриден алгоритъм за селекция на портфейл се базира на комбинирането на метода на светулките (*Firefly*) и метода на търсене по шаблон/еталон (*Pattern search*). По този начин се съчетават предимствата на двата метода като се постига намиране на глобално оптимално решение (в случай, че целевата функция е мултимодална) и прецизното локализиране на оптимума с помощта на техниката на свиване на размера на мрежата до предварително зададен толеранс в метода на търсене по еталон. Използвайки предложения двукритериален модел и хибриден алгоритъм е представена и методология за формиране на портфейл.

В трета глава са описани резултатите от проведените тестове за формулирани два модела – първият с 3 актива, на база исторически данни от 2008 г. до 2018 г., и вторият с 6 актива, използващ исторически данни от 2007 г. до 2018 г., на задачата за оптимизация на портфейл. Посредством два оптимизационни подхода Interior Point в средата Matlab и предложения нов хибриден алгоритъм за селекция на портфейл са решени съответни оптимизационни задачи, а получените резултати са сравнени по три критерия – брой итерации, брой изчисления на целевата функция и времето, за което се извършват изчисленията. Получените числени резултати показват, че предложените двукритериален модел и нов хибриден алгоритъм са приложими и ефективни при решаването на задачата за формиране на портфейл за няколко периода.

В заключението са анализирани получените резултати и се установи, че предложеният хибриден алгоритъм намира прецизно решение при оптимизацията на портфейли за относително кратко време, което доказва неговата ефективност за решаването на реални задачи за съставяне на портфейли. Показано, че този хибриден алгоритъм преодолява един от недостатъците на точните математически методи за времеви редове свързан със значителната им изчислителна сложност.

Глава 1. Анализ на моделите и методите за оптимизация и управление на портфейл

1.1 Управление на портфейл

Управлението на инвестиционен портфейл е ключов основен процес при боравенето с инвестициите във финансовата област. Този процес може да се разглежда като съставен от следните етапи: 1) избор на инвестиционна политика; 2) анализ на ценните книжа; 3) формиране на портфейл, включващ някои ценни книжа; 4) оценка на ефективността на портфейла; 5) преразглеждане на състава на портфейла.

Изборът на инвестиционна политика включва дефиниране на целите на инвеститора и на обема на инвестициите, оценка на видовете активи и избор на най-изгодните от тях при отчитане на факторите доходност и риск. Мениджърът/ЛВР натоварен с управлението на портфейла на конкретен клиент трябва да отчита мнението на клиента с оглед на неговите предпочитания за доходност на степен на риск. При несъгласие от страна на клиента може да се потърсят услугите на консултант или специалист по финансово планиране. Анализът на ценните книжа включва изучаването на отделните им видове в рамките на основни категории, определят се онези които са невярно оценени на текущия етап, правят се прогнози за бъдещата динамика на курсовете, разглеждат се акциите, прави се оценка на ставката на дисконтиране и се прогнозира размера на дивидентите, които се очаква да бъдат изплатени в бъдеще за конкретни акции.

Формирането на портфейл от ценни книжа включва двуетапна процедура на оптимизация. На първия етап се определят конкретните активи, в които ще се инвестира. На втория етап се изчисляват пропорциите на инвестиция капитал за разглежданите активи. При формирането на портфейла могат да се прилагат активни портфейлни, пасивни портфейлни и алтернативни портфейлни стратегии. При активните стратегии се извършва прогнозиране на факторите, които могат да влияят върху инвестиционните характеристики на даден клас активи, например: прогнозиран се бъдещите доходи, дивидентите, или показателите за цената и дохода. При облигациите се прогнозира бъдещото ниво на лихвените ставки, а при чуждестранните ценни книжа-очакваните обменни курсове на валутата. При пасивните портфейлни стратегии не се правят прогнози и не се иска информация за бъдещето. Те се фокусират върху диверсификацията (разнообразяването) на портфейла, осигуряваща максимално съответствие на неговата доходност към избрания пазарен индекс, при това се предполага, че цялата достъпна информация на пазара се отразява в пазарната котировка на ценните книжа. Освен тези полярно противоположни стратегии има и други стратегии, съчетаващи в себе си пасивния и активния елемент. Например за управление

на „ядрото“ на портфейла може да се прилагат пасивни стратегии, а за управление на останалите активи – активни стратегии. Съществуват и алтернативни стратегии при които се преценява, дали да се инвестира в частни дялове или в акции на възникващи предприятия, преценяват се валутни позиции, евентуално инвестиране в хедж фондове или прилагане на пазарно-неутрална стратегия.

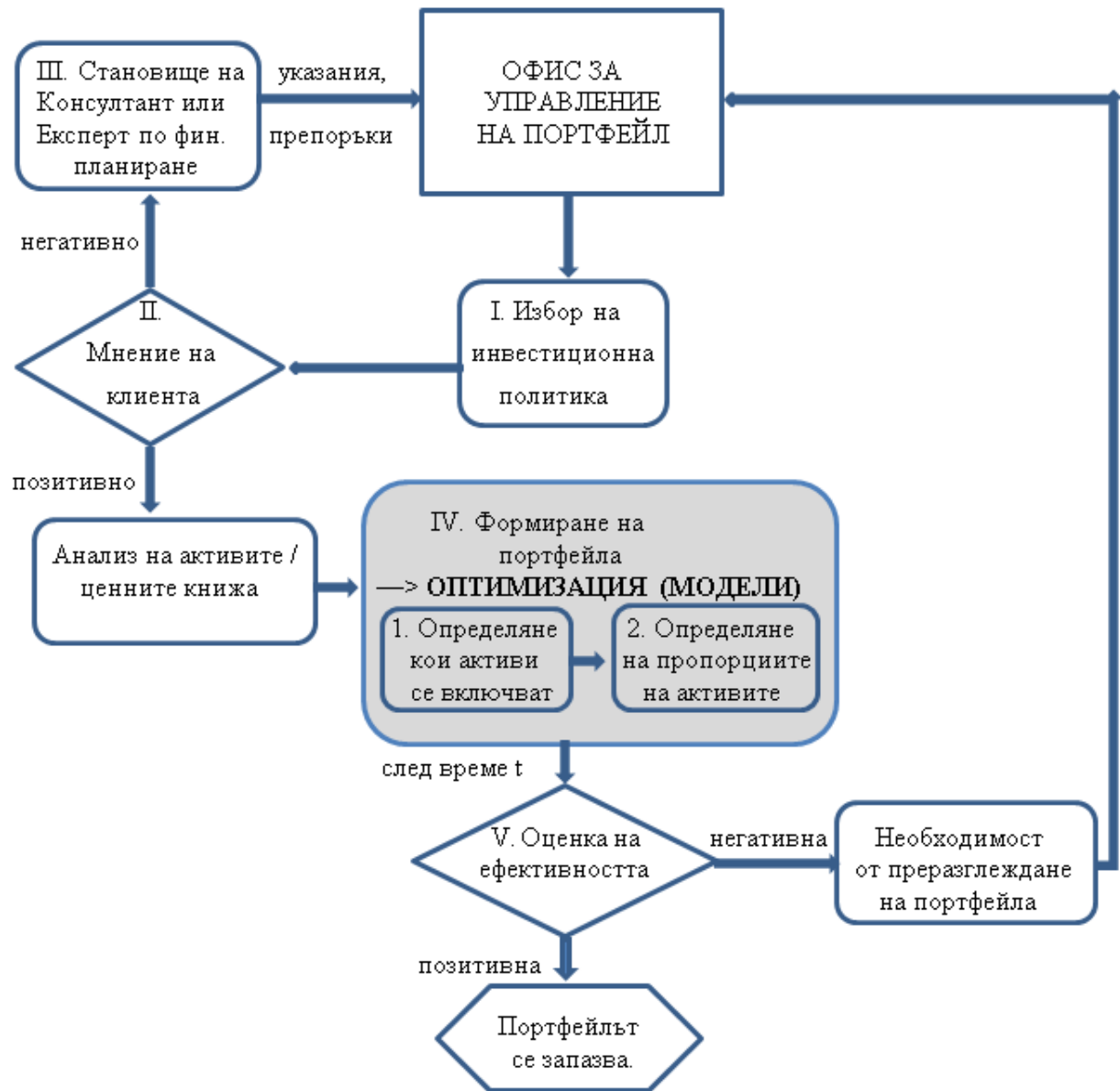
След етапа на формиране на портфейл обикновено се изчаква определен интервал време, след което се оценява ефективността на портфейла. На този етап се изчислява доходността от портфейла и получения резултат се сравнява с избрания базов показател. Той е известна количествена характеристика на движението на предварително избран набор от ценни книжа. В качеството на базисен показател може да бъде избран всеки от общо известните фондови индекси, например индекса S&P500, или един от облигационните индекси, публикувани от водещите консултантски компании. В последно време институционалните инвеститори заедно с фирмите занимаващи се с анализа на фондовия пазар, са разработили специални индекси, ориентирани към конкретни видове клиенти.

Ако оценката за ефективността на портфейла е положителна, то следва така формирания портфейл да се запази за нов краен период от време. След което се извършва нова оценка на ефективността. При негативна оценка на ефективността на портфейла се преминава на етап преразглеждане на портфейла, което е свързано с промени в целите на инвестирането, промени в курса на ценните книжа с течение на времето, промени в транзакционните разходи и т.н. Формираният при началните предпоставки портфейл след даден интервал от време може да се окаже не оптимален за клиента. Освен това клиентът може да промени отношението си към риска и доходността, а мениджъра от друга страна да промени своите прогнози. При това преразглеждане могат да се вземат решения за продажба на част от активите и за инвестиране на освободените средства в други активи/ценни книжа. След което отново да се извърши оптимизация на конкретните проценти на инвестициите в новия набор от активи.

При формирането на портфейла трябва да се разграничават рискови от безрискови активи. Рискови активи са онези, доходът от които е неопределен в бъдещето. Рискът за един актив се измерва с дисперсията или средно квадратичното отклонение на доходите от този актив, а риска за портфейла – с дисперсията или средното квадратичното отклонение на доходите от портфейла. При инвестиране само в едни актив инвеститорът се оказва зависим от колебанието на неговата курсова стойност. За това обикновено се включват най-разнообразни ценни книжа, което се определя като диверсификация на портфейла. При такъв портфейл значително се намаляват диверсификационните (несистемните) рискове. Избягването на напълно на риска е невъзможно тъй като съществува системен риск. Той се обуславя от общото

състояние на икономиката, което е свързано с фактори като война, инфлация, глобални данъчни промени, промени в паричната политика, и т.н. Процесът на управление на портфейл е отразен в следната блок-схема:

БЛОК-СХЕМА НА УПРАВЛЕНИЕТО НА ПОРТФЕЙЛ



1.2 Анализ на моделите на лицето вземащо решение (ЛВР) като обект на математическото моделиране

Сложността на математическото моделиране на действията на вземащият решение е обусловена от адекватното описание на неопределеността, присъща на поведението, необходимостта от измерване на статистическите закономерности, да се отчете и измери огромен обем динамично променяща се информация. От гледна точка психология за изучаване на причините и особеностите на човешкото поведение са разгледани класическите модели за формиране на оптимален инвестиционен портфейл и модели, отчитащи динамиката в стойността на различните финансови инструменти, оценката на параметрите на основа на статистически данни. Работата по второто направление е свързана с изследване процеса на вземане на решение и рационалността на осъществимите решения от гледна точка психология, започната от Даниел Канеман и Амос Тверски през 1968 г., а също и описание на парадоксите на избора и фактите. В моделирането на избора за оптимален портфейл основополагаща е работата по анализ на портфейл на Хари Марковиц [155], за която през 1990 г. получава Нобелова награда.

Марковиц разглежда проблема на формиране на оптимален портфейл в рамките на бюджетни ограничения при два противоречиви критерия, единият от които се явява ръст на капитала и се максимизира, а вторият се явява риска от възможните загуби, свързани с нестабилността на пазарите и колебанията в цените на финансовите инструменти, който подлежи на минимизация. Множеството допустими решения в задачата за двукритериална оптимизация се явява множеството на активите в портфейла, т. е. комбинация на ценни книжа. Предложеният модел на Марковиц се състои в следното: първият критерий (ръст на капитала) моделира математическото очакване на доходността на портфейла, а вторият критерий (риск на инвестицията) моделира дисперсията на доходността на портфейла (този подход е наречен mean-variance), като в класическия модел на Марковиц се залага нормален закон на разпределението, делът на ценните книжа в портфейла е неотрицателен (т.е. късите продажби на акции са забранени)¹ Математически поставена двукритериалната задача се решава с метода на последователната оптимизация на критериите, която се свежда до решението на задачата за квадратична оптимизация при линейните ограничения:

$$\begin{cases} D(R) \rightarrow \min \\ M(R) = m \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1.1)$$

Или към решение на задачата за нелинейна оптимизация с линейни критерии:

¹ Къса продажба (short selling) е продажба на нещо, което не притежаваш, с надеждата да го купиш в бъдеще на по-ниска от продажната цена, с което да реализираш печалба. Късите продажби се подчиняват на строги правила, едно от които е, че преди продажбата трендът на акциите трябва да е възходящ.

$$\begin{cases} M(R) \rightarrow \max \\ D(R) = d, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1.2)$$

Където x_i е дялът на ценната книга i в портфейла, $M(R), D(R)$ са математическото очакване и дисперсията на доходността (възвръщаемостта) на портфейла. Отбелязваме, че в [155] Марковиц е решавал първата задача.

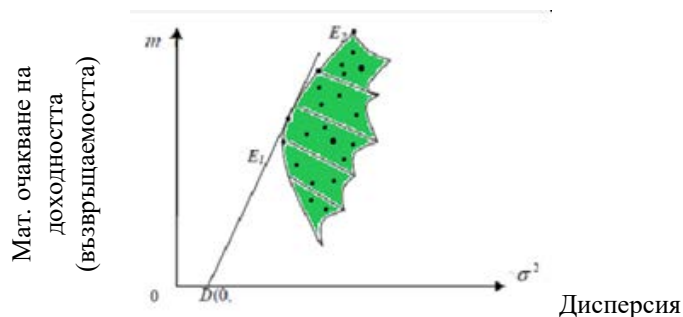
Идеята в подхода на Марковиц при решаването на задачата се състои в построяването на Парето-оптималната граница на множеството от допустими решения за критериите в равнината с координати „дисперсия $D(R) = \sigma^2$ и математическо очакване на доходността на портфейла $M(R) = m$ ”

След това върху тази граница да се намери оптималното решение при решаване на спомагателната задача

$$\begin{aligned} \alpha = \sigma^2 - \lambda m &\rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (1.3)$$

която геометрично съответства на намирането на допирателната към Парето-оптималната граница, явяваща се крива, съединяваща точките E_1 и E_2 (Фиг. 1), където E_1 съответства на портфейла с най-малката дисперсия от всички достъпни портфейли, а E_2 съответства на портфейла с максимална доходност от всички достъпни портфейли. В портфейлния анализ Парето-оптималната граница се нарича множеството от недоминирани вектори.

Векторът $X(\lambda) = (x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda))$, се явява решение на задача (1), параметрично описва всички портфейли от указаното Парето-оптимално множество при различни $\lambda \in [0, +\infty)$.



Фиг. 1 Допирателна към ефективното множество

Марковиц доказва, че функцията $x_i(\lambda)$ е частично линейна. Стойностите на λ , при които производната на поне една от функциите $x_i(\lambda)$ има прекъсване, се нарича околност, а съответстващите им портфейли на Парето-оптималната граница се наричат

портфейли в околността или допустими портфейли. Марковиц доказва, че допустимите портфейли притежават следните свойства: участъка на ефективното множество между сродните допустими портфейли се описва с линейна комбинация между тези портфейли, затова намирането на всички допустими портфейли в околността е достатъчно за определянето на всяко ефективно множество.

Изборът на конкретен портфейл зависи от предпочитанията на вземащия решение според стойността на очакваната доходност (m) и риск (σ^2), двойката от които (σ^2, m) определят точката на Парето-оптималната граница.

Въпреки очевидната простота при построяването на оптимален портфейл на ценни книжа по модела на Марковиц, самият модел притежава следните недостатъци: използваните в модела в качеството на критерии математическото очакване и дисперсия са приложими при нормален закон на разпределение на доходността на ценните книжа. В реалния живот обаче разпределението на доходността на ценните книжа не се явява нормално, следователно за намирането на оптимален портфейл трябва да се използват моменти от по-висок ред; Според акад. Попчев [180, 181] в реалния живот сложните обекти и системи се характеризират със съществени качествени и количествени особености, факторите на средата имат случаен характер, следователно аргументите на ЛВР са детерминирани количествени параметри. В случая очакваната доходност и дисперсията на ценните книжа се изчислява по статистически данни за минали периоди, затова за точност на изчисленията трябва да се използват наблюдения, получени при стабилно състояние на пазара. Построяването на Парето-оптималната граница е трудоемък за изчисляване и скъп по време процес, и често тази задача се решава с помощта на приближени методи.

Въпреки математическата обоснованост на модела на Марковиц, той не получава широко разпространение в практиката, с оглед гореизброените недостатъци, но това не му пречи да стане основополагащ за теоретични изследвания в областта на инвестирането във фондови пазари. В частност, в дейностите се използва аналогична идея на двукритериалната оптимизация, но с други критерии, например средна-полудисперсия (mean-semivariance) [151], средно-абсолютно отклонение [129], а също мерките за риск – средна VaR [121], средна CVaR [186] или вероятността от достигане на дадена степен доходност-дисперсия [141]. Въпреки недостатъците си, моделът на Марковиц присъства в гореизброените работи.

По-малко известен критерий е повишената надеждност (Safety-first), е разработен от Рой през 1952 г. [187].

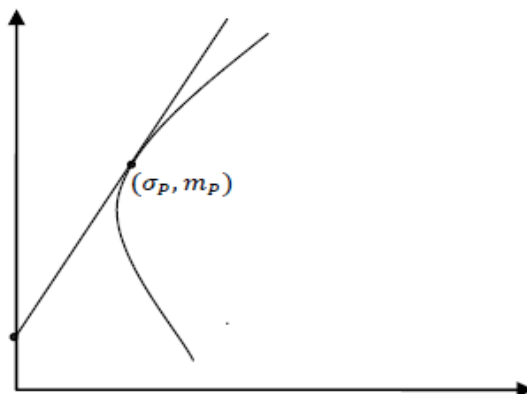
Рой изхожда от това, че не всички инвеститори (вземащи решения) имат за цел извличане на печалба, и моделира поведение на „внимателен“ инвеститор, който формира портфейл, така че да минимизира вероятността от настъпването на „лошо“

събитие, като под „лошо” събитие разбира намаляване на очаквания доход $M(W)$ под определения праг d .

Идеята в подхода на Рой се състои в следното: нека m и σ - очакваният доход и стандартното отклонение на дохода W са в края на инвестиционния период. Тогава може да се оцени горната граница на вероятността от „лошо” събитие с помощта на неравенството на Чебишев:

$$P(W \leq d) \leq \frac{\sigma^2}{(m - d)^2} \quad (1.4)$$

Следователно, минимизирането на вероятността от настъпване на „лошо” събитие може да се замени с минимизирането на нейната горна граница $\frac{\sigma^2}{(m - d)^2}$ или с максимизиране на т. нар. коефициент на повишената надеждност Safety-First Ratio $\frac{m - d}{\sigma}$. Геометрично оптималният от гледна точка теорията на Рой портфейл (т. е. портфейл P с минимална вероятност за намаляване на очаквания доход под критичния праг d) съответства на точка от Парето-оптималната граница-множество на допустимите портфейли, имаща най-стръмен наклон спрямо точките $D(0, d)$, намиращи се на ординатната ос.



Фиг. 2 Оптимален портфейл в теорията Safety-first.

В теорията си Рой допуска, че вземащия решение може по последната информация да анализира поведението на цените на финансовите инструменти и да оцени бъдещите стойности на $s_1, \dots, s_n$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ стандартните отклонения на бъдещите цени n на финансовите инструменти, търгуващи се на борсите, а също и коефициентите на корелация $r_{ij}, i, j = \overline{1, n}$ между всички ценни книжа.

Нека вземащият решение притежава в начален момент от време капитал W_0 и получава ценни книжа $i, i = \overline{1, n}$ в количество x_i .

Тогава $m = \sum_{i=1}^n x_i S_i$, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ и $W_0 = \sum_{i=1}^n x_i$. Рой доказва, че при нормален закон на разпределение на бъдещите стойности на ценните книжа Парето-оптималната граница се явява хипербола, и въвежда формулата за намиране в случая на нормално разпределение на самия „безопасен“ портфейл

$$x_i = \frac{\lambda}{\sigma_i} \sum_{j=1}^n \frac{\left(\rho_j - \frac{d}{W_0} \right)}{\sigma_j} \frac{\rho_{ij}}{|R|}, i = \overline{1, n} \quad (1.5)$$

и на съответната на този портфейл горна граница на вероятността за намаляване на очаквания доход на вземащия решение под критичния праг d

$$P(W \leq d) = \frac{|R|}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\left(\rho_i - \frac{d}{W_0} \right)}{\sigma_i} \rho_{ij} \frac{\left(\rho_j - \frac{d}{W_0} \right)}{\sigma_j}} \quad (1.6)$$

където $|R|$ - определя матрицата на коефициентите на корелация $R = (\rho_{ij})$, λ и коефициент на нормализиране, определящ се от условието $W_0 = \sum_{i=1}^n x_i$.

Недостатъците на този подход се явяват (така както и за подхода на Марковиц): използването на очакваната стойност и стандартното отклонение на стойността на ценните книжа се оправдава само в случая на нормално разпределение; необходимостта да се оцени очакваната стойност и стандартното отклонение на стойността на ценните книжа на основата на исторически данни и, съответно, необходимостта от наличност на стационарни редове с исторически цени за тяхната оценка; изчислителната сложност при използването на други (различни от нормалния) закон на разпределение за стойността на ценните книжа. Също така, в подхода Safety-first не се отчита склонността за риск на вземащия решение, този подход описва поведението само на „внимателния“ инвеститор, поставящ си за цел защита на вложенията, а не получаването на печалба.

Идеята на Рой за минимизиране на риска при възникването на „лоша“ за инвеститора ситуация довежда до възникването на концепцията „стойност под риск“ (Value-at-Risk) и др. мерки за оценка на риска, които активно се използват понастоящем в риск мениджмънта. В развитието на тези модели са предложени модификации на динамичните задачи за управление на портфейл [50, 203]; при условие, че цените се моделират от случайни процеси с възможни скокове (jump-diffusion process) [241] или техните закони на разпределението имат „тежки опашки“ [178].

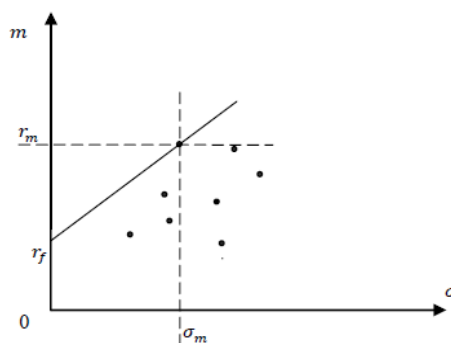
На основа на описаните горе модели на управление на финансови активи са били предложени модели на пазарно равновесие, например моделът на ценообразуване на финансови активи (Capital Asset Pricing Theory, CAPM) [193] предложен от Уилям

Шарп, Джек Трейнър, Джон Линтнер и Ян Мосин независимо един от друг през 60-те години на миналия век.

Допускания в модела: вземащите решения действат рационално и при съставянето на портфейла се интересуват от очакваната доходност и стандартното отклонение на доходността на ценните книжа (така, както е и в модела на Марковиц); информацията, достъпна на всички вземащи решения е еднаква; всички вземащи решения имат един и същи времеви хоризонт при планиране и еднакво оценяват очакваната доходност и стандартното отклонение на всички ценни книжа; предполага се отсъствие на оперативни разходи и съществуването на безрискова процентна ставка r_f по която вземащият решение може да вземе в дълг парични средства и, която е еднаква за всички вземащи решения (в изчисленията, по правило, се използват лихвените проценти по банковите депозити или доходността на дългосрочните облигации Treasury Bills).

Идеята в подхода на Шарп се състои в това, че доколкото вземащият решение абсолютно еднакво оценява безрисковата ставка, ковариацията, дисперсията и очакваната доходност на всеки актив, то следвайки Марковиц всички те избират един и същи портфейл, който се нарича пазарен портфейл. Този портфейл се състои от всички ценни книжа и делът на всеки от тях съответства на относителната им пазарна стойност.

Доколкото всяко лице, вземащо решение притежава собствена функция на полезност, то той разпределя своя капитал между безрискови активи и пазарен портфейл в такива пропорции, така че да получи необходимата степен на риск и доходност. По силата на еднаквост на процентната ставка на безрисковия актив r_f за всички вземащи решение (както и това че изборът им на пазарен портфейл е все едно какъв) портфейлите, които са ефективни от гледна точка на CAPM, са длъжни да се намират на една линия в координатите риск-доходност, съединяваща точките $(0, r_f)$ и (σ_m, r_m) , където r_m и σ_m са доходността и стандартното отклонение на доходността на пазарния портфейл. Тази линия е известна като “пазарна линия” (CML – Capital Market Line) и всички портфейли, невявяващи се комбинация на пазарния портфейл и безрисковия актив в една или друга пропорция, ще се намират по-долу от пазарната линия и ще бъдат неефективни (Фиг. 3).



Фиг. 3 Пазарна линия в модела CAPM

Уравнението на пазарната линия изглежда по следния начин:

$$M(r_p) = r_f + \frac{M(r_m) - r_f}{\sigma_m} \sigma_p, \quad (1.7)$$

където $M(r_p)$ и σ_p са математическото очакване на доходността и стандартното отклонение на портфейла на вземания решение, $M(r_m)$ и σ_m^2 са математическото очакване и стандартното отклонение на доходността на пазарния портфейл, а r_f е безрисковата ставка на доходност.

Шарп въвежда за всяка ценна книга i в зависимост от нейната доходност уравнение на пазарната линия от показателите на пазарния портфейл и ставката на безрисковото кредитиране във вида:

$$M(r_i) = r_f + \frac{M(r_m) - r_f}{\sigma_m^2} \sigma_{im} = r_f + \beta_i (M(r_m) - r_f), \quad (1.8)$$

където $\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$, r_i е доходността на ценната книга i , σ_{im} е ковариацията на доходността на ценната книга в пазарния портфейл. По този начин очакваната премия за риск $M(r_i) - r_f$ при вложения в ценната книга i е пропорционална на средното значение на премията $M(r_m) - r_f$.

По същия начин Шарп предлага да се оцени „мярката за чувствителност“ на актива i към изменението на пазарния бета-коэффициент на акциите β_i , който определя неговото изравняване с всички пазари. Например, ценната книга с коефициент $\beta = 1$ ще расте и пада в цената едновременно и в такава степен, както и за целия пазар, а доходността на ценната книга с $\beta = 2$ ще расте и пада в същата посока, но на двойно по-голяма величина от целия пазар. Ползвайки този модел, може да се определи фактът на надценяване или подценяване на ценната книга по нейната доходност и да се вземе решение за включването в портфейла на инвеститора. Добавянето на акции с $\beta > 1$

увеличава коефициента на целия портфейл и увеличава риска на вложенията, и обратно – включването в портфейла на ценни книжа с $\beta < 1$ намалява риска.

Недостатъци на модела САРМ: предпоставката за рационалност на вземащия решение, еднаквия достъп до информация и еднаквата оценка за доходността и риска на ценните книжа са нереалистични; не се отчитат множество фактори, влияещи на доходността на ценните книжа, разглежда се само зависимостта от пазарния портфейл; емпиричната проверка на модела показва значително отклонение между фактическите и разчетните данни и неустойчивост на стойността на β във времето [27].

Въпреки споменатите недостатъци, моделът на Шарп широко се използва в практиката и значението на показателя β за различни ценни книжа се изчислява на основата на стойността на линейна регресия $r_i = \alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i$ по статистически данни за месечната доходност на ценните книжа. В ролята на репер за определянето на r_m могат да бъдат използвани стойностите на фондовите индекси.

Друг класически подход за съставяне на портфейл от инвестиции е арбитражната теория на изчисленията (Arbitrage pricing theory, APT) [188], предложена от Стивън Рос през 1976 г.

Идеята на този подход се състои в използването на многофакторен модел на зависимостта на доходността на ценните книжа от различни фактори за прогноза на бъдещата доходност:

$$r_i = \alpha_i + b_{i1}F_1 + \dots + b_{ik}F_k + \varepsilon_i.$$

Факторите F_i в модела АРТ могат да бъдат стойностите на фондовия индекс (като показател за състоянието на финансовия пазар), нивото на процентните ставки, нивото на инфлация, темпът на ръст на БВП, и др. Коефициентите b_{ij} отразяват чувствителността на доходността на финансовия инструмент i към фактора F_j .

Рос разглежда задачата на вземащия решение за съставянето на портфейл $(x_1, \dots, x_n)$, който не се нуждае от допълнителни ресурси инвеститор, не е чувствителен към никакъв фактор и има положителна доходност. Такъв портфейл се нарича арбитражен²:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= 0, \\ b_{\rho i} &= \sum_{i=1}^n x_i b_{ij} = 0, j = \overline{1, k}, \\ m_{\rho} &= \sum_{i=1}^n x_i m_i > 0, \end{aligned} \tag{1.9}$$

Където b_{pj} е чувствителността на портфейла на инвеститора към фактора j , m_{ρ} е доходността на портфейла, m_i е доходността на i -тата ценна книга.

²арбитраж – получаването на безрискова печалба за извършване на операции с еднакви ценни книжа, но с различни цени

С помощта на асимптотичния анализ е доказано, че при $n \rightarrow \infty$ чрез съставянето на арбитражен портфейл може да се извлече положителна печалба при отсъствие на риск и при нулев начален капитал. Тук следва, че (доколкото в условията на равновесен пазар арбитраж е невъзможен) възможност за арбитраж на пазара отсъства, ако се изпълнява следното условие: при достатъчно голям брой n на активите, привлекателни за създаване на портфейл от ценни книжа, „болшинството“ от тях трябва да бъде такова, че между коефициентите $a_i, b_{i1}, \dots, b_{ik}$ трябва да бъде изпълнено „почти линейното“ съотношение

$$M(r_i) = \alpha_i \approx \lambda_0 + \sum_{j=1}^k \lambda_j b_{ij}, \quad (1.10)$$

Изхождайки от това съотношение, Рос въвежда формулата за очакваната доходност на ценната книга i

$$M(r_i) = r_f + b_{i1} (\delta_1 - r_f) + \dots + b_{ik} (\delta_k - r_f), \quad (1.11)$$

където всяков δ_j е равно на очакваната доходност на портфейла акции, които притежават чувствителност $b_{\rho j}$ към фактора j , равно на единица, и чувствителността към останалите фактори е равна на нула.

Недостатъци на модела АРТ: заключенията на модела са валидни само в случай на голяма стойност на n , т.е. за много големи пазари; необходимостта от определянето на състава и количеството на факторите, влияещи на доходността на ценната книга за прогнозиране на нейната доходност (отсъствието на значими фактори и включване на незначими фактори в регресията изкривява получените резултати).

1.2.1 Моделиране на динамика в стойността на финансовите инструменти

Един от ключовите проблеми на вземането на решения при покупката или продажбата на ценни книжа се явява въпросът за адекватната оценка на поведението за нейната бъдеща стойност. Познаването на закона за разпределението на бъдещата стойност като случайна величина е необходимо за оценка на математическото очакване, а също и на дисперсията и на други мерки за оценка на риска, използвани в рамките на модели за формиране на оптимален портфейл. За инвеститори, които не ползват модели за оптимално инвестиране, а вземат решения за покупка/продажба на ценни книжа на база прогнозирано повишение/понижение на тяхната стойност (такъв подход е характерен за търговци-спекуланти или търговци-поддръжници на техническия анализ), са достатъчни данни само за предполагаемото направление на изменението на бъдещата стойност на ценните книжа.

Методи на регресионния анализ. За математическото описание на поведението на бъдещата стойност (или доходност) на ценните книжа широко се използват методите на регресионния анализ. Например, както е споменато в т. 1. в моделите САРМ и АРТ за оценка на параметрите на модела се използва моделът на линейна регресия от вида

$$y = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i + \varepsilon.$$

Линейните регресионни модели се използват също за изследване на зависимостта на доходността на ценните книжа от нейната дивидентна доходност (dividend yield ratio, отношението на величината на годишния дивидент на акцията към цената ѝ [128]), коефициента „цена-печалба“) P/E (price-earnings ratio финансов показател, равен на отношението на пазарната капитализация на компанията към нейната годишна печалба) и коефициента P/B (Price-to-book ratio, финансов коефициент, равен на отношението на текущата пазарна капитализация на компанията към нейната балансова стойност) [135], банковата процентна ставка и величината на разпространението (разликата между най-добрата цена на заявките за продажба и за покупка в един и същ момент от време на който и да е актив) [116].

Недостатъците на регресионните модели при тяхното използване за прогнозирането на стойността на бъдещата доходност на ценните книжа са: необходимост от определяне на пълен набор значими променливи за обезпечаване на коректната интерпретация на резултатите (както е известно отсъствието на значими променливи води до изместване на оценката на коефициентите при останалите променливи и некоректност – и на другите показатели за качеството на модела, а включително незначимите променливи увеличават риска на мултиколинеарността, т.е. появяването на линейна зависимост между факторите на модела); необходимост от наличието на значителен обем статистически данни за адекватна оценка на параметрите на модела; преднамерена неадекватност на модела във формата на функционалната зависимост между променливите; относително невисока точност на получаваните прогнози; невъзможност да се анализира взаимовръзката между данните, достъпни за обработката във форма на крайни времеви редове.

Методи на времевите редове. Последният недостатък на моделите на регресионния анализ се явява принципен, доколкото както е показано в [172, 173] практически за всички изследвани времеви редове, описващи макроикономическите показатели на САЩ се оказва, че всички регресии получавани чрез обичайния метод на най-малките квадрати върху тях се явяват привидни (spurious), т.е. съгласно използвания модел зависимост между променливите присъства, доколкото коефициентите на тези регресии се явяват значими и няма нарушаване на предпоставките на регресионния модел няма, също в действителност няма никаква зависимост между входно-изходните променливи.

По тази причина при описаните макроикономически показатели построяването на регресия се заменя с моделиране на тези показатели във форма на времеви редове със специална структура. Обаче простите модели с такава структура, например, моделите на авторегресия (AR) от вида $x_t = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i} + \varepsilon_t$, модели на пълзяща средна (MA) от

вида $x_t = \sum_{j=0}^q b_j \varepsilon_{t-j}$, и общите модели на авторегресия-пълзяща средна (ARMA) от вида $x_t = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i} + \sum_{j=0}^q b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$, както е показано в [31], не представляват адекватно описание на финансовите редове поради нестационарността на последните. Освен това, тези редове могат да бъдат превърнати в стационарни по пътя на преход към редове от разликите на някакъв ред d от изходния ред, така че получените редове на разликите могат да опишат модела ARMA. Такъв модел се нарича интегриран модел на авторегресия (ARIMA) и в общия си вид изглежда по следния начин:

$\Delta^d x_t = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta^d x_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$. Този модел широко се използва за прогнозиране стойността на различните финансови инструменти [24, 118, 179].

За моделиране на такава особеност на борсови времеви редове, като редуване на периоди с неголяма волатилност с периоди с висока непостоянност (наричана клъстеризация на непостоянността [87]) са били предложени модели на авторегресионна условна хетероскедастичност (ARCH) [87]. Всичките тези модели описват изменението на дисперсията σ_t^2 на процеса $u_t = \varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2}$ или във вида $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2$ (ARCH), или $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$ (GARCH), или други обобщени модели ARCH. Значителен брой други иконометрични модели (а също и процедури и тестове за проверки и оценка на коефициентите в тези модели, оценка за качеството на моделите, проверки за изпълнението на предпоставките на моделите и оценки за качеството на прогнозите) са описани в [226].

Също както и моделите на регресионния анализ, моделите на времевите редове притежават недостатъци, към които се отнасят: 1) необходимост от наличие на значителен обем статистически данни за адекватна оценка на параметрите на модела; 2) необходимост от избора на адекватна структура и вид на модела (спецификация) на времевите редове; 3) сложност на непосредствената интерпретация на получените резултати; 4) трудност на математическото описание на свойствата на редовете, описващи моделите на сложна структура, условието на тяхната стационарност, методите за оценка на параметрите; 5) значителни изчислителни трудности, свързани с оценката на параметрите на моделите и провеждане на тестове за модели със сложна структура.

Стохастични диференциални уравнения (СДУ).

Друг способ за описание на динамиката на ценните книжа е свързан с използването на стохастични диференциални уравнения, в които изменението на цените или доходността X_t на борсовия пазар се моделира във вида

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t,$$

където W_t е Винеров процес, явяващ се непрекъснат аналог на случайните движения. Случайният процес X_t (описващ изменението на цените и доходността) може да се моделира с различни варианти на функциите μ и σ . Например за моделирането на динамиката на процентните ставки при определени цени на облигации се използват следните модели:

- модел на Мертон $dr_t = \alpha dt + \gamma dW_t$ [158] (един от първите предложени модели);
- модел на Васичек $dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \gamma dW_t$ [232] отразява факта на възвръщането с течение на времето на процентната ставка към своята средна степен β със скорост α .
- модел на Кокс, Ингерсол, Рос $dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \gamma(r_t)^{1/2} dW_t$ отчита зависимостта между изменчивостта $(\sigma(r_t, t) = \gamma(r_t)^{1/2})$ от значението на процентната ставка r_t .
- модел на Чен [45] движението на процентната ставка r_t управляващо три източника на пазарни рискове

$$\begin{aligned} dr_t &= (\alpha_t - r_t)dt + (\gamma_t r_t)^{1/2} dW_t, \\ d\alpha_t &= (\alpha - \alpha_t)dt + (\alpha_t)^{1/2} dW_t^1, \\ d\gamma_t &= (\gamma - \gamma_t)dt + (\gamma_t)^{1/2} dW_t^2, \end{aligned} \quad (1.12)$$

в които коефициентите на базовите модели (1.12) сами се явяват случайни процеси и описват аналогични стохастични диференциални уравнения.

Процесите на Леви (например [90, 125, 241]) също представляват сами по себе си описание на динамиката на цените (или доходността) на активите посредством стохастични диференциални уравнения. Тези процеси могат да бъдат представени като сума от няколко компоненти: първи и втори компонент, описващи тренда съставляващ динамиката на стойността на активите и относителните колебания, а третия моделира изменението в стойността на актива като реакция на вътрешни събития:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t + dJ_t, \quad (1.13)$$

където J_t е комбиниран процес на Поасон с интензивност на потока на вътрешните събития λ .

Недостатъци на методите, основани на използването на стохастични диференциални уравнения.

Освен вече споменатите недостатъци, присъщи на регресионните модели и моделите на основата на времевите редове, моделите във форма на стохастични диференциални уравнения притежават следните допълнителни недостатъци: 1) сложност при получаването на аналитично и приближено решение на уравнения, адекватно описващи реалните борсови процеси, доколкото предположенията, при които са въведени уравненията са сложно проверими; 2) сложност на математическия апарат за

разбиране и използване от вземащия решение; 3) сложност на реализацията на решението в практическата работа на участниците.

Други методи

За прогнозиране на бъдеща стойност на ценни книжа широко се използват непараметрични методи [226], методи за анализ на данни и машинно обучение [88, 225]. В частност, сред непараметричните методи значителна популярност в последно време придобиват невронните мрежи [87, 165, 174]. Въпреки че всички описани типове модели имат определени достоинства, например, не налагат ограничения на характера на търсените зависимости между променливите, извличат от данните скрити взаимовръзки и способности на обучения, на тези модели са присъщи едни и същи недостатъци, както и на разглежданите по-горе параметрични модели. Например, в случай на невронна мрежа, изборът на вида на мрежата (количества слоеве и неврони) представлява значителна сложност, за обучението на мрежата е необходима обработка на големи масиви информация, а главното – съответствието на модела на историческите данни не гарантира висока точност на прогнозата.

1.2.2 Поведенчески финанси

Развитието и активното приложение на математическите методи в икономиката в началото и средата на XX век са довели до появяването на модели на представителния агент, явяващ се рационален, имащ достъп до всяка финансова информация и умеещ да я интерпретира вярно, използващ теорията за очакваната полезност при вземането на решения в условията на неопределеност на финансовите пазари. Такива модели за вземане на решения бяха описани в част 1.1.

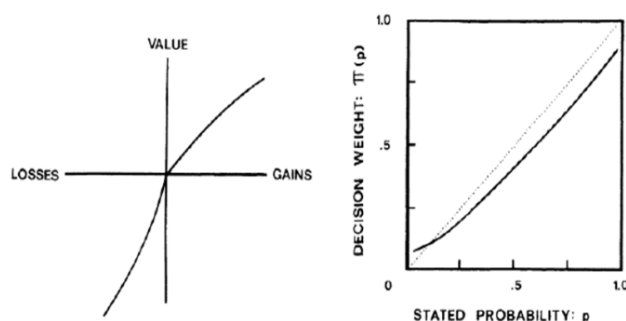
Г. Саймън [210] обръща внимание на недостатъците в предположението за рационалността на човека и въвежда понятието ограничена рационалност (bounded rationality), свързан с недостатъчната информация и времето за вземане на решения, а също и с наличието на когнитивни грешки. Саймън предположил, че човекът в следствие своята ограничена рационалност не може да решава големи и сложни оптимизационни задачи, изискващи получаване и обработка на големи количества информация, и взема решения, основаващ се на няколко евристични правила вместо намирането на решения посредством оптимизация. Саймън предложил концепцията за вземане на решения (задоволителния избор *satisficing choice*), съгласно който човек избира тези алтернативи, оценки (стойност на полезност) които превишават някаква определена степен.

Д. Канеман и А. Тверски [123, 229, 230] предлагат евристиката (“правило на големия палец”, *rule of thumb*), присъща за хората при вземането на различни решения на основата на ограничена информация:

- евристика репрезентативност – обектът се причислява към група обекти, ако той притежава характерни признаци на обекта на тези групи,
- евристика достъпност – хората считат най-вероятни тези събития, които лесно се помнят или за които те повече знаят
- евристика анкерирание – хората са склонни да се ориентират в някаква точка от търсенето при вземане на решение.

Въз основа на анализ на многочислени емпирични наблюдения и психологически експерименти, А. Тверски и Д. Канеман [122] създават през 1979 г. теорията на перспективите, за която през 2002 г. Канеман получава Нобелова награда по икономика за неговата работа в *Теория на перспективите*; в която изборът на човека в ситуация на неопределеност се моделира не с помощта на функцията на полезността на фон Нойман-Моргенщерн, а с помощта на функцията на ценността $v(\bullet)$, която е асиметрична на относителната загуба и печалба и отчита наличието на отправна точка (reference point), и тегловна функция $\pi(\bullet)$, отчитаща споменатото възприятие на човека за вероятността за реализация на събитие – хората надценяват „малките” вероятности и, обратно подценяват „средните” и „големите” вероятности (Фиг. 4)

Когато индивидът, вземащ решение, оценява лотарийно $(x, p; y, q)$, означаващи получаването на x с вероятност p и получаването на y с вероятност q , с помощта на своята теглова функция и функцията на ценността като стойност $\pi(p)v(x) + \pi(q)v(y)$ и между различните лотарии избира тази, за която съответната стойност се явява най-голяма. В последствие през 1992 г. Д. Канеман и А. Тверски предлагат кумулативната теория на полезността [231], в която тегловата функция е модифицирана. Практическото приложение в задачата инвестиране на фондов пазар теорията на Канеман и Тверски не намира, доколкото построяването на функцията ценност и тегловата функция на инвеститора представлява само по себе си много сложна задача.



Фиг. 4 Вид на функцията на ценност (вляво) и теглова функция (вдясно).

По отношение на задачата за вземане на решение на борсата изследователите по правило ограничават търсените факти за отклонението на поведението на инвеститора от рационалното, а също и анализ на причините и източниците на ограничената рационалност на инвеститорите [69, 90, 219], основни от които се явяват: 1) недостиг на

време за получаване, обработка и анализ на информация, необходим за вземане на инвестиционното решение. В частност, както е описано в [14], частните инвеститори често купуват „акции по слух“, т.е. такива, които често „хвърчат“ в новините и са широко известни. В [68] считат, че хората са склонни повече да се доверят на днешната информация за състоянието на пазара, не желаят да оценяват ситуация с предистория, а също голямо значение има достъпността на тази информация. Проведените в [170] изследвания дават основание да се твърди, че ако указаната информация не се явява скрита, но е много слабо известна и достъпна не за всички участници, то пазарът не реагира на нея нито на цените, нито на обемите на търгуваните финансови инструменти;

2) емоционални фактори, т.е. влиянието на емоции, като страх, лакомия и пр., а също и свръхувереност в своите действия (*overconfidence*). Например, за анализа на влиянието на тези емоции на инвеститора в процеса на вземане на решение в [144] използват тестове на различни физиологични реакции на тялото (честота на сърдечните съкращения, пулс, кожна реакция на проводимост) във време на определени пазарни събития (смяна на тренда, увеличаване на изменчивостта или обема на търговията и др.) в сравнение с контролните периоди на стабилен пазар. Оказало се, че инвеститорите с голям опит са емоционално по-слабо чувствителни към събитията на пазара на ценни книжа, в същото време по-малко опитните са повече чувствителни към краткосрочните изменения на пазара в сравнение с опитните колеги.

В [14, 132] е описано, че частните инвеститори също са свръхуверени (*overconfident*) в това, че те вярно интерпретират достъпната информация, което влече след себе си свръх активно участие в търгове и големи загуби за инвеститорите;

3) социални фактори, т.е. влиянието на околната среда върху процеса на вземането на решение и „склонност да се следват други“ (*herding*). Известно е, че инвеститорите, не притежаващи специални знания, нито време за вземане на информирани решения, са склонни към „имитации“, т.е. копират действията на друг инвеститор [189, 226, 235]. В качеството на инвеститор (т. нар „гуру“), с който тези инвеститори се съобразяват, е такъв който те считат за по-опитен, или удачен, или имащ достъп до скрита за останалите информация (инсайдери). Интересно е, че даже професионални инвеститори вземат под внимание решения на други инвеститори, проявяват склонност да следват тълпата в такава група дори повече, отколкото по неопитните [235]. В [226] е показано, че при инвеститорите може да има причини за имитация на чужди решения, ако това би било изгодно за тях, а в [189] при изследване на активността на малките инвеститори на пазара на валутните фючърси е бил особено отбелязан факта на повтарянето от страна на малките спекуланти на действията на крупните спекуланти.

Стадното поведение на инвеститорите също така се анализира в [75], където подобно поведение се обяснява с очакването на бъдещи печалби, личните мотиви на агентите (например, желанието на мениджърите да защитят своята репутация) или също

така каскадният модел, когато агента, има негативна информация за даден актив, но наблюдава действията на други участници, и може да промени своето мнение и да игнорира собствената си информация. Свръх-вниманието към действията на съседите, даже когато инвеститорът следва и отчита само успешните действия на съседите, води до спекулативни „балони” и сризове на борсите [108].

В същото време личните характеристики на инвеститорите, по-значимите, нямат значение, в частност, опитите да се намери зависимост между успешната работа на инвеститора и неговите професионални характеристики (възраст, опит, размер на капитала, степен на образование и пр.) [145] или пола принадлежност на инвеститора [183] не са се увенчали с успех. А изводите [43] затова, че доходността на инвестиционните фондове, управлявани от мениджърите с докторска степен (а също притежаващи публикации в топ журналы по икономика и финанси) следва да се считат за спорни, доколкото са проведени на основата на регресията с показател R^2 , непревишаващ 1%. Оспорването на тези изводи илюстрира съдбата на хедж-фонда Long-Term Capital Management, претърпял крах през 1999 г., въпреки, че практически половината от неговите участници и партньори имат научни степени, и в състава на партньорите са били Р. Мертон и М. Шоулз, Нобелови лауреати по икономика.

1.2.3 Изводи

От направения обзор на основните математически модели за оптимално инвестиране и на моделите и методите за количествена оценка на динамиката на изменението на финансовите показатели може да се установи, че построяването им се явява сложна задача, доколкото те функционират в условията на неопределеност, причинена от вероятностната природа на протичащите в тях процеси, големи по размер и сложни финансови системи като влияе и човешкият фактор. Обзорът на емпиричните изследвания свързан с поведенческите финанси показва необходимост от създаване на нови математически модели за количествена оценка на стойността на финансовите инструменти с оглед подпомагане на вземащото решение.

Във връзка с гореизложеното е необходимо да се анализират също и еволюционните алгоритми и математическите модели подпомагащи дейността на лицето вземащо решение за оптимизация на броя активи и техните пропорции в съдържанието на портфейл.

1.3 Еволюционни алгоритми за задачата за оптимизация на портфейл

В този раздел е направен кратък преглед на някои добре познати приложения на многокритериалните еволюционни алгоритми (МКЕА) за задачи за оптимизация на портфейл. Някои основни и важни приложения са разгледани накратко. В [197] се отбелязва, че основното предимство на МКЕА е тяхната способност за изследване на

много критерии едновременно. Следователно, те предлагат добри възможности за подпомагане вземането на решения във финансовата област, когато трябва да бъдат решавани многокритериални задачи. В Таблица 1 са дадени МКЕА, използвани за задачата за селекция (избор) на портфейл във финансовата област:

Таблица 1. Многокритериални еволюционни алгоритми МКЕА при оптимизация на портфейл

Задача	използвани МКЕА	Литература
Селекция на портфейл	AbYSS	[185]
	FastPGA (Бръз Парето ГА)	[185]
	GA, GP	[7, 16, 41, 42, 64, 84, 92, 97, 110, 111, 139, 148, 177, 207, 207, 214]
	Memetic algorithm	[8, 9]
	IBEA	[81]
	MOCeII	[185]
	MKEA/D	[248]
	MOGA	[211]
	NSGA, NSGA-II	[4, 143, 150, 163, 185, 211, 220, 223]
		[3]
	PESA	[4, 32, 77, 81, 163, 211]
	SPEA2	[211]
	VEGA	[34], [48] (базирани на обвивки - envelope-based),
	Hybrid	[223] (PSEA+RLP), [240] (GA+PSO),
		[102] (MKEA+SA)

1.3.1 Обща формулировка на задачата за селекция на портфейл

Това е трудна многокритериална оптимизационна задача във финансовата област. Много изследователи са посветили усилията си за разработване на ефективни алгоритми за решаването ѝ, поради нейната важност. Тази задача е свързана с избора на набор/колекция от активи, което може да бъде извършено както от организация, така и от физическо лице. Изборът трябва да бъде направен по такъв начин, че очакваната възвръщаемост да се максимизира, докато в същото време рискът да се сведе до минимум. В зависимост от предпочитанията на потребителите обикновено се търсят различни компромиси.

Формулирайки тази задача от гл. т. на оптимизацията, Марковиц [155] посочва, че в идеалния случай, инвеститорът ще търси оптимален портфейл, т.е., портфейл с минимален риск (в рамките на определен толеранс) като същевременно увеличава възвръщаемостта. По-долу е представена стандартната формулировка на Марковиц на задачата за избор на портфейл при множество критерии.

Нека са дадени набор от финансови активи $n \in \mathbb{N}$. В периода $t_0 \in R$, всеки актив i има определени характеристики, описващи неговата бъдеща очаквана доходност: Всеки актив i има очаквана норма на възвръщаемост μ_i в парична единица (напр. долари),

която се плаща в момент от време $t_1 \in R, t_1 > t_0$. Това означава, че ако имаме $y \in R$ единици от актива i във момента t_0 очакваната доходност от актива в момента t_1 ще бъде $\mu_1 y$ единици. При това ковариациите между нормите на възвръщаемост на всички активи се дават посредством симетричната матрица $\zeta := (\sigma_{ij})$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. В тази пряка нотация σ_{ii} е вариацията на нормата на възвръщаемост на i -тия актив, а σ_{ij} е ковариацията между нормата на възвръщаемост на i -тия актив и нормата на възвръщаемост на j -тия актив.

Портфейлът се дефинира с вектора $x := (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, който съдържа пропорциите (теглата) $x_i \in R$, на активите $i \in \{1, \dots, n\}$ в своя i -ти компонент. Всички пропорции (тегла) x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ трябва да бъдат неотрицателни.

В стандартната формулировка на задачата теглата на портфейла се нормализират при следните условия:

$$\sum_{i=1}^n (x_i) = 1 \quad (1.14)$$

С оглед контекста на специфичната задача има допълнителни ограничения на теглата, например долни граници (общото ограничение е $x_i \geq 0$), горни граници и/или интегрални ограничения. Множеството на всички неограничени портфейли се отбелязва с $U \subseteq R^n$, а наборът от възможните портфейли, които отговарят на необходимите ограничения се обозначава с $F \subseteq U$. Ако специфичната задача за портфейлна селекция е неограничена, то се предполага, че $F = U$.

Простите ограничения от тип линейни неравенства (долна и горна граница или под-таван) са свързани с изискването, че пропорциите (теглата) в портфейла трябва да са неотрицателни:

$$0 \leq x_i \leq 1, i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.15)$$

Съществуват различни ограничения в реалното управление на фондовете, различни от стандартното ограничение в модела на Марковиц. Най-често срещани са типичните “под-таван” ограничения или кардинални ограничения, но също в литературата са били предлагани и по-сложни ограничения и те са били включвани в по-сложни модели. Подробно обсъждане на различни типове ограничения е представено в [184]. Понсич и др. отбелязват в [184] че подобренията на модела са свързани с (i) интегрирането на реалистичните ограничения, (ii) добавянето на нови критерии (най-вече за формулиране на показателите на риска), и до известна степен, (iii) ползването на съотношението на Шарп.

Обичайно, се приемат най-малко две влизащи в конфликт целеви функции (критерии). Функцията на възвръщаемост $f_{\text{възвръщаемост}}(x)$, която трябва да се максимизира и функцията на риска $f_{\text{риск}}(x)$, която трябва да се минимизира. Нека с μ^T е означен векторът на геометричната средна възвръщаемост. Освен това нека $\zeta = (\sigma_{ij})$ е $n \times n$

симетрична ковариационна матрица с $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ и $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ за $i \neq j$, и $i, j \in \{1, \dots, n\}$. В тази нотация σ_{ii} е вариацията на възвръщаемостта на актива i а σ_{ij} е ковариацията между възвръщаемостта на i -актив и възвръщаемостта на j -тия актив.

В стандартната формулировка на Марковиц тези функции се дефинират по следния начин:

$$f_{\text{възвръщаемост}}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i \quad (1.16)$$

$$f_{\text{риск}}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \quad (1.17)$$

При дадената дефиниция функцията $f_{\text{възвръщаемост}}$ представлява претеглената сума на очакваната норма на възвръщаемост от активите. И в горната спецификация на $f_{\text{риск}}$ стандартното отклонение на нормата на възвръщаемост на портфейла е избрано като мярка за риска, което описва нивото на несигурност в бъдещ краен момент t_1 .

В контекста на управлението на портфейл, осъществимият портфейл $x \in F$ е доминиран спрямо осъществимия портфейл $y \in F$ ако е изпълнено поне едно от следните условия:

$$f_{\text{възвръщаемост}}(x) < f_{\text{възвръщаемост}}(y) \wedge f_{\text{риск}}(x) \geq f_{\text{риск}}(y) \quad (1.18)$$

$$f_{\text{възвръщаемост}}(x) \leq f_{\text{възвръщаемост}}(y) \wedge f_{\text{риск}}(x) > f_{\text{риск}}(y) \quad (1.19)$$

Тъй като рационалните инвеститори предпочитат недоминирани портфейли пред доминирани такива, някой обикновено е заинтересован от намирането на приближение/апроксимация на т.нар. ефективна граница, която е идентична с множеството от всички недоминирани портфейли. В стандартната финансова литература, това е формулирано като еднокритериална задача с ограничения: При дадена норма на възвръщаемост r^* , да се намери допустим портфейл $x^* \in F$, удовлетворяващ:

$$f_{\text{възвръщаемост}}(x^*) = r^* \wedge f_{\text{риск}}(x^*) = \min_{x \in F} \{ f_{\text{риск}}(x) \}. \quad (1.20)$$

Ако няма въведени ограничения или други рестрикции, повишаващи сложността, то решението на задачата може да се търси с алгоритмите на стандартното квадратично програмиране, при допускането, че ковариационната матрица ζ е положително определена.

Както е посочено в [197, 234] това предположение може да бъде нарушено в случая на реална задача за селекция на портфейл. Освен това, нарушението не е невероятно за реални данни, особено когато n е голямо число, тъй като ковариациите се оценяват от реалната цена на поредицата от активи, която не е задължително да отговаря априори на дадените рестрикции от математическия инструмент за анализ на портфейла. По тази причина, МКЕА подходът е по-подходящ за търсене на решение на задачата.

По-долу са представени някои конкретни приложения на МКЕА за решаване на задачи за портфейлна селекция.

В генетичните алгоритми, предназначени за решаване на стандартната двукритериална задача на Марковиц, целевата (фитнес) функция се представя обикновено във вида:

$$f(x) = f_{\text{възвръщаемост}}(x) - f_{\text{риск}}(x) \quad (1.21)$$

и $f(x)$ трябва да се максимизира.

Аранха и Иба [7] разработват специфична представителна схема, доста сходна с генетичното програмиране [137], която адаптира базирана на “дърво” конструкция на портфейл. Преди числения експеримент, авторите показват, че в повечето случаи техниката на базирано на “дърво” представяне трябва да ускори сходимостта. След това, новата кодираща схема се сравнява с класическото гама-базирано представяне. Резултатите показват, че броят на избраните активи е много по-малък при базирано на “дърво” кодиране, което подчертава факта, че гама-базираният метод не е в състояние да изхвърли активи, които слабо допринасят за глобалния портфейл.

В [34] Бранке и др. се предлага метод за портфейлна селекция чрез базиран на “плик” многокритериален еволюционен алгоритъм. Този МКЕА предоставя някои изпъкнали подмножества на множеството от всички възможни портфейли и за всяка подгрупа се изпълнява алгоритъм на критичната линия. Накрая частичните решения се обединяват, за да се получи решение на оригиналната неизпъкнала задача. Авторите показват, че техният подход значително превъзхожда някои МКЕА върху дадени реперни задачи.

Генетичен алгоритъм с недоминирано сортиране (NSGA) се ползва от Ведараян и др. в [234], за да се реши *задачата за оптимизация на портфейл от инвестиции*. Авторите смятат, че в допълнение на постановката на задачата съгласно Марковиц, трябва да се отчитат и транзакционните разходи (цена), които биха се платили за смяната на активите в портфейла (ребалансиране), и тази допълнителна съставна част води до задачи, решавани със стандартни алгоритми на квадратичното програмиране. В предложения подход освен функциите $f_{\text{риск}}$ и $f_{\text{възвръщаемост}}$ се използва и трета целева функция, която се минимизира:

$$f_{\text{разходи}}(x) = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \tilde{x}_i)^2, \quad (1.22)$$

където $\tilde{x}_i \in R_+^0$ е дадено първоначално тегло на актива i в портфейла, което се променя поради потенциалното плащане за ребалансиращи транзакции, а константата $c_i \in R$, $i \in \{1, \dots, n\}$; е транзакционната цена за актива i . Ведараян и др. прилагат този подход за дадени пет примерни активи. Този труд е едно ранно приложение на МКЕА-методологията върху задачи за портфейлна селекция и осигурява дори практическа

обосновка за приложение на тази методология върху стандартните формулировки на Марковиц, там където се провалят подходите на квадратичното програмиране.

Щрайхерт и др. [220] експериментират както с двоичното кодиране, така и с реално числено кодиране използвайки NSGA за решаване на задачата за портфейлна селекция с ограничения.

Лин и др. предлагат в [143] хибриден алгоритъм за апроксимация на достижими недоминирани портфейли, които комбинират с елементи от NSGA-II на Деб и др. [71] с концепции, ползвани в еднокритериалния еволюционен алгоритъм (ЕА) GENOCOP на Михалевич & Яников [159].

Пазарната цена на единица от актива i , който може да се купи, е обозначена с p_i . За всеки актив $i \in \{1, \dots, n\}$ има променлива транзакционна цена $c_i \in \mathbb{R}$, която е пропорционална на единица от актива i , който трябва да се купи. В допълнение, има фиксирана транзакционна такса F_i , която се дължи в случай, че активът i е въведен в портфейла. Вземането предвид на транзакционната цена дава различна възвръщаемост на целевата функция:

$$f_{\text{възвръщаемост}}(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i x_i} \left(\sum_{i=1}^n (\mu_i - c_i) p_i x_i - \sum_{i=1}^n F_i 1_{\{x_i > 0\}} \right), \quad (1.23)$$

където характеристичната функция се дефинира по следния начин:

$$1_{\{x_i > 0\}} = \begin{cases} 1 & x_i > 0, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases} \quad (1.24)$$

Функцията на риска е вариацията както в стандартната формулировка за избор на портфейл, но записана в термините на целочислени променливи x_i и цени p_i :

$$f_{\text{риск}}(x) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i x_i c_j x_j \sigma_{ij} \quad (1.25)$$

В изследването си Лин и др. [139] разглеждат вариант на задача за стандартната портфейлна селекция на Марковиц с допълнителни ограничения. С оглед на сложността на задачата подходът с МКЕА изглежда разумен. Еднокритериалният алгоритъм GENOCOP се използва за корекция на недопустимите решения. Той е комбиниран с рамката на NSGA-II алгоритъма. Авторите сравняват финалните индивидуални фондове, открити чрез МКЕА с глобално оптималните решения за съответната задача за портфейлна селекция без ограничения, без транзакционните разходи и променливи с реални стойности. Авторите получават резултат, че решението, получено чрез МКЕА е добро приближение на точното решение.

Анагностопулос и Маманис [4] използват вариация на модела на Марковиц с три целеви функции (три критерия): стойност на възвръщаемост, риск и брой на активите в портфейла. В своя труд авторите сравняват три различни МКЕА алгоритъма: NSGA-II, PESA и SPEA2. Експериментите показват, че SPEA2 е най-добрият алгоритъм за

задачата за многокритериална оптимизация на портфейл както с ограничения, така и без ограничения.

В [163] Мишра и др. използват SPEA2 и NSGA-II многокритериални алгоритми за решаване на задачата за оптимизация на портфейла. Авторите правят сравнително изследване на тези алгоритми. Експерименталните резултати от различни експерименти показват, че алгоритъмът NSGA II превъзхожда микро-GA алгоритмите [52].

Чиам и др. [48] са предложили хибриден алгоритъм с асоциирани генетични оператори. Експерименталните резултати за задачи без ограничения показват ясно превъзходство на предлагания МКЕА с вариращо максимално тегло на актива като инициализиращ метод. Приложен към задача с ограничения, МКЕА може да достигне решения близки до истинския фронт без ограничения. Авторите също така подчертават влиянието на ограниченията върху размера на свързаните портфейли, както и върху размера на портфейлите според местоположението им в Парето фронта. Както се очаква, портфейлите разположени в областта "малък риск, ниска възвръщаемост" са тези, които имат много активи, тъй като диверсификацията на инверсията на много активи има ефекта на дистрибутиране на риска; обратно, портфейлите с висока възвръщаемост (и висок риск) участват с малко активи.

Няколко други МКЕА за оптимизация на портфейл са включени в литературните източници, цитирани в Таблица 3 Базисни МКЕА техники.

1.3.2 Модел средна вариация (Mean-Variance) на Markowitz (модел MV)

Съществуват няколко различни формулировки на еднокритериални задачи с модел за оптимизация - средна вариация на Марковиц (MVO). Една от тях е следната:

$$\min_x \frac{1}{2} x^T \zeta x \quad (1.26)$$

при ограничения:

$$\mu^T x \geq R \quad (1.27)$$

$$Ax = b \quad (1.28)$$

$$Cx \geq d. \quad (1.29)$$

Както е отбелязано в т. 2.1 $\zeta := (\sigma_{ij})$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ е симетрична матрица, съдържаща ковариациите между нормите на възвръщаемост на всички активи. Този модел съответства на минимизацията на риска. В първото ограничение R е целева стойност, при което очакваната възвръщаемост е не по-малка от R . В случай, че задачата се решава за различни стойности за R , варирайки R между $R_{\min}$ и $R_{\max}$, могат да се получат всички ефективни портфейли. Константата $(1/2)$ е в целевата функция с оглед оценката на условията за оптималност и не влияе на оптималното решение.

1.3.3 Алтернативи на модела средна вариация (Mean-Variance) на Markowitz (модела MV)

Анализът на средната вариация отразява риска като вариация или стандартно отклонение на портфейла. Вариацията е статистическата мярка на дисперсията на възвръщаемостта около средната аритметична стойност или средната възвръщаемост (средната стойност на отклоненията от средната стойност на квадрат). Рискът в този контекст може да се опише като индикатор за размера на честотата и стойността, с която истинската възвръщаемост на портфейла ще се отклони от нейната средна стойност. Тази мярка за оценка на риска не е практична, тъй като по еднакъв начин се оценява риска при получаване на резултат, който е над средната стойност и риска при получаване на резултат под средната стойност. В действителност, възприемането на рационалните инвеститори по отношение на риска е изкривено (не е симетрично около средна стойност), тъй като те са по-загрижени за случая на под-изпълнение, а не за случая на преизпълнение на портфейла. Вариацията като мярка за риск по този начин е широко критикувана от практикуващите поради своето симетрично оценяване при еднаквото претегляне на желаната положителна възвръщаемост срещу нежеланата отрицателна [104]. Това поражда изследователски направления, където се използват реалистични мерки за риска с цел да се отделят нежеланите низходящи движения от желаните възходящи движения [25]. Сред тези алтернативни измервания на риска, които отчитат асиметричната природа на риска попада моделът "Стойност под риск" Value-at-Risk (VaR) [166], който е популярна мярка за измерване на риска, възприет от финансовите институции. Друга алтернатива е моделът „Средна стойност под риск“.

Стойност под риск Value-at-Risk (VaR)

Стойността под риск (VaR) измерва максималната вероятна загуба на портфейл от пазарен риск с определено ниво на доверие $(1 - \alpha)$ за определен интервал от време. Например, ако ежедневната VaR е оценена на 100,000 с 95% ниво на доверие, това означава, че по време на следващия ден за търговия съществува само 5% шанс, загубата да бъде по-голяма от 100,000. Колкото по-високо е нивото на доверие, толкова са по-добри шансовете, действителната загуба да бъде в рамките на мярката VaR. Следователно, нивото на доверие $(1 - \alpha)$ обикновено е високо, от порядъка на 95% или 99%. Формално, VaR при ниво на доверие $(1 - \alpha)$ 100% се определя като отрицателната величина на по-ниския α -квантил на разпределението на възвръщаемостта:

$$VaR_{\alpha}(R) = -\inf \{ \bar{r} \mid \Pr ob(R \leq \bar{r}) \geq \alpha \} \quad (1.30)$$

Където $\alpha \in (0, 1)$, R е случайната възвръщаемост на портфейла [126, 217].

Многокритериален Mean-VaR модел (модел средна стойност под риск)

Нека приемем, че всеки момент t означава различен сценарий, и нека r_{it} бъде наблюдаваната възвръщаемост на актива i в момента t , използвайки исторически данни за хоризонта T на времевите редове. Нека w_i бъде дялът от бюджета инвестиран в актива i . При даден набор от активи N , възвръщаемостта на портфейла при сценария t се оценява чрез формулата:

$$k_t(w) = \sum_{i=1}^N \bar{r}_{it} w_i, t=1, \dots, T. \quad (1.31)$$

Нека ρ_t е вероятността за поява на сценария и да приемем, че всички сценарии се счита, че имат еднаква вероятност за възникване (т.е. $\rho_t = 1/T$). Очакваната възвръщаемост на портфейла се оценява както следва:

$$\mu(w) = \sum_{t=1}^T k_t(w) \rho_t \quad (1.32)$$

Стойността на VaR при дадено ниво на доверие $(1-\alpha)$ е максималната очаквана загуба, така че портфейлът да не бъде надвишен с вероятност α :

$$\psi(w) = VaR_{\alpha}(w) = -\inf \left\{ k_{t_{\alpha}}(w) \left| \sum_{i=1}^{t_{\alpha}} \rho_i \geq \alpha \right. \right\} \quad (1.33)$$

където стойностите на възвръщаемостта $k_t(w)$ са поставени във възходящ ред, така че $k_{(1)}(w) \leq k_{(2)}(w) \leq \dots \leq k_{(T)}(w)$ [5]. Отрицателният знак във формулата (1.33) се ползва, за да се означа очакваната загуба, тъй като $k_t(w)$ представлява очакваната възвръщаемост.

Многокритериалната задача за избор на портфейл със средна стойност под риск (mean-VaR) обобщено се представя по следния начин:

$$\begin{aligned} & \min \psi(w) \\ & \max \mu(w) \end{aligned} \quad (1.34)$$

при ограниченията: $\sum_{i=1}^N w_i = 1; \quad 0 \leq w_i \leq 1; i=1, \dots, N;$

1.3.4 Реални ограничения (Real-world Constraints)

Стандартният модел на средна вариация се базира на няколко опростяващи допускания. Базисният модел предполага перфектен пазар, където ценните книжа се търгуват във всякакви (неотрицателни) фракции, няма ограничение за броя на активите в портфейла, инвеститорите не предпочитат някой от активите, и не се грижат за наличието на различни типове активи в портфейла. В практическото управление на инвестициите, обаче, мениджърът на портфейла често е изправен пред редица

ограничения за неговия/нейния инвестиционен портфейл по различни причини, като например правни ограничения, институционални особености, промишлени наредби, клиентски стратегии и други практически въпроси [211]. Например, мениджърът на портфейла може да бъде изправен пред ограниченията максимум от капитала да бъде разпределен в определен отрасъл или сектор. В резултат на това базовия модел може да бъде разширен с реални ограничения, за да отрази по-добре практическите приложения. В този раздел се описват ограниченията, които често се използват в практиката.

Кардинално ограничение

В стандартния модел, пропорциите на активите не се ограничават, без значение колко малка е величината за разпределение от инвестицията. Много често в практиката, инвеститорите предпочитат да имат ограничен брой активи, включени в портфейла си, тъй като управлението на много активи в портфейла е досадно и трудно се следи. Те също така желаят да намалят транзакционните разходи и/или да осигурят определена степен на диверсификация чрез ограничаване на броя на активите (K) в техния портфейл [211].

Кардиналното ограничение лимитира броя на активите, които съставят портфейла:

$$\sum_{i=1}^N s_i = K \quad (1.35)$$

където двоичните променливи s_i ($i = 1, \dots, N$) на решението са въведени, за да покажат дали активът i е включен в портфейла. K е положително цяло число, по-малко от броя на активите в инвестиционния свят (N).

В литературата има два варианта на кардинално ограничение. Единият вариант е ограничение от типа равенство, използвано във формулата (1.35), където кардиналното ограничение налага броят на ценните книжа в портфолиото да бъде точно K [10, 41, 42, 63, 74, 91, 101, 119, 211, 214, 239]. Другият вариант е ограничение от тип неравенство, т.е.

$$\sum_{i=1}^N s_i \leq K \text{ или } K_L \leq \sum_{i=1}^N s_i \leq K_U, \quad (1.36)$$

където кардиналното ограничение е определено с долна и/или горна граници $[K_L, K_U]$ [6, 40, 48, 62, 99, 120, 138, 154, 193]. Алтернативно, кардиналното ограничение може да бъде разглеждано като един от критериите за минимизация в задачата за оптимизация на портфейл. В [4] разглеждат задачата за оптимизация на портфейл като оптимизационна задача с три критерия с цел постигане на компромис между риск, възвръщаемост и брой на ценните книжа в портфейла.

Ограничения "Под" и "Таван"

Ограниченията "под" и "таван" определят минималните и максималните граници на пропорцията на всеки актив, който е включен в портфейла [41]. Първото ограничение предпазва от прекомерни административни разходи за много малки авоари (холдинги), които имат незначително влияние върху изпълнението на портфейла, докато второто изключва прекомерното излагане на конкретен актив и, в някои случаи, това се ограничава от институционалните политики. Ограниченията "под", "таван" са познати също като ограждащи или количествени ограничения. Използвайки крайните долни и горни граници, съответно ε_i и δ_i , както и двоичната променлива s_i , ограниченията "под" "таван" могат да бъдат представени по следния начин:

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{ако } i - \text{тият } (i = 1, \dots, N) \text{ актив е включен} \\ 0 & \text{друго} \end{cases} \quad (1.37)$$

$$\varepsilon_i s_i \leq w_i \leq \delta_i s_i, i = 1, \dots, N, \quad (1.38)$$

Тъй като бюджетното ограничение на базисния модел изисква сумата от всички тегла да бъде равна на единица ($\sum_{i=1}^N w_i = 1$), то сумата на долните граници не трябва да

бъде над единица, $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \geq 1$, и сумата на горните граници не трябва да бъде под единица,

$\sum_{i=1}^N \delta_i \leq 1$. Тъй като къси продажби не се допускат в базовия модел, ограниченията "под"

отменят формулата $0 \leq w_i \leq 1; i = 1, \dots, N$;

Ограничение "Кръгъл лот" (Round Lot)

Множество приложения от реалния свят изискват ценните книжа да се търгуват като съставени от минимум лотове или групи (партиди). Ограничението Кръгъл лот изисква броят на който и да е актив в портфейла да бъде точно кратно на нормалните търговски лотове [101, 140, 211, 214, 220, 221]. То пренебрегва допускането за безкрайна делимост на активите на базовия модел [119]. Ако y_i представляват положителни целочислени променливи и ν_i е минималният търгуем лот, който може да бъдат закупен за всеки актив, то ограничението Кръгъл лот може да се представи по следния начин:

$$w_i = y_i \cdot \nu_i, i = 1, \dots, N, y_i \in Z_+ \quad (1.39)$$

В литературата ограниченията Кръгъл лот са моделирани основно в два варианта [виж 76, 150 за подробна класификация]. В този труд ограничението Кръгъл лот се моделира като фракция ν_i от общия инвестиран капитал в портфейла. С други думи, ограничението Кръгъл лот дефинирано с формулата (1.39) налага, че всяко тегло трябва

да бъде кратно на дадената фракция v_i , където размерът на лота v_i е еднакъв за всички активи. Този подход също е възприет от [119, 220, 221, 222].

Включването на ограничението Кръгъл лот може да изисква намаляване на бюджетното ограничение като общият капитал може да не е точно кратно на минималните цени на търгувания лот за различните активи.

Ограничение "Предварително назначение" (Pre-assignment)

Ограничението Предварително назначение обикновено се използва за моделиране на субективните предпочитания на инвеститора. Някой инвеститор може интуитивно да желае специфичен набор от активи (Z) да бъде включен в портфейла, като определя неговата пропорция [41, 42, 76]. Това ограничение може да се моделира с двоични променливи z_i , такива, че активите, които трябва да бъдат предварително назначени в портфейла са обозначени с единица [99].

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{ако } i \in Z \\ 0 & \text{друго} \end{cases} \quad (1.40)$$

$$s_i \geq z_i, i = 1, \dots, N, \quad (1.41)$$

Ограничения "Клас" (Class)

В практиката, инвеститорите могат иделано да искат да разделят наличните активи във взаимно изключващи се множества (класове). Всяко множество може да бъде групирано по обща характеристика или вид, като активи от здравеопазване, енергийни активи и т.н. или да бъде групирано по интуиция от инвеститорите. Инвеститорите могат да предпочетат да изберат поне по един актив от всеки клас, за да изградят добре диверсифициран и/или безопасен портфейл. Нека $C_m, m = 1, \dots, M$, са M множества от класове активи, които взаимно се изключват, т.е. $C_i \cap C_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Ограничението Клас изисква най-малко един актив от всеки клас да бъде инвестиран в портфейла и може да се дефинира по следния начин:

$$s_i \in C_m, m = 1, \dots, M, \quad (1.42)$$

Ограничения "Клас лимит" (Class limit)

Инвеститорите могат също така да искат да ограничат високата концентрация на инвестиционния портфейл в определен клас или сектор. Подобно на ограниченията "под", "таван", ограниченията Клас лимит изискват общата пропорция на инвестираното във всеки клас да се намира между долната и горната граница, посочена от инвеститорите. Нека L_m е долната граница и U_m е горната граница за класа m . Тогава ограниченията Клас лимит могат да се формулират по следния начин:

$$L_m \leq \sum_{i \in C_m} w_i \leq U_m, m = 1, \dots, M, \quad (1.43)$$

Трябва да се има предвид, че Клас ограниченията могат да бъдат мълчаливо определени като Клас лимит ограничения, когато долната граница на всеки клас е определена като положителна. В този случай, най-малко един актив от всеки клас трябва да бъде включен в портфейла. Ограниченията Клас и Клас лимит са въведени за първи път от Ченг и др. [41, 42, 237], които са изследвали ограниченията Клас в техните трудове. В тези изследвания ограниченията Клас са зададени с допускането, че $L_m > 0$ за всеки клас m ($m = 1, \dots, M$).

Транзакционни разходи

Когато инвеститорът купува или продава ценни книжа, се правят разходи за посредничество и данъци. Като цяло, тези разходи могат да бъдат променливи и/или пропорционални на търгувания обем. В някои случаи, променливата такса е пропорционална на търгуваната сума [3, 66, 80, 209], която може да бъде наложена и/или може да бъде определена като фиксирана цена (т.е. фиксирана такса за всяка транзакция) [146, 176]. Марингер [153, 154] представя четири варианта за транзакционни разходи: само фиксирана, само пропорционална, пропорционална с долна граница и пропорционална плюс фиксирани разходи. Нека $y_i \in N_0^+$ е естествено, неотрицателно число, равно на броя на активи $i \in [1, \dots, N]$ и η_i е тяхната текуща цена. Когато инвеститорът е изправен пред пропорционални разходи ς_p и/или фиксирани минимални разходи в размер на ς_f , транзакционните разходи TC_i на актива i могат да се представят по следния начин:

$$TC_i = \begin{cases} \varsigma_f & , \text{ само фиксирани разходи} \\ \varsigma_p \cdot y_i \cdot \eta_i & , \text{ само пропорционални разходи} \\ \max\{\varsigma_f, \varsigma_p \cdot y_i \cdot \eta_i\} & , \text{ пропорционални разходи с по-нисък лимит} \\ \varsigma_f + \varsigma_p \cdot y_i \cdot \eta_i & , \text{ пропорционални плюс фиксирани разходи} \end{cases} \quad (1.44)$$

Оборот и търговски ограничения

В настоящата дисертация се разглеждат задачи за избор на портфейл за фиксиран период. За пълнота на изложението се представят варианти на ограничения за няколко периода при формулиране на задачата за избор на портфейл. Крама и др. [62] въвеждат тези ограничения като вариант на формулировката за един период. Ограниченията Оборот определят максималните търгувани лимити, предварително определени от практикуващите, с цел защита срещу прекомерните транзакционни разходи между търговските периоди [196]. Те могат да бъдат описани по следния начин [62]:

$$\max(w_i - w_i^{(0)}, 0) \leq \bar{B}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.45)$$

$$\max(w_i^{(0)} - w_i, 0) \leq \bar{S}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.46)$$

където $w_i^{(0)}$ означава съществуващата пропорция на актива i преди формирането на портфейла, $\bar{B}_i$ означава максималната покупка, а $\bar{S}_i$ - максималната продажба на актива i .

Търговските ограничения налагат минималните лимити за предотвратяване на покупката и продажбата на малки количества активи, когато има високи фиксирани транзакционни разходи. Търговските ограничения могат да бъдат представени по следния начин [62]:

$$w_i = w_i^{(0)} \vee w_i \geq w_i^{(0)} + \underline{B}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.47)$$

$$w_i = w_i^{(0)} \vee w_i \leq w_i^{(0)} - \underline{S}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.48)$$

където $w_i^{(0)}$ представлява съществуващата пропорция на актива i в първоначалния портфейл, $\underline{B}_i$ и $\underline{S}_i$ означават съответно минималната покупка и продажба на актива i .

Масиви с данни

Примери за задачи при модела средна вариация

Тестовите задачи базирани на добре познати основни пазарни индекси за задачите за оптимизация на портфейл са публично достъпни от OR-библиотеката [16, 17]. Таблица 2 показва детайлите на тези реперни (еталонни) индекси и техните размери. Трябва да се отбележи, че от търговски съображения тези масиви от данни са скрити, така че идентичността на активите, свързана с данните не се разкрива. В съвременната литература на задачите за оптимизация на портфейл, тези пазарни индекси, предоставени от OR-библиотеката се използват широко и се признават като база за сравнение, при оценяването на изпълнението на различни изчислителни алгоритми.

Таблица 2: Реперни примери от OR-библиотеката.

Пример	Произход	Име	Брой активи
D1	Hong Kong	Hang Seng	31
D2	Germany	DAX100	85
D3	UK	FTSE 100	89
D4	US	S&P 100	98
D5	Japan	Nikkei	225
D6	US	S&P 500	457
D7	US	Russell 2000	1318

Първите пет масива данни (D1 - D5) са изградени от седмичните данни за цените от март 1992 г. до септември 1997 г., или за 5 години и техните най-добри известни

решения могат да бъдат открити на адрес: <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/portinfo.html>. Те за първи път са въведени от Ченг и др. [41]. Останалите два масива от данни са изградени на база на задачата за проследяване на индекси и са въведени за първи път от Канакгоз и Басли [38]. Тези два масива данни (D6 и D7) могат да се намерят на адрес: [http:// people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/indtrackinfo.html](http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/indtrackinfo.html).

Други масиви данни са използвани за задачата с модел средна вариация за оптимизация на портфейл с ограничения, разгледана в глава 3. Два експериментални модела за три и шест пазарни индекса са разгледани в същата глава и са показани резултатите от оптимизацията на портфейлите.

Трябва да се отбележи също, че Чесароне и др. [39, 40] също представят допълнителни пет пазарни индекса: EuroStoxx50 в Европа, FTSE 100 във Великобритания, MIBTEL в Италия, S & P 500 в САЩ и NASDAQ в САЩ. Тези примери, построени на седмичните данни за цените от март 2003 до март 2008, или 5 години са публично достъпни на адрес: <http://w3.uniroma1.it/Tardella/datasets.html>.

Примери за задачи с модела средна вариация

В това изследване бяха създадени два нови масива данни - 120 реда с месечни възвръщаемости за периода от март 2008 до февруари 2018, или за 10 години и 131 реда с месечни възвръщаемости за периода от октомври 2007 до август 2018, или за 10 години и 11 месеца за задачата за оптимизация на портфейл с модел средна вариация, изследвани в глава 3 – Експериментална част. Първият масив данни се базира на исторически месечни данни на финансовия пазар от Yahoo! Finance (<http://finance.yahoo.com>) за акции и облигации. Изполван е индексът EURONEXT 100 (^N100) за възвръщаемостта на акции, 10-годишен индекс на съкровищни бонове (10-year Treasury bond index-CBOE Interest Rate 10 Year T No (^TNX)), за възвръщаемостта на държавни ценни книжа, по-нататък наричани само облигации, и допускането, че 100 евро са инвестирани в банков депозит, чиято възвръщаемост е *1% постоянна за разглеждания десетгодишен период лихва*. Редът данни от възвръщаемостта на банковия депозит е създаден с помощта на лихвен калкулатор за 10 годишен ред с месечните възвръщаемости при *положителна 1% лихва*. Масивът данни е представен в *Приложение 2*.

Вторият масив от данни се базира на исторически данни за възвръщаемостта на шест актива и се използва за изчисляване на оптималните пропорции от активите, включени в портфейла, така че очакваната възвръщаемост на всички включени в портфейла активи да не е по-малка от предварително зададена стойност. В експеримента са включени данни от Европа, Азия и Америка - американския индекс SP500, азиатския индекс Japan Nikkei 225, европейския индекс Euronext 100, европейския индекс Switzerland, 10-годишни ДЦК на САЩ 10-year US Treasury, и 1 000 евро депозит в банка.

За данните за банковия депозит е създаден с помощта на лихвен калкулатор за 10 г. и 11 месеца ред с месечните възвръщаемости при постоянна за разглеждания период отрицателна 1% лихва. Всички данни са за период октомври 2007 до август 2018 г. или шест класа активи със 131 месечни възвръщаемости. Всички данните са от yahoo finance, с изключение на швейцарския индекс, понеже е малък не е включен в yahoo finance, и е взет от швейцарската борса.

1.3.5 Алгоритми, базирани на евристики, вдъхновени от еволюцията в природата

Съществуват много вдъхновени от природата евристики за многокритериална оптимизация. Най-важните сред тях са еволюционните алгоритми, оптимизацията чрез рояк частици, диференциалната еволюция и оптимизацията чрез мравчена колония. Също така, други вдъхновени от природата алгоритми, като например изкуствените имунни системи [40] също са били използвани при решаването на множество многокритериални оптимизационни задачи.

Генетични алгоритми (GAs)

Много МКЕА са базирани на генетичните алгоритми. Една от първите работи в тази област е на Холанд [112]. Генетичните алгоритми използват модел, който прилага еволюционния механизъм в природата и симулира еволюцията на организмите. През осемдесетте години теорията на еволюционните алгоритми се развива и достига по-високо ниво [99]. Тези алгоритми използват популация от решения (индивиди), които са подходящо кодирани, както и еволюционните оператори: селекция, кръстоска и мутация. Подобни еволюционни оператори се използват и в някои други еволюционни алгоритми. На база на генетични алгоритми са разработени генетичното програмиране (GP), а след това и многокритериалното генетично програмиране (MOGP), и многокритериално финансово генетично програмиране (MOFGP) [139].

Оптимизация чрез мравчена колония (ACO)

Този подход е бил предложен от Коломи и др. [58, 59] през 1991. Оптимизацията чрез мравчена колония имитира поведението на мравки, търсещи храна в близост до техния мравуняк. В ACO-методите всяка мравка е конструктивна процедура, която е в състояние да генерира ново решение на разглежданата задача. След всяка итерация мравките споделят тяхната събрана нова информация. Съществуват различни варианти на оптимизация чрез мравчена колония. Един от тях например е директно да се насочи търсенето в околността на най-доброто решение, намерено до момента.

Диференциална еволюция (DE)

Алгоритъмът диференциална еволюция е предложен от Стърн и Прайс през 1997 [218]. Това е проста, но мощна, базирана на популация, техника за търсене, която е

ефикасна и ефективна процедура за глобална оптимизация в непрекъснатата допустима област на търсене. В ДЕ, съществуват много стратегии за генериране на пробен вектор.

ДЕ представлява популационен евристиен алгоритъм за оптимизация с общо предназначение. Разработен е на основата на генетичните алгоритми (ГА) като основните разлики са в оператора „мутация“. В алгоритъма първоначално се прилага класическо кръстосване, известно в ГА, което може да бъде едноточково или многоточково. За мутацията се използва претеглен диференциален вектор (ПДВ) вместо единична промяна на някои от гените във вече кръстосаната хромозома. ПДВ се изчислява от две случайно избрани хромозоми чрез изваждане на едния вектор от другия и умножаването му с тегловен коефициент. Същественото подобрене при ДЕ спрямо ГА се състои в това, че мутацията води до извърпване на малки стъпки във всички посоки на N -мерното пространство в околността на точката представляваща решението. При ГА мутацията извършва стъпка само в една посока в N -мерното пространство в околността на точката, представляваща решение. ДЕ също позволява паралелни изчисления. Това позволява по подробно изследване на пространството на решенията и постигане на по-високо бързодействие на алгоритъма.

Оптимизация чрез рояк частици (PSO)

Това е базирана на популация техника за оптимизация, разработена от Еберхарт и Кенеди през 1995 [83]. Основната идея в оптимизацията чрез рояк частици е имитирането на интелигентното поведение на роене, наблюдавано при ята птици, пасажи риби, рояци пчели, и др. Всеки обект (частица) в PSO прави стъпки от текущата си позиция в нова позиция, и това движение се определя въз основа на сумата от три вектора: инерция (*inertia*), конкуренция (*competition*) и сътрудничество (*cooperation*). PSO има много прилики с еволюционните алгоритми. Процедурата на търсене се инициализира с популация от случайни решения и търси (локално) оптимални решения чрез обновяващи генерации. Обаче, за разлика от еволюционните алгоритми оптимизацията чрез рояк частици няма еволюционни оператори като кръстосване и мутация.

1.3.6 Формулиране на задачи за многокритериална оптимизация

За да се отчете неопределеността се разглеждат задачи за минимизиране, които могат са бъдат представени в следния общ вид:

$$\min f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$$

при ограниченията

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \tag{1.49}$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

където решението $x \in \mathbf{R}^n$ е вектор на n решение (decision) променливи: $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, k$; са целевите функции и $g_i, h_j : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, p$; са

ограниченията на задачата. Решенията отговарят на ограниченията в (1.49) съставляващи възможното решение в полето на променливите $S \subset \mathbf{R}^n$. Целевите функции (1) съставят k -дименсионално поле, наречено обективно поле $O \subset \mathbf{R}^k$.

Концепцията за оптималност на задачите за многокритериална оптимизация е базирана на следните дефиниции (виж [10, 32]):

Дефиниция 1. Ако са дадени два вектора $x, y \in \mathbf{R}^k$, казваме, че $f(x) \leq f(y)$ if $f_i(x) \leq f_i(y)$ за $i = 1, \dots, k$, и че x доминира y (означено с $f(x) \prec f(y)$), ако $f_i(x) \leq f_i(y)$ за $i = 1, \dots, k$, и $f_i(x) < f_i(y)$ поне за една $f_i, i = 1, \dots, k$.

Дефиниция 2. Векторът на променливите решения $x \in S \subset \mathbf{R}^n$ е *недоминиран* по отношение на S , ако не съществува друго $x' \in S$ така че $F(x') \prec F(x)$.

Дефиниция 3. Векторът на променливите решения $x \in S \subset \mathbf{R}^n$ е *Парето-оптимален* ако той е недоминиран по отношение на S .

Дефиниция 4. Парето оптималното множество P^* е определено с:

$$P^* = \{ x \in S \mid x \text{ е Парето-оптимален} \}.$$

Дефиниция 5. Парето фронтът PS е определен с:

$$PS^* = \{ f(x) \in \mathbf{R}^k \mid x \in P^* \}.$$

Многокритериалния еволюционен алгоритъм функционира на база на следните принципи при решаване на задачи за многокритериална оптимизация (виж [10]):

Стъпка 1. Намира множество недоминирани решения затворени от възможния оптимален Парето-фронт, с широк компромис между целите.

Стъпка 2. Избира едно от получените решения, използвайки информация от най-високо ниво.

1.3.7 Практическа значимост на еволюционните алгоритми във финансовата област

В реалния свят задачите за оптимизация във финансите и икономическата област много често са комплексни и трудно решими. В много случаи това са многокритериални задачи, т.е. това е множество от целеви функции, които могат да са взаимно противоречиви (конфликтни) в общия случай и трябва да бъдат оптимизирани едновременно. Тривиалният подход за решаване на такъв вид задачи се състои в трансформиране на много цели в уникална функция и да се изгради една задача за скаларна (scalarizing) оптимизация. Оптималните решения на търсените задачи са недоминирани или “Парето оптимални” решения ([86, 96]). Това води до необходимост от ясно формулиране на компромиси между целите, представлявана от лице, наречено вземащо решение (ЛВР). Според момента от време, в който ЛВР представя своите предпочитания методите за многокритериална оптимизация се разделят на “априорни”, “апостериорни” и “интерактивни” методи [23, 86]. По-популярни са интерактивните

методи, където ЛВР има възможност периодично да променя предпочитанията си. По този начин процесът на вземане на решение се трансформира в решение на серии от задачи за еднокритериална оптимизация.

Задачите за еднокритериална оптимизация във финансовата област много често са NP-трудни (NP-hard) оптимизационни задачи [49]. Гери и Джонсън (1979 г.) в книгата си: Garey M. R., Johnson D. S. "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness" W. H. Freeman, San Francisco, доказват теорема, че задачата за минимизация на квадратичен функционал при линейни ограничения от тип неравенства е NP-трудна. В [103] е представено доказателство, че някои финансови задачи са NP-пълни (NP-complete). Това означава, че наличните методи, не могат да решат тези оптимизационни задачи за време, зависещо полиномиално от размерността на задачата, или от дължината на входните данни на задачата. Съществуват огромен брой параметри, които често участват във финансови многокритериални задачи, често финансовите системи са силно динамични, и именно там се доказва, че дори финансови задачи с прости модели имат висока алгоритмична сложност, което е препятствие за намирането на ефективни алгоритмични решения [104]. Поради тази причина много изследователи изследват приближени (апроксимиращи) алгоритми с полиномиална изчислителна сложност, които са в състояние да решат такъв вид задачи за оптимизация за полиномиално време, и които генерират достатъчно добри приближени решения. За последните повече от две десетилетия еволюционните алгоритми демонстрираха своята полезност при намирането на Парето множество приближени оптимални решения [10, 23, 34]. Създадени са много сорс кодове – и търговски и свободни, които имат широко приложение.

Като цяло МКЕА ползва същия подход, базиран на популация като в еволюционните алгоритми (ЕА), където итерациите се извършват в множество от решения (наречени популация от индивиди) и повече от едно решение е генерирано със всяка итерация [58]. Основната причина за многото приложения [23] и нарастващия интерес в областта на ЕА са следните: (1) ЕА не се нуждаят от никаква дериватна информация (any derivative information); (2) Те са относително прости за осъществяване; (3) ЕА са гъвкави и здрави(robust), т.е. те се представят много добре в широк спектър от задачи [53].

Всеки еволюционен алгоритъм се нуждае от скаларна целева (фитнес) функция за неговото изпълнение. Когато се разглежда математически модел с повече от една целева функция, е нормално да се предложи скаларизация (комбинация на всички целеви функции в една обща, ползвайки събиране, умножение, или някаква друга комбинация от аритметични операции, създадена от разработчика на алгоритъма). Например, математическият метод на тегловната сума за многокритериална оптимизация е създаден от Гасс и Саати (1955) и Задех (1963). Въз основа на условията за оптималност

на Кун-Тъкър при положителни тегловни коефициенти методът генерира недоминирани решения [71]. Скаларизиращата целева функция се представя във вида:

$$\min \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \quad (1.50)$$

където $w_i \geq 0$ са тегловите коефициенти представляващи относителната важност на m целеви функции на задачата (1.49). Освен това $\sum_{i=1}^k w_i = 1$. Недостатък е, че теглата трябва да бъдат избрани много интелигентно, а това е трудно [101, 102].

Подходът на основата на параметричното скаларизиране (подход с тегловна сума, подход с ε -ограничения, и други [86]) може да бъде ползван за конвертиране на много целеви функции в една параметрична целева функция. При просто вариране на параметрите (тегловния вектор или ε -вектора) и оптимизиране на скаларизиращата функция, могат да бъдат намерени различни Парето-оптимални решения. За разлика от този подход, в МКЕА процедурите се прави опит, решения представляващи част от множеството Парето-оптимални решения да бъдат намерени с единична симулация чрез генериране на множество недоминирани отделни решения. Модерните МКЕА ползват елитарен оператор, където комбинират стара популация с ново създадена такава, и избират най-добрите решения от комбинираните популации. Тази операция гарантира, че алгоритъмът има непрекъснато подобрене на стойността на скаларизиращата функция. Агрегиращи функции [100] могат да бъдат ползвани в комбинация на елитарен с неелитарен подход, или само с елитарен подход.

1.3.8 Преглед на основните МКЕА и техники

Подробни обзори на съществуващите многокритериални еволюционни алгоритми (МКЕА), са дадени например в [39, 63, 159]. Основните МКЕА и техники са представени в следната таблица:

Таблица 3: Базисни МКЕА техники

Методология	Година	Автори	За пръв път публикувано в:
AbYSS Адаптиращо разпръснато търсене за многокритериална оптимизация	2008	Nebro A., F. Luna, E. Alba, D. B., D. J.J., and B. A.	[170]
Fast PGA Бърз Парето еволюционен алгоритъм	2008	Eskandari, H. and C. Geiger	[89]
IBEA Базиран на индикатори еволюционен алгоритъм	2004	Zitzler, E., and S. Künzli	[250]
MOCell Клетъчен еволюционен алгоритъм за многокритериална оптимизация	2009	Nebro, A., J. Durillo, F. Luna, B. Dorronsoro, and E. Alba	[171]
MKEA/D Многокритериален еволюционен алгоритъм, базиран на декомпозиция	2007	Zhang, Q., and H. Li	[247]

Методология	Година	Автори	За пръв път публикувано в:
MOGA Генетичен алгоритъм за многокритериална оптимизация	1993	Fonseca, C., and P. Fleming	[93]
NPGA Парето генетичен алгоритъм с ниши	1993, 1994	Horn, J., Nafpliotis, N. and Goldberg D.	[114, 115]
NSGA Генетичен алгоритъм с недоминирано сортиране	1994	Srinivas N. and K. Deb	[215]
NSGA-II ГА с недоминирано сортиране - II	2002	Deb K., A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan	[71]
PAES Парето архивираща евол. стратегия	2000	Knowles, J.D. and D.W. Corne	[127]
PESA, PESA-II Парето базиран на обвивките алгоритъм за селекция	2000, 2001	Corne, D.W., J.D. Knowles, and M.J. Oates	[60, 61]
SPEA Силно Парето еволюц. алг.	1999	Zitzler, E. and L. Thiele	[249]
SPEA 2 Силно Парето евол. алг. 2	2002	Laumanns, Thiele, Deb and Zitzler	[134]
VEGA Генетичен алгоритъм с векторно оценяване	1984, 1985	Schaffer, J. D.	[194, 195]

1.3.9 Изводи

В тази глава е представено подробно описание на различните оптимизационни подходи за задачата за оптимизация на портфейл с модел средна вариация. В допълнение се обсъждат също базисната концепция и ограниченията на модела средната вариация (MV). Описано е също алтернативното измерване на риска “стойност под риск” (VaR) – за модела средна вариация “Mean-VaR”. Главата представлява въведение в основите на задачите за оптимизация на портфейл с ограничения, решавани в настоящата дисертация.

Също така подробно са разгледани МКЕА приложенията във финансовата област. Както е споменато в [117] приложението на МКЕА във финансите и икономиката е много обещаващо например за прогнозиране времеви серии, класиране на фондове, нива на икономическа експлоатация, управление на риска, управление на горите, разпределение на пространство, оптимизационни задачи за портфейл, както и в областта на финансите и търговията за подкрепа на инструментите за вземане на решения и в икономическото моделиране. Някои много добри проучвания на приложението във финансовата област на МКЕА са публикувани в (виж [21, 32, 48, 86, 89, 97, 104, 117, 122]). От направения обзор се оказва, че на съвременния етап на изследванията в разглежданата област е особено актуално разработването на приближени многокритериални (мета)евристични и еволюционни алгоритми, както и хибридни

методи/алгоритми, които да намират близки до оптималното решения за разумно изчислително време. Във връзка с гореизложеното като цел на настоящата дисертационна работа се поставя разработването на еволюционен алгоритъм за оптимизация на съдържанието на портфейл.

1.4 Цел и задачи на дисертационния труд

В резултат на направения обзор е формулирана целта на дисертационния труд, а именно: да се предложат модели и методи/алгоритми за оптимизация на портфейл с използването на времеви редове във финансовата област. За реализирането на тази цел е необходимо да се изпълнят следните конкретни задачи:

- Да се направи обзор на съществуващите еволюционни еднокритериални и многокритериални алгоритми за оптимизация на портфейл.
- Да се предложи модел за оптимизация на портфейл, който да гарантира определени свойства на портфейла.
- Да се предложи подход/методология за оптимизация на портфейл с използване на времеви редове.
- Да се предложи алгоритъм за оптимизация и управление на портфейл при зададен/и критерий/и, който да е достатъчно точен и бърз.
- Да се проведат числени експерименти за тестване работоспособността на предложените модели и алгоритми.
- Да се разработи инструментариум от програмни модули на MATLAB, позволяващ реализацията на горните задачи.

Глава 2. Оптимизация чрез комбинация на FFA-PS. Хибриден еволюционен алгоритъм и методология за селекция на портфейл.

През последните десетилетия оптимизирането на портфейли привлича вниманието на много изследователи и практики. То е доказано като инструмент за ефективно разпределение на активи и управление на риск. Марковиц [155] първи формулира модела средна вариация, като значителни усилия са посветени за разширяване на портфейлната теория, базирана на рамката, зададена от него. Базирано на специфична сродна параметризация на политика на алтернативите, Калафиоре [36] разработва изрично аналитично представяне на модел на портфейл за няколко периода. Чиу и др. [51] изследват оптималните нелинейни портфейлни модели използвайки параметрична стойност под риск (VaR) апроксимация, и показват че моделите могат да бъдат преформулирани като конус програми от втори ред, базирани само на Делта, Делта-Гама-нормално и най-лошото Делта-Гама VaR апроксимации. В рамките на модела средна вариация, сигурната възвръщаемост се счита за случайна променлива, и очакваната възвръщаемост е обозначена като възвръщаемост на инвестицията от ценни книжа. Въпреки това, точното разпределение на сигурната възвръщаемост е трудно за получаване посредством исторически данни. Освен това, моделът средна вариация е силно чувствителен към очакваната възвръщаемост: най-малкото смущение в очакваната възвръщаемост може да доведе до дълга вариация в оптималното разпределение в портфейла [22, 23]. Поради това е резонно да се приеме разпределението на сигурната възвръщаемост като интервал от случайни несигурни множества [44, 45, 164], които отразяват инвеститорската несигурност относно параметрите и следователно намаляват чувствителността на моделите за оптимизация на портфейл за очакваната възвръщаемост. В работата на Соyster [213], стойностите на параметрите са дефинирани като несигурни множества, и вземащите решения трябва да изберат измежду най-лошия сценарий в рамките на множествата. Въпреки, че този подход е твърде консервативен, той предвижда нова идея за решаване на несигурни оптимизационни задачи. Бен-Тал и др. [19, 20] и Ел Гауи и др. [86] дефинират множество на елипсовидна несигурност, настроено за решаване на въпроса в рамките на консерватизма. По-нататък, те доказаха, че моделът на WCVaR въпреки всичко е надежден за измерване на кохерентния риск. Цимлер и др. [253] разработват два нови устойчиви модели за оптимизация, най-лошия случай полихедрал VaR (WP-VaR) модел и най-лошия случай квадратичен VaR (WQVaR) модел, и двата от които съдържат производни. Те демонстрираха, че WPVaR модела и WQVaR модела са за измерване на

кохерентния (съгласувания) риск, в рамките на област от ограничена възвръщаемост на портфейла.

В това проучване въздействието на поведенческите фактори на инвеститорите е включено в устойчив модел на портфейл за няколко периода. Съществуващите устойчиви модели на портфейли рядко отчитат поведенческите фактори на инвеститорите [22, 23, 141, 253]. Тук се използва устойчив модел на портфейл за няколко периода подобно на един в [141]. Той включва влиянието на референтната зависимост, загуба на охота и намаляване на чувствителността, където параметрите на загуба на охота се актуализират динамично на база теорията за перспективите. За да се реши този нелинеен модел на портфейл за няколко периода, се разработва нов алгоритъм за оптимизация по метода на светулките (FFA), комбиниран с техниката на търсене на еталон (PS) и с локално търсене в околността на най-добрите намерени решения с помощта на вектори с два ненулеви компонента. Комбинацията FFA-PS се използва за намаляване на вероятността от циклене в локалното оптимално решение. Също така се използва двуетапна стратегия за инициализация, за да се гарантира, че всички от първоначалните светулки са в осъществим регион като в [141] и че те имат високо ниво на разнообразие като в [107].

2.1. Модел на портфейл за няколко периода

Проучванията на поведенческата портфейлна теория показват, че инвеститорите могат да имат множество когнитивни изкривявания (например ментално счетоводство, загуба на охота, и т.н.), които играят важна роля в процеса на вземане на решения [15, 206]. Въпреки че много от сегашните литературните източници са фокусирани върху темите на теорията за поведенческия портфейл [95] и устойчивия модел на портфейл [23, 252, 253], тези изследвания правят опростено предположение, че не се обръща внимание на общото влияние на ирационалността на инвеститорите и непълната информация за бъдещите постъпления.

2.1.1 Описание на изходните условия на задачата на портфейл за няколко периода

Нека са дадени един безрисков актив a_0 и n рискови активи $\{a_1, \dots, a_n\}$ в сигурен (регулиран) пазар за търговия. Инвеститор иска да направи инвестиционна стратегия за няколко периода, където инвестиционния интервал е разделен на T периоди. Да предположим, че инвеститорият притежава портфейл $X(t) = [x_{0,t}, x_{1,t}, \dots, x_{n,t}]^T$ в момента t , където $x_{0,t}$ означава стойност на безрисковия актив a_0 в момента t , и $x_{i,t}$ означава стойност на рисковия актив a_i в момента t , $i = 1, \dots, n$, $t = 0, \dots, T$. Инвеститорият

може динамично да променя портфейла в края на всеки период на базата на реализираната възвръщаемост и актуализираната информация за пазара на ценни книжа.

Нека $\Delta X(t) = [\Delta x_{0,t}, \Delta x_{1,t}, \dots, \Delta x_{n,t}]^T$ бъде изменението на портфейла в момента t , където $\Delta x_{i,t} > 0$ означава че стойността на актива a_i се увеличава в момента t , и $\Delta x_{i,t} < 0$ означава че стойността на актива a_i намалява в момента t , $i = 0, 1, \dots, n$, $t = 0, \dots, T-1$. По този начин получавам променения портфейл $X^+(t) = [x_{0,t}^+, x_{1,t}^+, \dots, x_{n,t}^+]^T$ след изменението според $\Delta X(t)$ в момента t , където $X^+(t) = X(t) + \Delta X(t)$, $t = 0, \dots, T-1$. По-долу се представя процедурата за инвестиция от няколко периода според [37].

Нека $r_{0,t}$ и $r_{i,t}$ са възвръщаемостта на безрисковия актив a_0 и рисковия актив a_i в периода t респективно, $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$. Тогава стойността на актива a_i в момента t се представя така:

$$x_{i,t} = (r_{i,t} + 1)^{x_{i,t-1}}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.1)$$

При използване на рекурсивно отношение в инвестиция за няколко периода, формулата (2.1) може да бъде представена като:

$$x_{i,t} = g_i(1,t)x_{i,0} + \sum_{j=1}^t g_i(j,t)\Delta x_{i,j-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.2)$$

където $g_i(j,t)$ означава натрупаната възвръщаемост на актива a_i от периода j до периода

$$t, \quad g_i(j,t) = (r_{i,t} + 1)(r_{i,t-1} + 1) \dots (r_{i,j} + 1), \quad g_i(t,t) = r_{i,t} + 1.$$

От (2.2), стойността на портфейла за няколко периода в момента t се представя чрез

$$W_t = \sum_{i=0}^n x_{i,t} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^t g_i(j,t)\xi_{i,j-1}, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.3)$$

$$\text{където } \xi_{i,0} = x_{i,0} + \Delta x_{i,0}; \quad \xi_{i,j} = \Delta x_{i,j}; \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, T-1.$$

2.1.2 Подходът устойчива оптимизация

В случай, че бъдещата възвръщаемост на всеки актив е точно известна, то това е класическа задача за оптимизация на портфейл за няколко периода. Обичайно детерминираното предположение е невалидно и задачата за оптимизация съдържа несигурност. За да се балансира компромиса между оптималност на решението и неговата устойчивост от смущения, Бертсмас и Сим [21] са предложили устойчива рамка за оптимизация, която осигурява гъвкавост на степента на консервативност на решението.

Лиу и др.[141] са предположили че натрупаната възвръщаемост $g_i(j,t)$ заема стойности в интервала $[\bar{g}_i(j,t) - \hat{g}_i(j,t), \bar{g}_i(j,t) + \hat{g}_i(j,t)]$, където $\bar{g}_i(j,t)$ означава номиналната стойност, и $\hat{g}_i(j,t)$ означава половин интервал от ширината на

$g_i(j, t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, t$, $t = 1, \dots, T$. Предполага се, че натрупаната възвръщаемост на безрисковия актив е точно известна, докато натрупаната възвръщаемост на рисковия актив е несигурна, т.е. $\hat{g}_0(j, t) = 0$, $\hat{g}_i(j, t) > 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, t$, $t = 1, \dots, T$, което отговаря на практиката. По този начин, въз основа на уравнение (2.3), стойността на портфейла W_t съдържа $n \cdot t$ несигурни променливи.

Целта на устойчивата оптимизация е да се намери решение, което е допустимо за всички възможни реализации на данни и е оптимално за определено ниво на консерватизъм, следвайки нотацията в [21] Лиу и др. [141] дефинират параметъра $\Gamma_t \in \mathbb{R}^+$ и подмножеството S_t за контрол на нивото на консерватизъм в W_t , където $\Gamma_t \in [0, |J_t|]$, $S_t \subseteq J_t$, $|S_t| = \lfloor \Gamma_t \rfloor$, and $J_t = \{(i, j) | i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, t\}$. Тук J_t е множество от коефициенти, които са предмет на несигурността на параметъра, и всеки коефициент заема стойности според симетричното разпределение със средна стойност равна на номиналната стойност на коефициента в дадения интервал. Дефинирано е правилото на отклонение за несигурната възвръщаемост, когато едно несигурно отклонение на възвръщаемостта може да бъде променено до $(\Gamma_t - \lfloor \Gamma_t \rfloor) \hat{g}_v(d, t)$, $(v, d) \in J_t \setminus S_t$, и $\lfloor \Gamma_t \rfloor$ несигурните отклонения на възвръщаемостта могат да бъдат променени до $\hat{g}_i(j, t)$, $(i, j) \in S_t$. Интуитивно, устойчивата рамка на оптимизация предвижда, че само част от подмножеството на несигурните коефициенти ще се промени и осигурява гъвкавост чрез регулиране нивото на консерватизъм на устойчивото решение посредством параметъра Γ_t .

Нека са дадени Γ_t, S_t and (v, d) , стойността на портфейла W_t в момента t , $t = 1, \dots, T$ може да се дефинира като

$$W_t = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^t \bar{g}_i(j, t) \xi_{i, j-1} - \left[\sum_{(i, j) \in S_t} \hat{g}_i(j, t) |\xi_{i, j-1}| + (\Gamma_t - \lfloor \Gamma_t \rfloor) \hat{g}_v(d, t) |\xi_{v, d-1}| \right] \quad (2.4)$$

За да се направи решението устойчиво за всички сценарии на $\{S_t \cup \{(v, d)\} | S_t \subseteq J_t, |S_t| = \lfloor \Gamma_t \rfloor, (v, d) \in J_t \setminus S_t\}$, за максимизиране на стойността на портфейла е разработено отклонение, което предполага, че несигурните възвръщаемости в уравнение (2.4) са равни на най-лошите стойности в сценария на $\{S_t \cup \{(v, d)\} | S_t \subseteq J_t, |S_t| = \lfloor \Gamma_t \rfloor, (v, d) \in J_t \setminus S_t\}$. Следвайки уравнение (2.4), дубликата на устойчивостта на W_t може да се представи като:

$$W_t^R = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^t \bar{g}_i(j, t) \xi_{i, j-1} - \max_{\{S_t \cup \{(v, d)\} | S_t \subseteq J_t, |S_t| = \lfloor \Gamma_t \rfloor, (v, d) \in J_t \setminus S_t\}} \left\{ \sum_{(i, j) \in S_t} \hat{g}_i(j, t) |\xi_{i, j-1}| + (\Gamma_t - \lfloor \Gamma_t \rfloor) \hat{g}_v(d, t) |\xi_{v, d-1}| \right\} \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) показва, че консерватизма на решението е контролиран от параметър Γ_t . Когато $\Gamma_t = 0$, всички несигурни възвръщаемости са равни на $\bar{g}_i(j, t), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, t$, където уравнение (2.5) е еквивалентно на номиналната задача. Когато $\Gamma_t = n \cdot t$, всички несигурни възвръщаемости реализират най-големи отклонения, където уравнение (2.5) е еквивалентно на най-лошата задача. В [21] е показано, че:

$$\max_{\{S_t \cup \{(v, d)\} | S_t \subseteq J_t, |S_t| = \lfloor \Gamma_t \rfloor, (v, d) \in J_t \setminus S_t\}} \left\{ \sum_{(i, j) \in S_t} \hat{g}_i(j, t) |\xi_{i, j-1}| + (\Gamma_t - \lfloor \Gamma_t \rfloor) \hat{g}_v(d, t) |\xi_{v, d-1}| \right\}$$

е което е еквивалентно на

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^t \hat{g}_i(j, t) |\xi_{i, j-1}| z_{i, j} \\ \text{s.t.} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^t z_{i, j} \leq \Gamma_t, 0 \leq z_{i, j} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, t \end{array} \right. \quad (2.6)$$

С модел (2.6), устойчивата стойност на рисковия актив a_i в момента t е

$$x_{i, t}^R = \sum_{j=1}^t \bar{g}_i(j, t) \xi_{i, j-1} - \hat{g}_i(j, t) z_{i, j}^* |\xi_{i, j-1}|, \text{ където } z_t^* \text{ представя оптималното решение}$$

в модела, $i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T$. По този начин, устойчивото формулиране на изменението на капитала за рисковия актив a_i в момент t е $x_{i, t}^{+R} = x_{i, t}^R + \xi_{i, t}$, $i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T - 1$.

За да се контролира стойността на Γ_t интуитивно, подобно на Бертсимас и Сим [21] е ползвана нотацията за нарушената вероятност. Нека W_t^{opt} и ξ_t^* означават оптималната стойност на решението на $\max_{\xi_t \in D} W_t^R$, където D означава ограниченията в портфейла.

Нарушената вероятност има следното представяне:

$$\Pr ob \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^t g_i(j, t) \xi_{i, j-1}^* < W_t^{opt} \right\} \leq \varepsilon \quad (2.7)$$

където ε означава най-нарушената вероятност.

Уравнение (2.7) осигурява гарантираното изпълнение, където максималната вероятност на несигурната стойност $\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^t g_i(j, t) \xi_{i, j-1}^*$ по-малко от $W_t^{opt} + \varepsilon$. Гарантираното изпълнение е основна характеристика в модела на поведенческия портфейл [206].

Бертсимас и Сим [21] показват, че (2.7) е еквивалентно на:

$$\Gamma_t \geq 1 + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon) \sqrt{n \cdot t} \quad (2.8)$$

където Φ означава натрупаното разпределение на стандартната Гаусова случайна променлива. Посредством уравнение (2.8), инвеститорът може да определи стойността на Γ_t чрез ε . Най-нарушената вероятност ε е интуитивен индекс за инвеститора, който е подобен на нивото на доверие в стойността под риск (VaR) и на модела условна стойност под риск (CVaR). Инвеститорът може да промени стойността на ε за да отрази своите изисквания за безопасност и следователно да контролира консерватизма на решението.

2.2 Динамична теория на перспективите за стойността на функцията

Теорията на перспективите за стойността на функцията може да бъде използвана, за да се отразят поведенческите фактори на инвеститорите в настройката за няколко периода. В рамката на теорията на перспективите на Канеман и Тверски [122], стойността на функцията има три ключови характеристики. 1) Референтна зависимост: хората оценяват активите, сравнявайки ги с дадена референтна стойност; 2) Загуба на охота: хората са по-чувствителни към загубите, отколкото към печалбите; 3) Намаляване на чувствителността: хората са склонни да поемат риск в областта на печалбите, докато търсят риска в областта на загубите. Стойността на функцията въведена от теория на перспективите [115] се изразява чрез

$$PV(W) = \begin{cases} (W - \hat{y})^\alpha, & W \geq \hat{y} \\ -\lambda(\hat{y} - W)^\beta, & W < \hat{y} \end{cases} \quad (2.9)$$

където PV означава стойността на функцията според теория на перспективите (PV value) и представлява стойността на портфейла; λ означава съотношението загуба на охота; $\hat{y}$ означава дадената референтна стойност; α и β означават параметрите на кривината за печалбите и загубите, съответно. Тверски и Канеман [231] експериментално определят стойностите на $\alpha = \beta = 0.88$; $\lambda = 2.25$, което се счита подходящо за описание поведението на повечето вземащи решения и се ползва за направата на оптимално вземане на решения.

Барберис и Хуанг [15] дефинират стойност-еталон, което би могло да се разглежда като инвеститорска памет на по-ранна стойност на портфейла. Следвайки тази рамка, Фортин и Хлускова [95] предлагат стойност-еталон като стойността на портфейла да бъде последния период. По-нататък, те предлагат параметрите на загуба на охота да се актуализират динамично. Ако текущата стойност на портфейла е по-голяма от стойността-еталон, инвеститорът ще почувства, че портфейла се представя добре, и ставката му на загуба на охота е равна на първоначално определената загуба на охота и дадената референтна стойност е намаляла. Обратно, ако текущата стойност на портфейла е по-малка от еталона, инвеститорът ще изпита загуби, като ставката му на

загуба на охота се е увеличила и определената референтна стойност на портфейла е равна на предварително определена целева стойност. Динамично актуализираните параметри на загуба на охота се представят по следния начин:

$$\lambda_t = \begin{cases} \lambda^0, & W_t^R \geq W_{t-1}^R \\ \lambda^0 + \left(\frac{W_{t-1}^R}{W_t^R} - 1\right), & W_t^R < W_{t-1}^R, \end{cases} \quad t=1, \dots, T; \quad (2.10)$$

и

$$\hat{y}_t = \begin{cases} \frac{W_{t-1}^R}{W_t^R} W_t^0, & W_t^R \geq W_{t-1}^R, \\ W_t^0, & W_t^R < W_{t-1}^R \end{cases} \quad t=1, \dots, T; \quad (2.11)$$

където λ_t означава ставката на загубата на охота в момента t , $\hat{y}_t$ означава дадената референтна стойност в момента t . W_t^0 означава предварително определената целева стойност в момента t , $\lambda^0 = 2.25$ Тверски и Канеман [231].

В задачата за инвестиция в няколко периода, инвеститорът обикновено определя целевата стойност за целия срок на инвестицията в самото начало на инвестицията. Нека $\bar{r}_t^0$ означава целевата възвръщаемост на периода t , тогава предварително определената целева стойност в момента t може да се получи с помощта на формулата: $W_t^0 = W_0 \prod_{k=1}^t (1 + \bar{r}_k^0)$, $t = 1, \dots, T$. С помощта на уравненията (2.9) – (2.11) съгласно динамичната теория на перспективите стойността на функцията може да се дефинира като:

$$PV(W_t^R) = \begin{cases} (W_t^R - \hat{y}_t)^\alpha, & W_t^R \geq \hat{y}_t \\ -\lambda_t (\hat{y}_t - W_t^R)^\beta, & W_t^R < \hat{y}_t \end{cases}, \quad t=1, \dots, T; \quad (2.12)$$

$$\text{където } \lambda_t = \begin{cases} \lambda_t^0, & W_t^R \geq W_{t-1}^R \\ \lambda_t^0 + \left(\frac{W_{t-1}^R}{W_t^R} - 1\right), & W_t^R < W_{t-1}^R, \end{cases} \quad t=1, \dots, T; \quad \text{и}$$

$$\hat{y}_t = \begin{cases} \frac{W_{t-1}^R}{W_t^R} W_t^0, & W_t^R \geq W_{t-1}^R, \\ W_t^0, & W_t^R < W_{t-1}^R \end{cases} \quad t=1, \dots, T;$$

2.3 Двукритериален модел за оптимизация на портфейл

При задачите на многокритериалната оптимизация няколко критерия се оптимизират едновременно и в общия случай не съществува единствена алтернатива, която да оптимизира всичките критерии. За разлика от еднокритериалната оптимизация, решението на многокритериалната задача може да се разглежда по-скоро като концепция, отколкото дефиниция. При този тип оптимизация,

обикновено не съществува оптимално решение, удовлетворяващо всички критерии, а най-често поне два от критериите са в конфликт, т. е. подобряването на един от критериите води до влошаването на поне един друг критерий сред останалите критерии в задачата. Поради това се налага да се направи набор на компромисно решение, което да удовлетворява в достатъчна степен предпочитанията на лицето, вземащо решения. В класическата теория на Хари Марковиц за построяването на оптимален портфейл се разглеждат два критерия (две функции): функцията на възвръщаемост $f_{\text{възвръщаемост}}(x)$, която трябва да се максимизира и функцията на риска $f_{\text{риск}}(x)$, която трябва да се минимизира.

Стратегическата роля на диверсификацията е ключова в теорията на Марковиц за оптимизацията на портфейл. Увеличаването на броя на активите от ценни книжа в портфейла значително намалява риска за портфейла. При това, ефективна диверсификация се постига не просто с добавяне на активи в портфейла, а с добавяне на такива активи, доходите на които имат най-ниски корелации, а по добре и отрицателни, по отношение на активите на присъстващите в портфейла. Недостатък е само в това, че на практика активите с малка и отрицателна корелация не са толкова много. От това произтича основното практическо правило на финансовия пазар – за повишаване на ефекта от вложението в рискови ценни книжа е целесъобразно вложенията да се правят не в един вид, а да се формира портфейл, съдържащ възможно най-разнообразни ценни книжа, ефектът от които е случаен. Според акад. Попчев [180, 181] рискът зависи от съставляващите активи, и най-вече от степента на ковариацията за всяка двойка активи. Ако възвръщаемостта на i -актив се отклонява в положителна посока, а на j -тия актив - в отрицателна, то ковариацията ще е отрицателна и общият риск на портфейла ще намалява. В случай, че се изгражда портфейл от активи с отрицателна корелация, рискът на портфейла може да е по-нисък от този на отделните активи. Следователно той може да се понижи, дори ако в него се включи високо рисков актив. Рискът ще намалява толкова повече, колкото корелацията между този високо рисков актив и останалата част от портфейла е по-малка в алгебричен смисъл. В това се състои принципът на ефективната диверсификация - да се търсят активи с ниска корелация. Диверсификацията не се влияе от броя на активите, а от избора на подходящите активи, имащи възможно най-ниска корелация.

Съдържанието на портфейл, включващо най-разнообразни типове активи / ценни книжа, се определя като диверсификация на портфейла. Макар подобен портфейл значително да намалява диверсификационните (несистемните) рискове, то напълно да се отстранят инвестиционните рискове е невъзможно, тъй като при капиталовложенията присъстват също и недиверсифицирани или системни рискове, присъщи на конкретната

икономическа система като цяло или на отделен пазар, които не се поддават на диверсификация. Системният риск се обуславя от общото състояние на икономиката, което е свързано с такива фактори като война, инфлация, глобални данъчни промени, промени в паричната политика, мерки при наличие на пандемии и т.н. и е свързан и с промени в цените на акциите, на тяхната доходност, текущата и очакваната лихва по облигациите, очаквания размер на дивидента, предизвикани от общи пазарни колебания.

Една от най-популярните мерки за диверсификация на портфейл както по исторически, така и по академични причини е индексът на Херфиндал - Хиршман (Herfindahl - Hirschmann) [18, 73]:

Дефиниция: За даден вектор x с пропорциите на активите в портфейла, индексът на Херфиндал - Хиршман се задава с формулата:

$$HHI(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (2.13)$$

Някои управители на фондове използват индекса на Херфиндал-Хиршман за управление на своите инвестиции / разпределения на средства.

За портфейли, които не включват рискови активи, закупени с привлечени средства, индексът на Херфиндал - Хиршман варира между $1/n$ и 1. По-ниските стойности на индекса означават, че портфейлът е с голямо разнообразие, а високите, стойности напротив, показват, че портфейлът е концентриран. По отношение на пазарите ниските стойности на индекса означават, че пазарът е конкурентен, а високите стойности – че пазарът е монополен [30]. Антимонopolните власти използват тази мярка за оценка на концентрацията в индустрията.

Базирайки се на индекса на Херфиндал - Хиршман може да бъде въведено следното ограничение, налагащо желана диверсификация на портфейла:

$$|div - div_target| \leq 5\%, \quad (2.14)$$

където $div = HHI(x)$, а div_target е целева стойност, отговаряща на търсената диверсификация на портфейла. Изразът (2.14) може да се представи във вида:

$$|\sum_{i=1}^n x_i^2 - div_target| \leq 0,05. \quad (2.15)$$

Ако целият процес на инвестиране се разглежда като съставен от T подпериода (например месеци), нека $c_{i,t}$ означава линейната транзакционна цена за рисковия актив a_i в момента t , $i = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T - 1$, и линейната транзакционна цена за безрисковия актив a_0 е 0, т.е. $c_{0,t} = 0, t = 0, \dots, T - 1$. Предполага се, че целият инвестиционен процес представлява самофинансиране и, че инвеститорът не влага допълнителен капитал, или използва само стар такъв за срока на инвестицията. Ако инвеститорът динамично променя портфейла в края на всеки период на базата на

реализираната възвръщаемост и актуализираната информация за пазара на ценни книжа, с $\Delta x_{i,t}$ се означава изменението на актива a_i . Когато $\Delta x_{i,t} > 0$ стойността на актива a_i се увеличава в момента t , а ако $\Delta x_{i,t} < 0$ стойността на актива a_i намалява в момента t , $i = 0, 1, \dots, n$, $t = 0, \dots, T-1$.

Следователно, ограничението на инвестицията може да се представи чрез следното равенство:

$$\sum_{i=0}^n \Delta x_{i,t} + \sum_{i=1}^n c_{i,t} |\Delta x_{i,t}| = 0, \quad t = 1, \dots, T-1; \quad (2.16)$$

Инвестицията в актива i към момента t е неопределена променлива x_i , $i = 0, 1, \dots, n$; $t = 1, \dots, T-1$. Могат да се ползват ограничавания за устойчивост относно инвестицията във всеки актив, които са известни като ограничения за относителното разнообразие на портфейла [36]. Ограниченията се представят във вида:

$$l_i \leq \frac{x_{i,t}^{+R}}{W_t^R} \leq u_i, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad t = 0, \dots, T-1; \quad (2.17)$$

където $x_{0,t}^{+R} = x_{0,t}^+$, $x_{i,0}^{+R} = x_{i,0}^+$, $W_t^0 = W_0$; u_i и l_i представляват респективно горните и долните граници на стойността на актива a_i в модела на портфейла.

Нека "Общата възвръщаемост" за актив $i = 1, 2, \dots, n$; и $t = 0, \dots, T-1$ [месеци], е означена с I_{it} . За всеки актив i изходните данни I_{it} , $t = 0, \dots, T-1$, могат да се преобразуват в проценти на възвръщаемост r_{it} , $t = 0, \dots, T-1$ [месеци], чрез формулата:

$$r_{it} = \frac{I_{i,t} - I_{i,t-1}}{I_{i,t-1}} \quad (2.18)$$

Нека нормата на възвръщаемост на актива i е обозначена с T_i . От историческите данни можем да изчислим средната аритметична норма на възвръщаемост за всеки актив:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it} \quad (2.19)$$

Геометричната средна възвръщаемост е месечната норма на възвръщаемост, която се прилага за месеците $t = 0, 1, \dots, T-1$, за да се получи общата норма на възвръщаемост I_{iT} , започвайки от I_{i0} . Формулата за геометричната средна възвръщаемост е:

$$\mu_i = \left(\prod_{t=1}^T (1 + r_{it}) \right)^{\frac{1}{T}} - 1 \quad (2.20)$$

Нека с μ^T е означен векторът на геометричната средна възвръщаемост с компоненти μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Нека $\zeta = (\sigma_{ij})$ е $n \times n$ симетрична ковариационна матрица с $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ и $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ за $i \neq j$, и $i, j \in \{1, \dots, n\}$. При това σ_{ii} е вариацията на

възвръщаемостта на актива i а σ_{ij} е ковариацията между възвръщаемостта на i -актив и възвръщаемостта на j -тия актив:

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j) \quad (2.21)$$

Въз основа на горните изложения в настоящия дисертационен труд се предлага следната модификация на класическия модел на Марковиц (1.1):

$$\min_x \frac{1}{2} x^T \zeta x \quad (2.22)$$

$$\max_x \mu^T x \quad (2.23)$$

при ограничения:

$$|\sum_{i=1}^n x_i^2 - \text{div_target}| \leq 0,05, \quad (2.24)$$

$$\sum_{i=0}^n \Delta x_{i,t} + \sum_{i=1}^n c_{i,t} |\Delta x_{i,t}| = 0, \quad t = 1, \dots, T-1; \quad (2.25)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i) = 1 \quad (2.26)$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T-1. \quad (2.27)$$

Така формулираният двукритериален модел (2.22) – (2.27) има за цел едновременно да оптимизира два взаимно противоречиви критерия, а именно да минимизира риска и едновременно с това се максимизира печалбата/доходността/възвръщаемостта.

Предимствата на така формулирания оптимизационен модел (2.22) – (2.27) са следните:

- Чрез използване на ограничение (2.24) се постига осигуряване на търсената диверсификация (разнообразието) на портфейла.
- Чрез използване на ограничението (2.25) се осигурява устойчивост на модела, задължавайки инвеститора да се вмести в границите само на първоначално използвания капитал.
- Ограниченията (2.27) задават долните и горните граници на всеки от активите, участващи в портфейла и са свързани с относителната диверсификация на портфейла.
- Чрез използването на равенство (2.26) се гарантира, че за активите ще бъдат използвани точно 100% от инвестирания капитал.

- Формулирането на съответни оптимизационни задачи, на база на така предложения двукритериалния модел (2.22) – (2.27) дава възможност решенията на тези задачи да определят Парето-оптимални решения, т.е. комбинацията от активи, формиращи портфейла.

В тази връзка трябва да се дефинира и Парето-оптималността на една точка в определена допустимата област. В [12, 156, 236] са дадени седните дефиниции за Парето-оптималното решение и слабо Парето-оптималното решение както следва:

Парето-оптимално решение [156]: Една точка $x^* \in X$, е Парето-оптимална, ако не съществува друга точка $x \in X$ за която $F(x) \leq F(x^*)$ и $F_i(x) < F_i(x^*)$ за поне една функция. С други думи, една точка е Парето-оптимална, ако няма друга точка, която да води до подобряване на поне една целева функция, без да се влошава друга целева функция. Всички Парето-оптимални точки лежат на границата на допустимото критериално пространство [12].

Слабо Парето-оптимално решение [156]: Една точка $x^* \in X$ е слабо Парето-оптимална, ако няма друга точка $x \in X$ за която $F(x) \leq F(x^*)$, т.е. една точка е слабо Парето-оптимална, ако няма друга точка, която да подобрява едновременно всички целеви функции. Парето-оптималните точки са слабо Парето-оптимални, но слабо Парето-оптималните точки не са Парето-оптимални.

Недостатъците на двукритериалния оптимизационен модел (2.22) – (2.27) са следните:

- Критерият (2.22) и ограничението (2.24) са нелинейни. Това води до изключителната чувствителност на решенията към всяка промяна на входните параметри. Намирането на глобално оптимално решение в случая е NP-трудна задача [49].
- Получаването на представителна извадка от решения по целия Парето-фронт е трудоемка задача.
- За формулирания по-горе многокритериален оптимизационен модел (2.22) – (2.27) е необходимо да бъде избран подходящ подход за решаване.

Двата основни подхода при решаването на задачите на многокритериалната оптимизация са апроксимационен [85] и скаларизационен подход [161]. При апроксимационния подход множеството на Парето-оптималните решения се апроксимира [54, 70, 85] чрез използване на итеративни методи, апроксимиращи това множество [233]. Някои от тези методи [85] са прецизно обосновани и съществуват доказателства за оптималност, докато други [54] са евристични и често нямат такава обосновка. Вторият скаларизационен подход за решаване на задачите на

многокритериалната оптимизация е чрез използването на т.нар. *скаларизация*. Скаларизацията изисква многокритериалната оптимизационна задача да се трансформира до съответна еднокритериална задача или в множество еднокритериални скаларизирани задачи [161]. За да бъде една задача скаларизираща, е необходимо всяко нейно оптимално решение да е Парето-оптимално (слабо Парето-оптимално). Предимство на скаларизационния подход е възможността да се използва теорията и методите за решаване на еднокритериалните задачи. Могат да бъдат използвани различни скаларизирани техники, които водят до 1) задача на *претеглената сума*, 2) задача на *ε -ограничения*, 3) задача на *отправната точка*, 4) *класификационно-ориентирани задачи* [162] и др.

За решаването на модела (2.22) – (2.27) е избран скаларизационният подход като моделът се преформулира в еднокритериален използвайки метода на ε -ограничения на Хаимес, Лесдън и Уисмър [105], аналогично на модела средна вариация (Mean-Variance) на Марковиц (1.26) – (1.29). Чрез този метод се оптимизира един от критериите, а останалите критерии се трансформират в ограничения. Така се генерират доказано слабо Парето-оптимални решения [161]. В конкретния случай критерият (2.23) за максимизиране на възвръщаемостта се преформулира във вид на ограничение, при което се изисква възвръщаемостта да е по-голяма или равна на зададен процент R (виж 2.29). Окончателният вид на предложената модификация на модела (1.1) и модела (1.26) – (1.29) чрез добавянето на допълнителните ограничения (2.24) и (2.25) е:

$$\min_x \frac{1}{2} x^T \zeta x \quad (2.28)$$

при ограничения:

$$\mu^T x \geq R \quad (2.29)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i^2 - div_target \right| \leq 0,05, \quad (2.30)$$

$$\sum_{i=0}^n \Delta x_{i,t} + \sum_{i=1}^n c_{i,t} |\Delta x_{i,t}| = 0, \quad t = 1, \dots, T-1; \quad (2.31)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i) = 1 \quad (2.32)$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T-1. \quad (2.33)$$

За генериране на множество от решения по Парето фронта е предложена следната методология:

Решава се серия от 10 оптимизационни задачи при различен процент на минимална възвръщаемост R в ограничението (2.29). При това R приема стойностите: {6%, 6,5%, 7%, 7,5%, 8%, 8,5%, 9%, 9,5%, 10%, 10,5%}. В резултат се генерират 10 точки по Парето-фронта и се дава възможност на инвеститора или лицето, вземащо решения (ЛВР) да изберат подходящото финално компромисно решение.

За целева стойност на диверсификацията се приема $div_target = 0,33333$.

За долна граница за всеки актив се приема стойност 0, а за горна граница се приема стойността на целия капитал.

Новото в предложения модел (2.28) – (2.33) в сравнение с моделите в [36, 142] се изразява в отчитане на негативните поведенчески характеристики на инвеститора или ЛВР и осигуряване на устойчивост чрез ограничението (2.31) като не се излиза от границите на първоначалния капитал. Освен това чрез ограничението (2.30) се гарантира достатъчна степен на диверсификация на получения оптимален портфейл. Варирайки стойността на R в ограничението (2.29) в краен резултат се получава оптимален портфейл с желания процент възвръщаемост.

2.4 Хибриден еволюционен алгоритъм за оптимизация на портфейл на база метода на светулките и метода *Pattern search*

Трябва да се отбележи, че формулираният модел (2.28) – (2.33) води до решаването на комплексна NP-трудна задача на нелинейното програмиране. Традиционните техники за устойчива (робастна) оптимизация [19, 20, 22] може да не успеят да намерят търсеното оптимално решение. За да се реши ефективно задачата за оптимизация на портфейл, се предлага нов хибриден алгоритъм за селекция на портфейл базиран на метода на светулките (*Firefly*) и метода на търсене по шаблон/еталон (*Pattern search*). По такъв начин се съчетават възможността за намиране на глобално оптимално решение (в случай, че целевата функция е мултимодална) и прецизното локализиране на оптимума с помощта на техниката на свиване на размера на мрежата до предварително зададен толеранс (точност) на определяне на решението в техниката на търсене по шаблон/еталон.

Оптимизация чрез метода на светулките (FFA-Firefly Algorithm)

Оптимизацията „чрез светулки“ (FFA) е популационен (базиран на популация) евристичен алгоритъм за оптимизация, предложен за първи път от Янг през 2007 г. [242, 243, 244] за решаване на комбинаторни/нелинейни оптимизационни задачи. FFA е вдъхновен от полета на светулките и идеализира някои от характеристиките от поведението на светулките. FFA следва следните три правила:

- а) всички светулки са с еднакъв пол,

б) всяка светулка е привлечена само от светулките, които излъчват по-ярка светлина от нейната; силата на привлекателност е пропорционална на яркостта на светулката, която отслабва с разстоянието; най-ярката светулка се движи произволно и

с) яркостта на всяка светулка определя нейното качество на решението, т.е. то е пропорционално на стойността на целевата функция.

FFA има висока ефективност при търсене на решения и простота на изпълнение. В сравнение с техниката за оптимизация чрез рояк частици (Particle Swarm Optimization - PSO), където процедурата за оптимизация може да зацikli в локално оптимално решение, FFA преодолява лесно този недостатък, защото включва проста рандомизирана диверсификация (разнообразяване) на търсенето.

В алгоритъма на светулките има два важни въпроса: промяната на интензивността на светлината и формулиране на атрактивността. За простота се приема, че атрактивността на светулката е определена от нейната яркост, което от своя страна е свързано със стойността на целевата функция. В най-простия случай на оптимизационна задача за максимум, яркостта I на светулката на определеното място (в определена точка) x може да бъде избрана като $I(x) \sim f(x)$. Въпреки това, атрактивността β е относителна, тя трябва да бъде видяна с очите на наблюдателя или да бъде определена (зададена) от другите светулки. По-този начин, тя ще варира с дистанцията r_{ij} между светулката i и светулката j . В допълнение, интензивността на светлината намалява с разстоянието от източника, и светлината е също поглъщана в медиата, така атрактивността трябва да варира според степента на поглъщане.

В най-простата форма, означаваме разстоянието с r , интензивността на светлината $I(r)$ варира според правилото за обратната пропорционалност:

$$I(r) = \frac{I_s}{r^2}, \quad (2.34)$$

където I_s е интензивността на източника. За дадена среда с фиксиран коефициент за поглъщане на светлина γ , интензивността на светлината I варира с разстоянието r :

$$I = I_0 e^{-\gamma r}, \quad (2.35)$$

където I_0 е оригиналната интензивност на светлината. За да се избегне необичайността на $r = 0$ в израза I_s/r^2 , комбинирания ефект на двете правила за обратната пропорционалност и поглъщането могат да се апроксимират със следната Гаусова форма

$$I(r) = I_0 e^{-\gamma r^2}. \quad (2.36)$$

Както привлекателността на светулката е пропорционална на интензивността на светлината и може да бъде видяна от съседни светулки, ние вече можем да дефинираме привлекателността β на светулката чрез:

$$\beta = \beta_0 e^{-\gamma r^2}, \quad (2.37)$$

където β_0 е привлекателността при $r = 0$. Както е по-често, по-бързо може да се изчисли $1/(1+r^2)$ от експоненциала на функцията, по-горната функция, ако е необходимо, може удобно да бъде апроксимирана като

$$\beta = \frac{\beta_0}{1+\gamma r^2}. \quad (2.38)$$

Заедно (2.37) и (2.38) дефинират характерното разстояние $D = 1/\sqrt{\gamma}$, за което привлекателността се променя значително от β_0 до $\beta_0 e^{-1}$ за уравнение (2.27) или до $\beta_0/2$ за уравнение (2.38).

В реалното изпълнение, привлекателността на функцията $\beta(r)$ може да бъде всяка монотонно намаляваща функция, като напр. следната обобщена форма:

$$\beta(r) = \beta_0 e^{-\gamma r^m}, \quad (m \geq 1). \quad (2.39)$$

За фиксирано γ , характерната дължина получава:

$$D = \gamma^{-1/m} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

Обратно, за дадена дължина на скалата D в оптимизационна задача, параметърът γ може да се ползва като типична първоначална стойност. Това е

$$\gamma = \frac{1}{D^m}. \quad (2.41)$$

Разстоянието между две произволни светулки i и j в x_i и x_j респективно, е декартовото разстояние:

$$r_{ij} = \|x_i - x_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_{i,k} - x_{j,k})^2} \quad (2.42)$$

където $x_{i,k}$ е k -тия компонент от пространствената координата x_i от i -тата светулка.

В 2-D случая, ние имаме

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (2.43)$$

Движението на светулката i привлечено от друга по-привлекателна (по-ярка) светулка j се определя чрез:

$$x_i = x_i + \beta_0 e^{-\gamma r_{ij}^2} (x_j - x_i) + \alpha \varepsilon_i, \quad (2.44)$$

където втория член се дължи на привлекателността. Третият член на полинома е случайността с α по същество параметъра на случайност, и ε_i е вектора на случайни числа описан от Гаусовото разпределение или равномерното разпределение. Например, най-простата форма е ε_i може да бъде заменено с $\text{ранд}(\text{rand}) - \frac{1}{2}$, където ранд е генератор на случайни числа, равномерно разпределени в интервала $[0, 1]$. За по-добро наше изпълнение, ние може да вземем $\beta_0 = 1$ и $\alpha \in [0, 1]$.

Заслужава да се отбележи, че (2.44) е случайния ход на пристрастените към най-ярките светулки. Ако $\beta_0 = 0$, той се превръща в произволен случаен ход. По-нататък, случайния член на полинома може лесно да бъде разширен до други разпределения подобни на полетите на Лёви. Параметъра γ вече характеризира вариацията на привлекателността, и неговата стойност е от решаващо значение в определяне на скоростта на конвергенция и как се държи алгоритъма на светулките. В теорията, $\gamma \in [0, \infty)$, но в практиката, $\gamma = O(1)$ се определя с характерната дължина D на системата, която се оптимизира. По този начин, за повече приложения, обикновено варира от 0.1 до 10.

Търсене по шаблон/еталон (Pattern search)

Търсенето по еталон (PS) е от семейството на методите за числена оптимизация, които не изискват ползване на производните (градиента на целевата функция и матрицата на Хесе) при оптимизацията. Такива методи за оптимизация са познати също като методи за директно търсене, безградиентни, или методи “черна кутия”.

Наименованието “търсене по еталон” (pattern search), е въведено от Хуук и Джийвс [113]. Този метод има свойства определени от предположението, че съществува гребен на целевата функция и предпоставката, че всяка успешна система от премествания (конфигурация) в пространството на параметрите има смисъл да се изпробва отново. Методът се основава на предположението за унимодалност (съществува само едно оптимално решение). Избира се начална точка от допустимата област на променливите и едновременно с това се определя размерът на пробната стъпка (размерът на решетката). След това за всяка променлива се правят пробни стъпки в положителна и отрицателна посока, когато се получи подобрение в стойността на целевата функция, получената точка служи за нова временна базова точка. След извършването на всички пробни стъпки в началната точка се прави движение по направление текущата точка и най-добрата базова точка. Това движение се състои в екстраполация по линията свързваща текущата и базовата точка. Математически тази екстраполация се изразява така:

$$x_{ib}^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} + \alpha(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}),$$

където $x_{ib}^{(k+1)}$ става нова временна базова точка. В този израз k е индексът на етапа, а α е коефициент, приемащ целочислени стойности по-големи или равни на единица. След намирането на нова най-добра точка, отново се правят пробни стъпки в положителна и отрицателна посока за всяка променлива, за да се провери дали не може да се намери по-добра базова точка. Ако получим подобрение на стойността на целевата функция в сравнение със стойността ѝ в последната базова точка, търсенето по направление се повтаря. Поради същността на коефициента α всяка следваща екстраполация става по-смела и по-смела докато се прескочи екстремумът или гребенът. В този случай алгоритъмът предвижда връщане в последната базова точка, около която се правят нови пробни стъпки с двукратно намален размер на стъпката, и се извършва ново търсене по направление. Когато размерът на пробните стъпки стане по-малък от предварително зададена стойност (толеранс), а вече не се получава съществено подобрение на стойността на целевата функция, процедурата завършва.

При този метод след няколко изменения в посоката, направлението на търсене съвпада с формата на гребена. Типично е, че когато се започне търсене по направление, размерът на хода по направлението може да нарасне от 10 до 100 пъти спрямо основната стъпка. Когато се получи влошаване на стойността на целевата функция, единствения начин да се продължи търсенето, е да се започне отново от последната базова точка като размерът на стъпката (размерът на мрежата) се намалява. Най-често стъпката се намалява наполовина. Фактът, че този алгоритъм може да се „ускорява“ води до неговата универсална ефективност. Методът дава приближено решение, което непрекъснато се подобрява в процеса на търсене. Методът се оказва особено подходящ при намиране на екстремум на хиперповърхнини, които имат ярко изразени долини (оврази). При такива повърхнини градиентните методи работят лошо.

Обобщено, методът представлява следното:

Всеки теоретичен параметър (всяка компонента във вектора на променливите) варира със стъпка (+1) и (-1). Ако има подобрение на целевата функция поне за един параметър, се извършва търсене по намереното направление на подобряване. Когато няма такова подобрение за поне един параметър, по-нататъшното подобряване на стойността на целевата функция се постига като размерът на стъпката се намалява наполовина. Процесът се повтаря, докато стъпките станат достатъчно малки.

Конвергентен (сходим) Pattern search метод е предложен от Ю [245, 246], който доказва, че методът е сходим, използвайки теорията на положителните базиси. По-късно, Торцзон [228] използва положителните базисни техники, за да докаже сходимостта на друг Pattern search метод, за определен клас функции. Богани и др. [28,

29] предлагат генерален Pattern search алгоритъм за клас от негладки оптимизационни задачи със специфична структура.

Pattern search солвърът в Matlab “Optimization toolbox” [157] *ползва директно търсене (Direct Search), което се базира на генерален „general pattern search“ (GPS) алгоритъм. Директното търсене е подход за решаване на оптимизационни задачи, при който не се изисква никаква информация за градиента на целевата функция. За разлика от вече традиционните методи за оптимизация, които използват информация за градиента, или по-високи производни за търсене на оптимална точка, direct search алгоритъмът търси множество от точки в околността на текущата точка. При това се търси точка, в която стойността на целевата функция е по-ниска от стойността в текущата точка. Директното търсене (direct search) може да се ползва за решаване на задачи, в които целевата функция не е диференцируема, или дори не е непрекъсната.*

General Pattern Search (GPS) алгоритъмът използва фиксирани директни вектори, изчислява поредица от точки на сближаване с оптималната точка. На всяка стъпка, алгоритъмът търси множество от точки, наречени мрежа, в околността на текущата точка; мрежата се формира чрез добавяне в текущата точка на скаларно кратни на множество вектори, наречени еталон. Ако алгоритъмът намери точка в мрежата, която подобрява целевата функция в текущата точка, новата точка става текуща точка при следващата стъпка на алгоритъма. В секцията “stopping criteria” на наличния интерфейс за оптимизация (optimtool), е необходимо да бъдат зададени множество от критерии за спиране на pattern search алгоритъма, такива като лимит на итерациите Iteration limit (“max iteration”), толеранс на мрежата Mesh tolerance и др.

Предложеният хибриден алгоритъм за оптимизация на портфейл на база FFA-PS се реализира чрез изпълнение на описаните по-долу стъпки:

Стъпка 1. Определяне на FFA параметрите: α , β_0 и γ . Задаване на лимит на итерациите – itlim. Задаване на лимит на разнообразяванията – divlim.

Инициализирана на брояча на итерациите $k = 0$ и брояча на диверсифициранията $divcount = 0$.

Стъпка 2. Инициализация на S позиции на светулките $\{P^k(1), \dots, P^k(S)\}$, посредством стратегия за двустепенна инициализация [107, 141].

While (Повтаряй докато се подобрява яркостта на поне една светулка):

Стъпка 3. За всяка светулка $P^k(i)$ да се намери най-ярката светулка, която може да се види.

Стъпка 4. Изчисляване на нови позиции на светулките и актуализирана на рояка светулки. Обновяване на брояча на итерациите: $k = k + 1$. Проверка на критерия за спиране и ако е изпълнен – преминаване към Стъпка 6.

End While (Край на цикъла)

Стъпка 5. Ако $\text{mod}(k/100) = 0$, стартирана на процедурата *Pattern search*.

Стъпка 6. Показване на намерения най-добър резултат на лицето вземащо решение.

Стъпка 7. Проверка на критериите за спиране. Ако някой критерий за спиране е изпълнен – преминаване към Стъпка 8, в противен случай изпълняване на диверсифициране на търсенето. Обновяване на брояча на диверсификациите: $\text{divcont} = \text{divcount} + 1$.

Стъпка 8. КРАЙ.

По подразбиране се приема, че $\text{itlim} = 10\,000$. Приема се, че броят на светулките в популацията е 40. Тази стойност може да варира при различните конкретни задачи.

Съответните стойности на параметрите са както следва:

$$\alpha = 0.5, \beta_0 = 0.2, \text{ и } \gamma = 1.$$

Кодиране и инициализация

Нека $\Delta x_{i,t}$, изменението на стойността на рисковия актив a_i в момента t бъде променливо решение, $i = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T - 1$. От (2.17) изменението на стойността на безрисковия актив a_0 в момента t се изразява чрез

$$\Delta x_{0,t} = - \left(\sum_{i=1}^n \Delta x_{i,t} + \sum_{i=1}^n c_{i,t} |\Delta x_{i,t}| \right), \quad t = 0, \dots, T - 1 \quad (2.30)$$

Решението $[\Delta x_{1,0}, \dots, \Delta x_{n,0}; \dots; \Delta x_{1,T-1}, \dots, \Delta x_{n,T-1}]$ от модела уравненията (2.16) – (2.18) е записано с шифър като позиция на частиците в реално и остойностено представителство $[p_{1,0}^0, \dots, p_{n,0}^0; \dots; p_{1,T-1}^0, \dots, p_{n,T-1}^0]$

Нека $P^k(s) = [p_{1,0}^k(s); \dots; p_{n,0}^k(s); \dots; p_{1,T-1}^k(s), \dots, p_{n,T-1}^k(s)]$ и

$V^k(s) = [v_{1,0}^k(s), \dots, v_{n,0}^k(s); \dots; v_{1,T-1}^k(s), \dots, v_{n,T-1}^k(s)]$ означава съответно позицията и

скоростта на частицата s при итерация k .

За да се направят изходни позиции на рояк в допустимата област и с висока степен на разнообразие, се предлага двуетапна стратегия на инициализация, включително етап на инициализация за няколко периода и етап на диверсификация.

(1) Етап на инициализация за няколко периода

Устойчивото формулиране на изменението на стойността на рисковия актив a_i в момента t се изразява с $x_{i,t}^{+R} = \sum_{j=1}^t \bar{g}_i(j,t) \xi_{i,j-1} - \hat{g}_i(j,t) z_{i,j}^* |\xi_{i,j-1}| + \xi_{i,t}$, където $\xi_{i,0} = x_{i,0} + \Delta x_{i,0}$, $\xi_{i,t} = \Delta x_{i,t}$, z_t^* - представлява оптималното решение в модела (2.16), $i = 0, \dots, n; t = 1, \dots, T - 1$. То показва, дали $x_{i,t}^{+R}$ удовлетворява уравнението (2.18), то зависи от изменението на стойността на двойката в текущия период $\Delta x_{i,t}$ и предходния период $\Delta x_{i,j}, j = 0, \dots, t - 1$. По този начин се гарантира, че всички изходни позиции са в допустимата област на модела (2.16), позицията в текущия период $[p_{1,t}^0, \dots, p_{n,t}^0]$ трябва да се инициализира на база позициите от предходния период $[p_{1,0}^0, \dots, p_{n,0}^0; \dots; p_{1,t-1}^0, \dots, p_{n,t-1}^0]$. С оглед гореизложеното, етапа на инициализация за няколко периода, може да се представи по следния начин, като за удобство на обозначенията са следните: $x_{0,t}^R = x_{0,t}$, $x_{i,0}^R = x_{i,0}$, $t = 0, \dots, T - 1; i = 0, \dots, n$.

Стъпка 1. Нека $s = 1$

Стъпка 2. Нека $t = 0$ и означава портфейла в момента t като $[x_{0,t}^R, x_{1,t}^R, \dots, x_{n,t}^R]$

Стъпка 3. На случаен принцип се генерира изходната позиция $[p_{1,t}^0(s), \dots, p_{n,t}^0(s)]$ в момента t базирана на портфейла $[x_{0,t}^R, x_{1,t}^R, \dots, x_{n,t}^R]$, където $[p_{1,t}^0(s), \dots, p_{n,t}^0(s)]$ удовлетворява уравнението (3.17). По-нататък, изчисляваме портфейла $[x_{0,t+1}^R, x_{1,t+1}^R, \dots, x_{n,t+1}^R]$ на база позицията $[p_{1,0}^0(s), \dots, p_{n,0}^0(s); \dots; p_{1,t}^0(s), \dots, p_{n,t}^0(s)]$

Стъпка 4. Нека $t = t + 1$. Ако $t \leq T - 1$, то се връщаме на Стъпка 3; в противен случай, се получава изходната позиция на частицата s означена с $P^0(s)$, и отиваме на Стъпка 5.

Стъпка 5. Нека $s = s + 1$. Ако $s \leq S_m$, то се връщаме на Стъпка 2, където S_m означава номера на позицията генерирана в етапа на инициализация на няколко периода; в противен случай определяме и получаваме S_m изходни позиции означени с $Z_{S_m}^0 = \{P^0(1), \dots, P^0(S_m)\}$.

(2) Етап диверсифициране (разнообразяване)

След етапа на инициализация на няколко периода, всички изходни позиции са в допустимата област на модела (2.16). Добре известно е, че позициите с високо ниво на разнообразие ще повишат ефективността на FFA [107]. С цел да се подобри разнообразието на позициите, се избира S да бъде в по-разнообразна позиция от $Z_{S_m}^0$,

където S означава мястото на рояка в FFA-PS алгоритъма. Следвайки подхода на Хасанзаде и др. [107], етапът на диверсификация се описва по следния начин:

Стъпка 1. Изчислява се $\pi_{i,t} = \frac{(\bar{p}_{i,t} - \underline{p}_{i,t})^{-1}}{\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^n (\bar{p}_{i,t} - \underline{p}_{i,t})^{-1}}$, където

$$\bar{p}_{i,t} = \max\{p_{i,t}^0(s) | s=1, \dots, S_m\}, \quad \underline{p}_{i,t} = \min\{p_{i,t}^0(s) | s=1, \dots, S_m\}.$$

Произволно избираме позиция от $Z_{S_m}^0$, и я прехвърляме в множеството Z_S^0 , където я ползваме за запазване на по-разнообразните позиции, които са били селектирани.

Стъпка 2. Намира се $P^{\max} \in Z_{S_m}^0$, където $P^{\max} = [p_{1,0}^{\max}, \dots, p_{n,0}^{\max}, \dots; p_{1,T-1}^{\max}, \dots, p_{n,T-1}^{\max}]$, така че $P^{\max}$ да е в по-разнообразна позиция от всички позиции в Z_S^0 , така че

$$\left[\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^n (\pi_{i,t} |p_{i,t}^{\max} - p_{i,t}^d|)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \max_{P \in Z_{S_m}^0} \min_{P^d \in Z_S^0} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^n (\pi_{i,t} |p_{i,t} - p_{i,t}^d|)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.31)$$

$$\text{където } P = [p_{1,0}, \dots, p_{n,0}; \dots; p_{1,T-1}, \dots, p_{n,T-1}], \quad P^d = [p_{1,0}^d, \dots, p_{n,0}^d; \dots, p_{1,T-1}^d, \dots, p_{n,T-1}^d]$$

Стъпка 3. Прехвърляме $P^{\max}$ на Z_S^0 . Ако $|Z_S^0| = S$, тогава прекратяваме и получаваме S диверсифицирани позиции означени с $Z_S^0 = \{P^0(1), \dots, P^0(S)\}$; в противен случай, се връщаме на Стъпка 2.

Изходните позиции в Z_S^0 удовлетворяват ограниченията в модела (2.16) – (2.18), и имат висока степен на диверсификация. Произволно се генерира изходната скорост на частицата s означена с $V^0(s) = [v_{1,0}^0(s), \dots, v_{n,0}^0(s); \dots; v_{1,T-1}^0(s), \dots, v_{n,T-1}^0(s)]$, $s=1, \dots, S$, където $-V_{\max} \leq v_{i,t}^0(s) \leq V_{\max}$, и $V_{\max}$ определя максималната стойност на скоростта.

(3) Критерии за спиране

Критериите за спиране са два:

1) itlim – лимит на итерациите, зададен от ЛВР – при надвишаването му, алгоритъмът спира.

2) divlim – лимит, показващ колко пъти се извършва разнообразяване на процеса на търсене.

Разгледаните стъпки на предложения Хибриден алгоритъм са с полиномиална изчислителна сложност. Това дава основание да се твърди, че при зададен краен брой итерации Хибридният алгоритъм има полиномиална изчислителна сложност и би могъл успешно да се използва за решаване на оптимизационни задачи с голям размер.

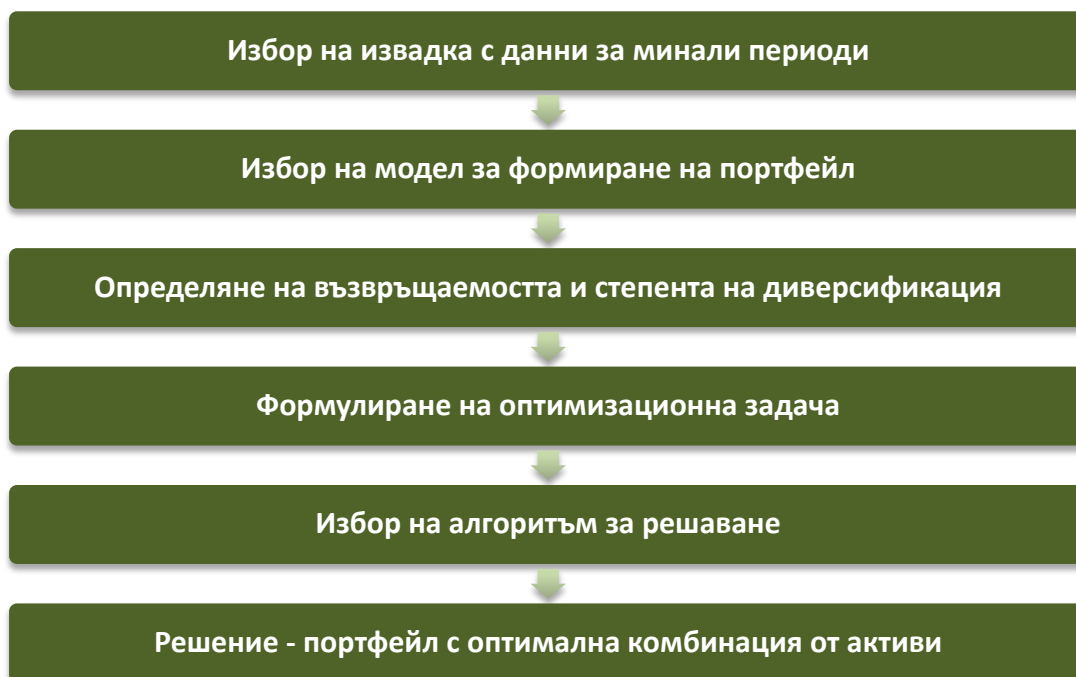
Дотук бе представена устойчива задача за селекция на портфейл, като се отчитат поведенческите характеристики на инвеститорите. За да се решат задачи на базата на

модела за оптимизация на портфейл (2.28) – (2.33), е предложен хибриден еволюционен алгоритъм, който използва двуетапната стратегия за инициализация, описана в [107, 141]. Тази двуетапна стратегия за инициализация гарантира, че изходните позиции са в допустимата област и с висока степен на разнообразие. Резултатите показват, че предложеният хибриден алгоритъм е ефективен и успешен в решаването на нелинеен модел за оптимизация на портфейл с посочените ограничения.

Прилагайки скаларизация, устойчивият модел на портфейл (2.28) – (2.33) включва един критерий / една целева функция. Той може да бъде разширен в модел с отчитане на минималните транзакционни лотове, както и ограниченията за такси и кардиналност, които съществуват в реалния свят.

2.5 Методология за формиране на портфейл

За формирането на портфейл с различни активи могат да се разграничат няколко основни етапи. Тези етапи касаят както изходните данни, вкл. предпочитанията на лицето, вземащо решения, така и използваните модели и алгоритми за решаване на формулираните задачи. Следователно, общата постановка на проблема за определяне на комбинацията от активи за формиране на портфейл може да бъде описана чрез една обобщена методология. В настоящия дисертационен труд се предлага обобщена методология за формиране на портфейл, която се реализира чрез изпълнението на следните процедури, както е показано на Фиг. 5.



Фиг. 5. Обобщена методология за определяне на оптимална конфигурация на активи, формиращи портфейл

На първия етап се определя времевата извадка с данни за минали периоди, на база на която ще се определи съотношението на активите за портфейла. Това може да бъде набор от публично достъпни времеви серии за определени активи (индекси) за конкретно избран период във времето. На следващия етап е необходимо да се избере подходящ модел, с помощта на който ще се оптимизира бъдещият портфейл. Могат да се използват както еднокритериални оптимизационни модели (напр. класическия модел на Марковиц), така и многокритериални модели. Пример за такъв многокритериален модел е формулирания по-горе двукритериален модел (2.22) – (2.27). След като вече е избран моделът, трябва да се определи желаният процент на очакваната възвръщаемост (стъпка 3) и желаната целева стойност, осигуряваща степента на диверсификация на портфейла. На база на така определената извадка за конкретния период, избрания модел и възвръщаемостта се решава съответна оптимизационна задача. В зависимост от типа на задачата – еднокритериална или многокритериална е необходимо да се избере съответен метод и алгоритъм за решаване. В резултат на решаването на конкретната задача се определя оптималното или Парето-оптимално съотношение между избраните активи, които ще съставляват конкретния портфейл.

Глава 3. Резултати от проведените числени експерименти

В тази глава са описани проведените числени експерименти върху задачи, базирайки се на модела (2.28 - 2.33) за оптимизация на портфейл при конкретни ограничения. Въз основа на исторически данни са формулирани два експериментални модела съответно за три и за шест актива, за да се изследва ефективността на предложения хибриден алгоритъм за оптимизация на портфейл. Посредством два оптимизационни подхода Interior Point (солвър *fmincon*) в средата Matlab и предложения нов Хибриден алгоритъм за оптимизация на портфейл са получени резултати за двата модела и е направено сравнение.

3.1 Модел с три актива и 10-годишни исторически данни

Прилага се оптимизация по модифицирания модел на Марковиц за средна вариация (2.28) – (2.33), за да се конструира портфейл от френски акции, американски държавни ценни книжа и парични средства в брой, примерно депозит в банка. Използват се исторически данни за възвръщаемостта за тези три класа активи за изчисляване на тяхната бъдеща очаквана възвръщаемост. Повечето модели за оптимизация чрез средна вариация комбинират историческите данни с други показатели като например оценки на приходите, оценки на анализатори, оценки и показатели на растежа и т.н. Тук се извършват само ценови оценки за експозиционна простота. Използва се индексът EURONEXT³ 100 (^N100) за възвръщаемостта на акции, 10-годишен индекс на съкровищни бонове (10-year Treasury bond index-CBOE Interest Rate 10 Year T No (^TNX)⁴), за възвръщаемостта на държавни ценни книжа, по-нататък наричани само облигации, и се предполага че паричните средства в брой са инвестирани в банков депозит, чиято възвръщаемост е 1 % положителна лихва. Годишните времеви серии за общата възвръщаемост са представени отделно в Приложение 2 за всеки отделен актив – облигации, акции и депозити, месечно за периода от месец март 2008 до месец февруари 2018, т.е. 120 месечен период или 10 години.

³ Индексът Euronext 100 е blue chip индекс на Европейската борса. Той включва най-големите и най-ликвидни акции, търгувани на Euronext. Всяка акция трябва да се търгува повече от 20% от еминирания в рамките на 1 година. в хода на периодичния период на анализ. Към 21 декември 2002 г. акциите в този индекс представляват 80% (1,177 млрд. Евро) от общата пазарна капитализация на инвестиционната вселена на Euronext.

https://en.wikipedia.org/wiki/Euronext_100

⁴ Държавни (правителствени) облигации или бонове на суверен са облигации, емитирани от националните правителства, обикновено с обещание за плащане на периодични лихвени плащания и за погасяване на номиналната стойност на датата на падежа. Държавните облигации обикновено са деноминирани в собствената валута на страната, като по подразбираненоблигациите не могат да бъдат изкупени преди датата им на падежа.

https://en.wikipedia.org/wiki/Government_bond

Извлечение от Приложение 2. Исторически данни за три класа активи за десетгодишен период

	Облигации	Акции	Депозити
Март 2008	3.562000	830.659973	100.93
Април 2008	3.486000	899.570007	101.01
Май 2008	3.751000	890.700012	101.1
Юни 2008	4.025000	778.390015	101.18
Юли 2008	3.942000	753.000000	101.27
Август 2008	3.942000	777.250000	101.35

Нека “общата възвръщаемост” за актива $i = 1, 2, 3$; и $t = 0, \dots, t_f$, бъде означена с I_{it} , където $t = 0$ кореспондира на март 2008, и $t = t_f$ кореспондира на февруари 2018. За всеки актив i суровите данни I_{it} , $t = 0, \dots, t_f$, могат да се конвертират в проценти на възвръщаемост r_{it} , $t = 0, \dots, t_f$, посредством формулата:

$$r_{it} = \frac{I_{i,t} - I_{i,t-1}}{I_{i,t-1}} \quad (3.1)$$

Нека случайният процент на възвръщаемост на актива i бъде означен T_i . От горните историческите данни може да се изчисли аритметичната средна на процентната възвръщаемост на всеки актив:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{t_f} \sum_{t=1}^{t_f} r_{it} \quad (3.2)$$

За горните данни (пълни в Приложение 2) се получава следният резултат: (виж Таблица 4)

Таблица 4. Аритметична средна на процентната възвръщаемост

	Облигации	Акции	Депозити
Аритметична средна $\bar{r}_{it}$	0.31%	0.30%	0,08456%

В практиката се ползва геометричната средна на възвръщаемостта (доходността), тъй като процентната възвръщаемост е променлива във времето. *Геометричната средна е постоянната годишна норма на възвръщаемост.*

Пример за това са пенсионните фондове т. нар. Допълнително пенсионно осигуряване в България основаващо се на капиталовия модел с дефинирани вноски. При него пенсионните плащания пряко зависят от размера на направените вноски, разпределената доходност от инвестирането им и съответните такси и удържки. Ако размерът на вноската в задължителните фондове се определя от действащото законодателство, то в доброволните фондове той зависи от вас самите или от вашия работодател/осигурител. Вие посещавате пенсионен фонд, за да депозирате дългосрочна парична инвестиция с надежда, че ще натрупа лихва за период от 3 години. Да

предположим, че инвестицията печели 10% през първата година, 50% през втората година и 30% през третата година. Каква е средната му възвръщаемост? В този случай това не е средно аритметичната стойност, тъй като през първата година инвестицията е умножена по 1.10, във втората година е умножена с 1.50, а през третата година е умножена с 1.30. Правилната мярка е средната геометрична стойност на тези три числа, което е около $1.2897 \approx 1,29$ или 29% от годишния лихвен процент. $(1.10 \times 1.50 \times 1.30)^{1/3} = 1.2897$. Изчисленията по-горе са с илюстративен характер. От данните за 01.01.2017-31.12.2017 г. за възвръщаемостта на българските пенсионни фондове, специално допълнителния пенсионен фонд (т. нар. ДЗПО) например на ПОК „ДСК-Родина” АД е 9,56%, т.е. допълнителното задължително пенсионно осигуряване за една година има тази доходност. Обаче в дългосрочен план за периода от 2002 до 2017 г., т. е. 5 години, изчислената средно геометрична доходност на пенсионните фондове, управлявани от ПОК „ДСК-Родина” АД за ДПФ пада на 5,39%, постоянната годишна възвръщаемост.

Геометричната средна е постоянният месечен процент на възвръщаемост, приложена за месеците $t = 0$ до $t = t_f - 1$, за да се получи Общата възвръщаемост I_{itf} , започвайки от I_{i0} . Формулата за геометрична средна е:

$$\mu_i = \left(\prod_{t=1}^{t_f} (1 + r_{it}) \right)^{\frac{1}{t_f}} - 1 \quad (3.3)$$

Следният резултат е получен за горните данни (пълното представяне е показано в Приложение 2):

Таблица 5. Геометрична средна на възвръщаемостта в проценти

	Облигации	Акции	Депозити
Геометрична средна μ_i	- 0.22%	0.18%	0,08456%

Изчисляваме матрицата на ковариацията по формулата:

$$\text{cov}(T_i, T_j) = \frac{1}{t_f} \sum_{t=1}^{t_f} (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j) \quad (3.4)$$

От горните данни матрицата на ковариацията изглежда по следния начин:

Таблица 6. Матрица на ковариацията

Ковариация	Облигации	Акции	Депозити
Облигации	0.010616427928	- 0.000337020935	- 0.000000539066
Акции	- 0.000337020935	0.002284457879	0.000000462459
Депозити	- 0.000000539066	0.000000462459	0.000000002090

Чувствителността на процентната възвръщаемост на всеки актив се изчислява по формулата:

$$\sigma_i = \sqrt{\text{COV}(T_i, T_j)} \quad (3.5)$$

и резултатът е представен в Таблица 7:

Таблица 7. Чувствителност на възвръщаемостта

	Облигации	Акции	Депозити
Чувствителност σ_i	10,30%	4,78%	0,0046%

Тогава изчисляваме матрицата на корелацията $\rho_{ij} = \frac{\text{COV}(T_i, T_j)}{\sigma_i \sigma_j}$ (вж Табл. 8.):

Таблица 8. Матрица на корелацията

Корелация	Облигации	Акции	Депозити
Облигации	1.	- 0,068453	- 0,113775
Акции	- 0,068453	1.	0,210323
Депозити	- 0,113775	0,210323	1.

Решаването на формулираните оптимизационни задачи на база на предложения модел (2.28) – (2.33) става по метода на ε -ограничения. Съществено при него е, че се получават слабо Парето-оптимални решения.

Формулировката на задачата за оптимизация на портфейла е:

$$\begin{aligned} \min F = & [0.010616427928x_{\text{ОБЛ}}^2 + 2.(-0.000337020935)x_{\text{ОБЛ}} \cdot x_{\text{АКЦИИ}} + \\ & + 2.(-0.000000539066)x_{\text{ОБЛ}} \cdot x_{\text{ДЕПОЗИТИ}} + 0.002284457879x_{\text{АКЦИИ}}^2 + \\ & + 2.0.000000462459x_{\text{АКЦИИ}} \cdot x_{\text{ДЕПОЗИТИ}} + 0.000000002090x_{\text{ДЕПОЗИТИ}}^2], \end{aligned} \quad (3.6)$$

при ограничения:

$$\mu^T X = -0.22 x_{\text{ОБЛИГАЦИИ}} + 0.18 x_{\text{АКЦИИ}} + 0.08456 x_{\text{ДЕПОЗИТИ}} \geq R$$

$$\left| \sum_{i=1}^3 x_i^2 - 0,33333 \right| \leq 0,05,$$

$$\sum_{i=0}^3 \Delta x_{i,t} + \sum_{i=1}^3 c_{i,t} |\Delta x_{i,t}| = 0, \quad t = 1, \dots, T-1;$$

$$x_{\text{ОБЛИГАЦИИ}} + x_{\text{АКЦИИ}} + x_{\text{ДЕПОЗИТИ}} = 1$$

$$x_{\text{ОБЛИГАЦИИ}}, x_{\text{АКЦИИ}}, x_{\text{ДЕПОЗИТИ}} \geq 0$$

Горната задача се решава 10 пъти за различни стойности на възвръщаемостта в проценти: $R = 6\%$, $R = 6,5\%$, ..., $R = 10,5\%$ със стъпка на нарастване $0,5\%$. Най-напред оптимизацията е извършена с помощта на разработения хибриден алгоритъм за селекция на портфейл, а след това с помощта на солвъра **fmincon** от MATLAB “Optimization

Toolbox” [157] посредством алгоритъма на вътрешната точка (*Interior point algorithm*), чието предимство е, че допуска всички видове ограничения.

3.1.1 Резултати при оптимизация на портфейл с 3 актива чрез предложения двукритериален модел и използване на хибридният алгоритъм и със солвър *fmincon* от Matlab

В първият експеримент се извърши оптимизация по модела на Марковиц за средна вариация, като се разработи модел на портфейл от американски държавни ценни книжа (облигации), френски акции и парични средства в брой, за целите на експеримента 100 евро депозит в банка при 1% постоянна положителна лихва за период от 10 години. Използвани са исторически данни за възвръщаемостите на тези три актива, за да се изчисли геометричната средна, матрицата на ковариацията и матрицата на корелацията, които послужиха за формулирането на задачата за оптимизация на портфейл като задача на квадратичното програмиране, така че очакваната възвръщаемост да не е по-малка от предварително зададената такава. Извършени са по десет изчисления за всяка ставка на възвръщаемост. От тези десет пресмятания е избрано най-доброто решение, което в таблиците е отбелязано с червено.

В Таблица 9 са представени резултатите от проведените числени експерименти с хибридният алгоритъм. За всяка стойност на параметъра R от 6 % до 10,5% са извършени по 10 експеримента с Хибридният алгоритъм. С червено е отбелязано най-доброто решение, при зададената очаквана възвръщаемост за оптимизация на портфейла от 3 актива на база исторически данни за период 120 месеца или 10 години.

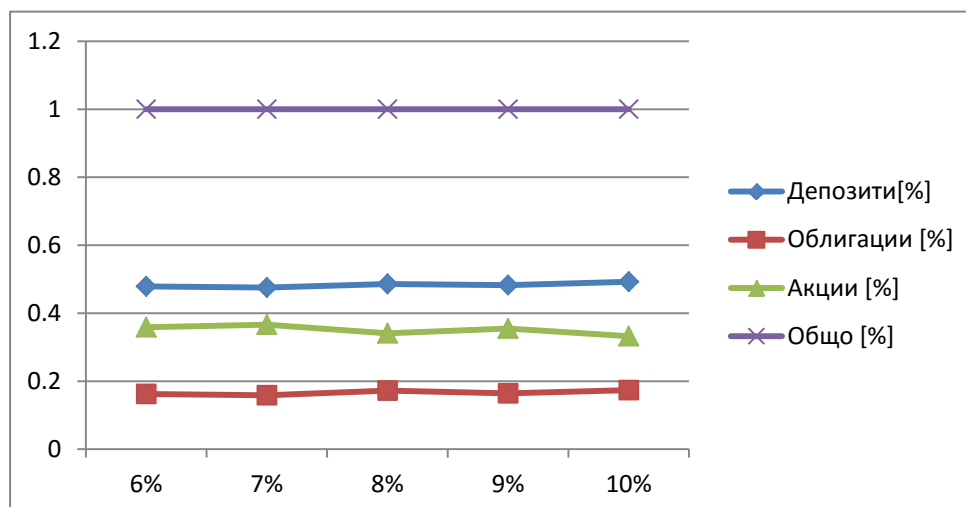
Таблица 9. Резултати от хибридният алгоритъм за 3 актива и възвръщаемост от 6 % до 10,5 %

№	Стойност на целевата функция	Оптимален портфейл		
		Облигации	Акции	Депозити
6% Възвръщаемост				
1	5.794066940371048e-04	0.195533308441747	0.305914684499346	0.498582406818212
2	5.431084013674748e-04	0.159477056833486	0.370032551199147	0.470295740570779
3	5.871732296605341e-04	0.148121541017727	0.416191315799532	0.436124992962780
4	6.599734985032965e-04	0.152215198424261	0.448699495334937	0.397648450327024
5	6.051161402039595e-04	0.194374079230470	0.328854690650089	0.476588428394402
6	5.822353927709721e-04	0.149571215636529	0.411098896797715	0.439676629466057
7	6.626166141358330e-04	0.150578769257309	0.452484170030794	0.394181626971399
8	6.417347482106582e-04	0.153503697558590	0.437228280942269	0.410088866107027
9	7.333492161955965e-04	0.160118041513668	0.473496518659992	0.365081714458605
10	5.352082093821857e-04	0.162491508733274	0.358816119183875	0.478759042850245
6,5% Възвръщаемост				
1	5.442979344336972e-04	0.159139305439824	0.371448985990318	0.468182017525357
2	6.416346082018674e-04	0.160827220719416	0.425210889685456	0.413930514949773
3	5.261467870846590e-04	0.162489036358221	0.352846326472330	0.483859796759362

4	5.434546800057076e-04	0.157915521198288	0.373310024573035	0.467850756967271
5	7.450042795219328e-04	0.162072966763225	0.476211355233787	0.359636416518192
6	5.596358057414105e-04	0.188629428531753	0.311336779621223	0.500083824390182
7	5.897668451826954e-04	0.150141715535426	0.414390514672566	0.435216997507893
8	5.3456556063066810e-4	0.172462286329090	0.335922217806592	0.490625495864318
9	6.947483104337834e-04	0.222580797345546	0.306614105395672	0.470801185083517
10	7.155039114284974e-04	0.157823145371520	0.468198939450959	0.373694701025638
7% Възвръщаемост				
1	5.440738491588297e-04	0.154888413683907	0.379443177414729	0.464764353717924
2	5.364376266195756e-04	0.157477908191877	0.369752398164340	0.472756935591433
3	7.710618099026495e-04	0.167096922606101	0.481088338677588	0.350201693538688
4	6.882542847260275e-04	0.229322297346714	0.274719810688559	0.497530115491841
5	6.936899895512631e-04	0.158343214155564	0.456535811214177	0.383819191786815
6	7.103251103103402e-04	0.157124100078218	0.466690233108534	0.375781082275110
7	5.340420398373304e-04	0.158457663599483	0.366300200155630	0.475623369519667
8	14.98067516678000e-04	0.338073900691005	0.406385508071956	0.255413722310597
9	8.262425970617424e-04	0.210256099265144	0.427467473010926	0.362223959876798
10	6.155349642959672e-04	0.153973468695615	0.422393745427522	0.423529554412970
7,5% Възвръщаемост				
1	8.962919903551960e-04	0.189374367665898	0.503780718780184	0.306539467988807
2	7.905292284045745e-04	0.204492879929075	0.420800948034883	0.374613521589646
3	6.066751793308681e-04	0.149835724162923	0.424196687022380	0.425713240237189
4	8.960790990994452e-04	0.189272772360102	0.503854749607258	0.306499756496495
5	6.430126968124644e-04	0.222968729921823	0.259866945150670	0.516156501765152
6	7.604288606922900e-04	0.164358470117691	0.480183504647826	0.355145136476845
7	5.498980469691202e-04	0.154560234842152	0.383602629823683	0.460847135334165
8	6.593600319533262e-04	0.150883084717817	0.450374094027291	0.396946596580798
9	6.191190916357203e-04	0.149718209875962	0.431095315650873	0.418859900137075
10	6.720450108636256e-04	0.150528494068070	0.457326414823556	0.390594413273490
8% Възвръщаемост				
1	6.426484340690341e-04	0.156347781231879	0.433191705983175	0.410432218460466
2	7.004170184410566e-04	0.215517424901867	0.334685099962713	0.449762546829615
3	9.447006303881228e-04	0.198947195842128	0.509375968174760	0.291278929050250
4	12.42716612330000e-04	0.302138145415205	0.393478184078563	0.304400502890405
5	5.409095216850394e-04	0.172202271373571	0.340980426992248	0.486076731961372
6	5.557614148490947e-04	0.152311105012244	0.391163312102840	0.457232586278248
7	11.59954082397000e-04	0.279988669440809	0.422277624288471	0.297740078069233
8	5.536204317288441e-04	0.152125073850862	0.390219371428896	0.455774626032774
9	5.705306472313555e-04	0.167927187716319	0.370136665537512	0.460079779153184
10	7.465973677213806e-04	0.222177304389406	0.346583505978954	0.428588450481248
8,5% Възвръщаемост				
1	5.805129778591709e-04	0.147559574300367	0.413376992388219	0.438676769891567
2	10.14184127774000e-04	0.213415322256648	0.514442268754642	0.269971127894759
3	5.798795416457517e-04	0.148076033072192	0.412195821496783	0.438746702283117
4	7.621504515083446e-04	0.164263101382610	0.481153875448794	0.353155573982962
5	8.169937630451003e-04	0.173656603420912	0.492634530873589	0.333291117182610
6	5.406316110207684e-04	0.155358409355396	0.376441585393238	0.466144297179756
7	7.046778014250980e-04	0.239363717167327	0.243775118317720	0.515845500666105
8	9.147605945350609e-04	0.192990563389095	0.506086392615514	0.300550518605113

9	10.01975321625000e-04	0.235231915366964	0.462062310465140	0.302692809233444
10	5.808735032877058e-04	0.191608063595826	0.318843880504078	0.489439202362254
9% Възвръщаемост				
1	9.700174105573064e-04	0.259013379419728	0.376281570446038	0.363254601206638
2	8.426926262605102e-04	0.177858430891212	0.497961661596299	0.321907264780211
3	6.832472569975525e-04	0.156325544455950	0.454346755095417	0.388379862705947
4	8.862123805794554e-04	0.187238925839857	0.502737220002554	0.308925846605404
5	6.664176970320154e-04	0.151919366472182	0.452435998973929	0.393915769741948
6	7.297344911210703e-04	0.205018049605877	0.383785447547682	0.411264274041798
7	5.342252900066312e-04	0.164043899153538	0.354876815995237	0.482488143886824
8	6.036584205188442e-04	0.157771284088682	0.409371262136597	0.432241442746508
9	8.729486926658508e-04	0.184263605016160	0.501567310673566	0.312614482697327
10	6.853016121757851e-04	0.151723038592962	0.462226449957212	0.383738212624350
9,5% Възвръщаемост				
1	8.107006877230902e-04	0.208834608644527	0.422119601189686	0.367767788983150
2	6.617679763195167e-04	0.150183084605978	0.452633494858126	0.395121124829938
3	9.496269520135196e-04	0.199885989862076	0.509956878907790	0.288577374961358
4	5.409994889009059e-04	0.161212003604428	0.365207216927747	0.473011294612398
5	7.317120133663027e-04	0.159758277459276	0.473238364680685	0.365795126204427
6	7.584098552064095e-04	0.163651032389658	0.480286721195640	0.355639609354593
7	6.672736067812207e-04	0.150802220487686	0.454519224680444	0.393202849375762
8	6.140199176673512e-04	0.149501933697684	0.428694094231582	0.419874336395283
9	7.097072721913751e-04	0.156456536124373	0.467377616324931	0.374930384274502
10	6.879916889077004e-04	0.160846082155490	0.449702082781090	0.386802023412649
10% Възвръщаемост				
1	7.360178566644515e-04	0.223648943006295	0.334342281219170	0.441019192741622
2	9.513411227787957e-04	0.202669359530527	0.505733448274139	0.289744039616590
3	6.167624725832800e-04	0.147188649245987	0.433695931260161	0.418420359780409
4	5.339215281768104e-04	0.173777597764689	0.332247313396578	0.492493967815432
5	8.642479288014602e-04	0.214352295934978	0.438763591021559	0.345268090175138
6	6.019459274835754e-04	0.147173833219211	0.425771311895131	0.425522852213078
7	5.729865561473578e-04	0.152574543220531	0.400797985321453	0.446335167850188
8	6.350120581328246e-04	0.198192926515286	0.339495968297061	0.459921997365427
9	5.445705261770948e-04	0.155209814019813	0.379148904589789	0.466129280403780
10	9.749662749171648e-04	0.205068004450814	0.512162496429423	0.280757628838714
10,5% Възвръщаемост				
1	8.065147484977574e-04	0.181227983180976	0.475167173033199	0.341947849249571
2	5.358769006420469e-04	0.159007153629814	0.366376334198682	0.472900239460445
3	7.169493185287082e-04	0.156490967937670	0.470880385220099	0.370835920360120
4	8.918138365203426e-04	0.265109890559089	0.294633924152167	0.439968001930089
5	7.221765330599090e-04	0.157966395834594	0.471257008606903	0.370393161725506
6	5.848398096710093e-04	0.167177103388150	0.380613118019114	0.451619742058177
7	7.317051883166560e-04	0.159544351010052	0.473554492672301	0.366410063536035
8	8.524330062807231e-04	0.180417041356959	0.498364809078785	0.319772997100647
9	5.438202894074236e-04	0.168545481710783	0.351397508313816	0.478512548350726
10	6.995543055562185e-04	0.153584787182987	0.466586020322301	0.378321760296414

На Фиг. 6 са показани трендовете при използване на три актива и различни проценти възвръщаемост.



Фиг. 6 Тренд на активите за експерименталния модел с три актива

3.1.2 Резултати при оптимизация на портфейл с 3 актива чрез предложения двукритериален модел и използване на солвъра *fmincon* от Matlab

Резултатите от оптимизацията за всички десет оптимизационни задачи с втория подход за различните стойности на възвръщаемост чрез солвъра *fmincon* от Matlab „Optimization Toolbox” са обобщени в Таблица 10 както следва:

Таблица 10. Резултати чрез солвъра *fmincon* от Matlab

Стойност на целевата функция f	Възвръщаемост R [%]	Итерации	Общо Изчисления на целевата функция	Оптимален портфейл		
				Облигации [%]	Акции [%]	Депозити [%]
5.387437690212220E-4	6	22	98	0.168966	0.347022	0.484012
5.388831287378297E-4	6.5	18	89	0.168262	0.348713	0.483025
5.430593589223452E-4	7	22	94	0.161816	0.365296	0.472888
5.640361640922369E-4	7.5	22	94	0.154267	0.392602	0.453131
6.311263811064216E-4	8	17	76	0.151272	0.435088	0.413640
6.403115399398162E-4	8.5	18	98	0.144184	0.445191	0.410626
6.710914897734869E-4	9	21	118	0.144424	0.465421	0.387285
6.821441041356491E-4	9.5	16	90	0.138080	0.464479	0.393496
6.883647044897766E-4	10	16	84	0.130139	0.467585	0.396123
6.959992168393732E-4	10.5	20	108	0.127702	0.469306	0.396252

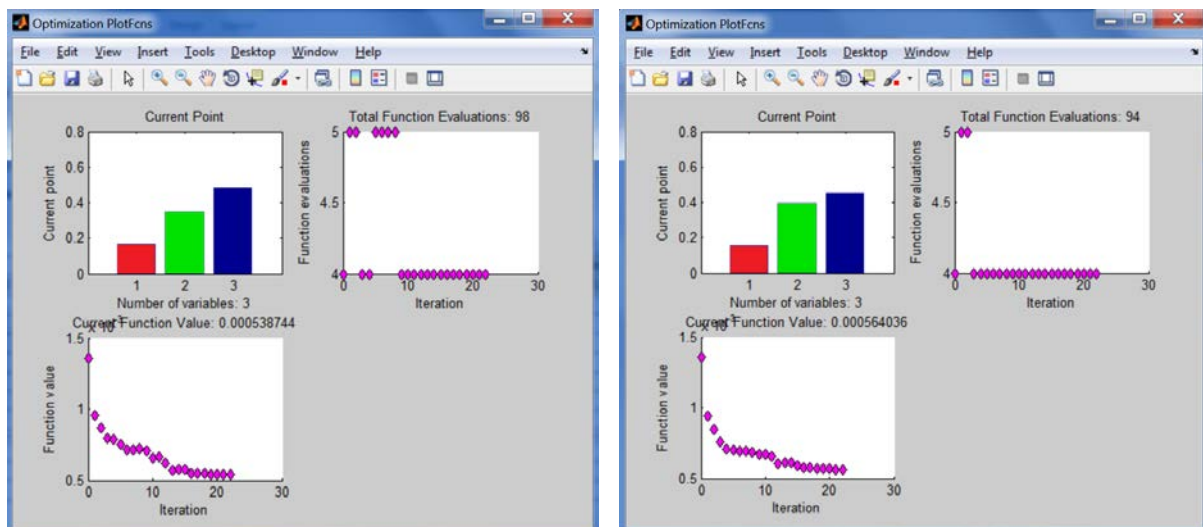
Изчисленията вариация и стандартно отклонение са представени в Таблица 11:

Таблица 11. Вариация и стандартно отклонение

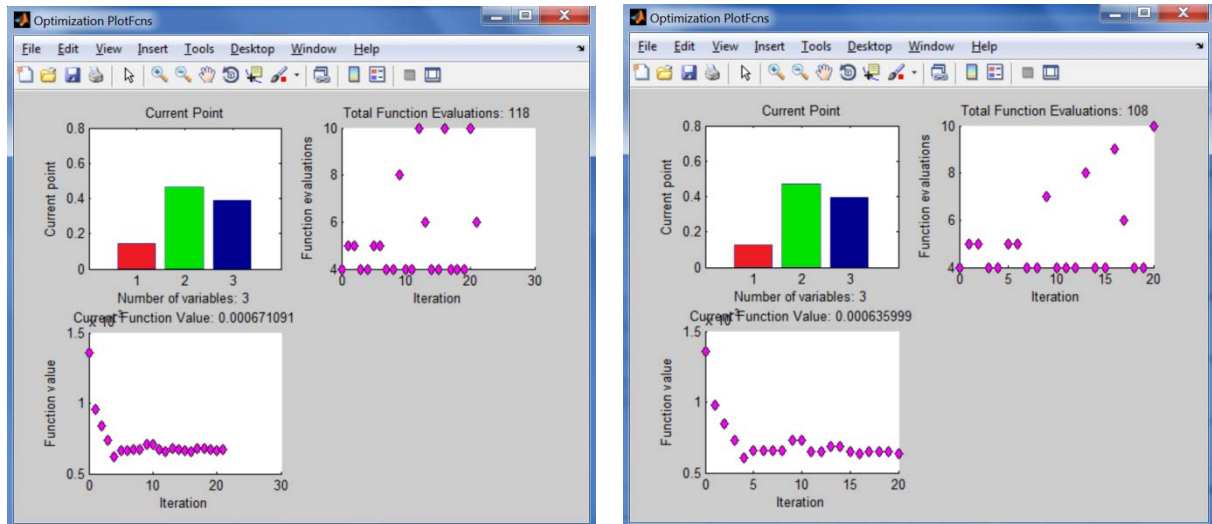
fmincon (MATLAB)		
Възвръщаемост [%]	Вариация	Стандартно отклонение [%]
6.	0.000001663602	0.128980701120
6.5	0.000001663089	0.128960817871
7.	0.000001663844	0.128990071990
7.5	0.000001664300	0.129007765727
8.	0.000001664984	0.129034240066
8.5	0.000001808792	0.134491347445
9.	0.000001868149	0.136680262221
9.5	0.000001964745	0.140169346217
10.	0.000002108453	0.145205122126
10.5	0.000002157704	0.146891256767

На Фиг. 7 и 8 са показани оптималните конфигурации на портфейл с 3 актива при различни стойности на за възвръщаемостта.

	Облигации
	Акции
	Депозити

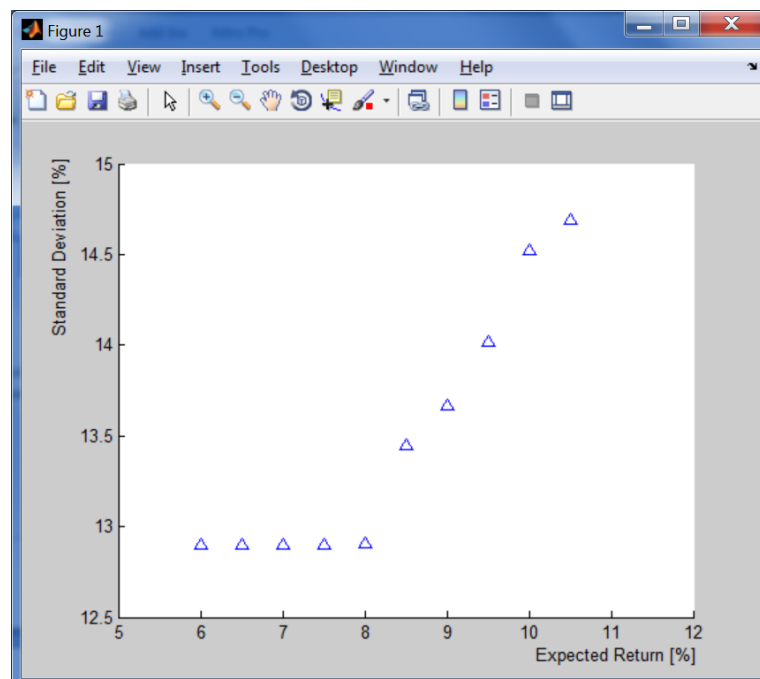


Фиг. 7 Оптимален портфейл за възвръщаемост 6% и 7,5%



Фиг. 8 Оптимален портфейл за възвръщаемост 9 % и 10,5 %

Получените точки от Парето-фронта са представени на Фиг. 9. Всеки един изчислен Парето-оптимален портфейл е представен като триъгълник, разположен на Парето-повърхнината с координати 1) мярката на риска (стандартното отклонение) и 2) очакваната възвръщаемост.



Фиг. 9 Получените точки от Парето-фронта на база резултатите на **fmincon** (MATLAB)

3.1.3 Сравнение на резултатите за портфейла с 3 актива, получени с двата подхода

В този раздел е направено сравнение на резултатите за първия модел получени с хибридният алгоритъм и солвъра *fmincon* от Matlab. В Таблица 12 са представени резултатите от изчисленията за “период 120 месеца, 3 актива“, с червено е отбелязано най-доброто решение, при търсена възвръщаемост от 6 % до 10,5 %.

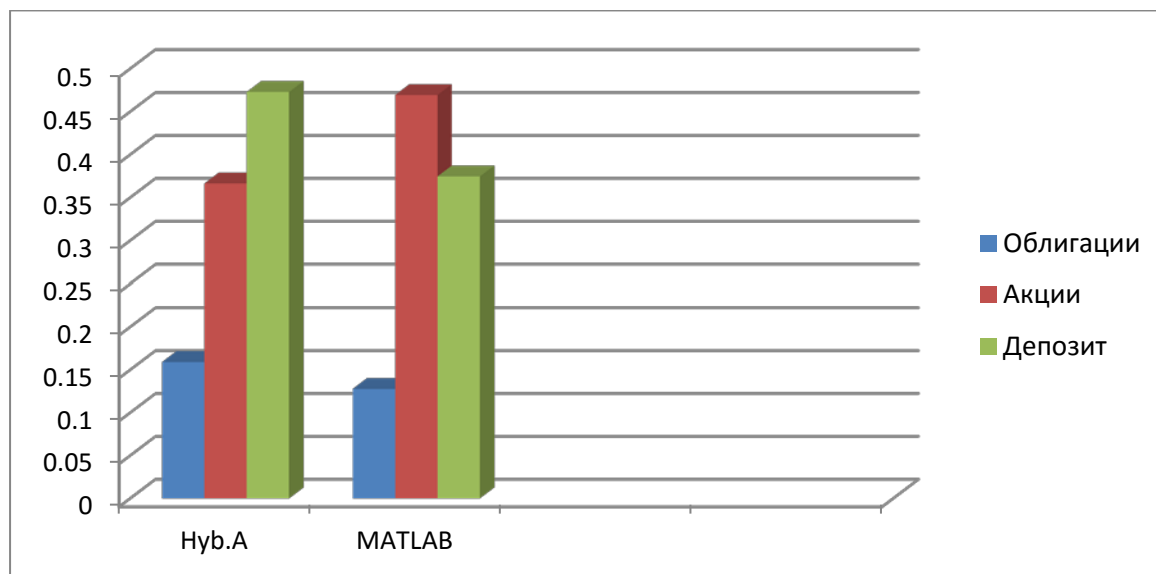
Таблица 12. Сравнение на резултатите за първия модел с двата подхода

Най-добро решение	С-ст на целевата функция	Оптимален портфейл		
		Облигации	Акции	Депозити
6% Възвръщаемост				
Hyb. A	5.352082093821857e-04	0.162491508733274	0.358816119183875	0.478759042850245
MATLAB	5.387437690212220e-04	0.168966	0.347022	0.484012
6,5% Възвръщаемост				
Hyb. A	5.261467870846590e-04	0.162489036358221	0.352846326472330	0.483859796759362
MATLAB	5.388831287378297e-04	0.168262	0.348713	0.483025
7% Възвръщаемост				
Hyb. A	5.340420398373304e-04	0.158457663599483	0.366300200155630	0.475623369519667
MATLAB	5.430593589223452e-04	0.161816	0.365296	0.472888
7,5% Възвръщаемост				
Hyb. A	5.409095216850394e-04	0.172202271373571	0.340980426992248	0.486076731961372
MATLAB	5.640361640922369e-04	0.154267	0.392602	0.453131
8% Възвръщаемост				
Hyb.A	5.409095216850394e-04	0.172202271373571	0.340980426992248	0.486076731961372
MATLAB	6.311263811064216e-04	0.151272	0.435088	0.413640
8,5% Възвръщаемост				
Hyb.A	5.406316110207684e-04	0.155358409355396	0.376441585393238	0.466144297179756
MATLAB	6.403115399398162e-04	0.144184	0.445191	0.410626
9 % Възвръщаемост				
Hyb.A	5.342252900066312e-04	0.164043899153538	0.354876815995237	0.482488143886824
MATLAB	6.710914897734869e-4	0.144424	0.465421	0.387285
9,5% Възвръщаемост				
Hyb.A	5.409994889009059e-04	0.161212003604428	0.365207216927747	0.473011294612398
MATLAB	6.821441041356491e-4	0.138080	0.464479	0.393496
10% Възвръщаемост				
Hyb.A	5.339215281768104e-04	0.173777597764689	0.332247313396578	0.492493967815432
MATLAB	6.883647044897766e-4	0.130139	0.467585	0.396123
10,5% Възвръщаемост				
Hyb.A	5.358769006420469e-04	0.159007153629814	0.366376334198682	0.472900239460445
MATLAB	6.959992168393732e-4	0.127702	0.469306	0.396252

Вижда се, че във всичките 10 случая с различна степен на възвръщаемост Хибридният алгоритъм е получил по-точни решения в сравнение със солвъра *fmincon*. При това разликите в стойността на целевата функция достигат до 1.6e-04 (виж Таблица

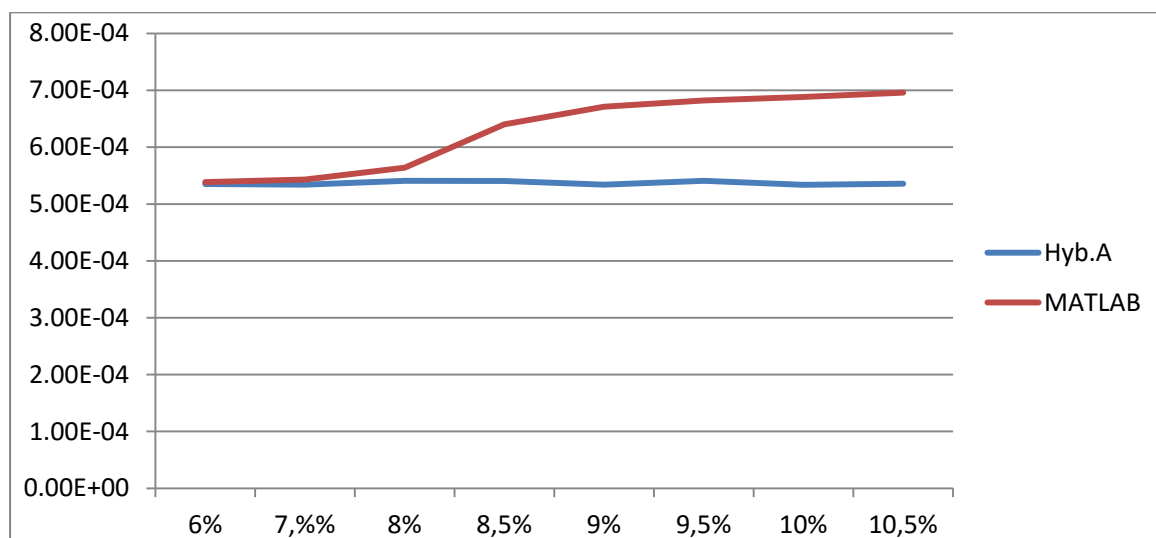
12, възвръщаемост 10,5%). Тази разлика изглежда незначителна, но тя е свързана със значителни разлики в процентното участие на активите в портфейла. Също така колкото по-голяма е инвестицията в портфейла, толкова по-голяма ще бъде и ползата от използването на по-точни решения.

На Фиг. 10 е показано сравнение на получените резултати с двата подхода при възвръщаемост 10,5%.



Фиг. 10: Оптимален портфейл с двата подхода при възвръщаемост 10,5%.

На Фиг. 11 е визуализиран трендът за стойността на целевата функция за трите актива, получена при хибридният алгоритъм и солвъра *fmincon* от Matlab за целия интервал на очакваната възвръщаемост.



Фиг. 11: Тренд за стойността на целевата функция за модела с 3 актива

3.2 Модел с шест актива и исторически данни за 10 години и 11 месеца

Вторият експеримент е реализиран използвайки предложения модел и на база на изходни исторически данни за възвръщаемостта на шест актива, за да се изчисли геометричната средна, матрицата на ковариацията и матрицата на корелацията, които послужиха за формулирането на задачата за оптимизация на портфейл като задача на квадратичното програмиране, така че очакваната възвръщаемост да *не е по-малка* от предварително зададената такава. В конструирането на модела са включени реални данни от Европа, Азия и Америка – американският индекс SP500⁵ за американски акции, азиатският индекс Japan Nikkei 225⁶ за японски акции, европейският индекс Euronext 100⁷ за френски акции, европейският индекс Switzerland⁸ за швейцарски акции, 10-годишни държавни ценни книжа на САЩ (10-year US Treasury⁹), и 1 000 евро инвестиция на депозит в банка при 1% *постоянна отрицателна възвръщаемост (лихва)*. Редът от данни за банковия депозит е създаден с помощта на лихвен калкулатор за 131 месеца при отрицателна 1% лихва. Всички редици са за периода октомври 2007 до август 2018 г. за шестте отделни актива всеки с отделна месечна възвръщаемост за разглеждания период. Данните за американските, японските и френските акции, както и облигациите (държавните ценни книжа на САЩ) са от yahoo finance¹⁰, с изключение на швейцарския индекс, който понеже е малък ред данни не е включен в yahoo finance, а е взет от швейцарската борса.

Експериментът за създаването на модела за оптимизация на портфейл с ограничения е подобен на подхода предложен от Цезароне и др. [39, 40]. Авторите включват в модела за оптимизация на портфейла реалистичното ограничение, че не повече от K активи трябва да се съдържат в портфейла (*кардинално* ограничение). Те

⁵ Standard and Poor's 500 е широкият бенчмарк за американски книжа. S&P 500 включва 500 компании, чиито тежести се определят на база пазарна капитализация. Стартира през 1941 г. с базова стойност 10. Обикновено това е най-добрият индикатор за цялостното представяне на американската борса.

⁶ Nikkei 225 е ценово претеглен и включва 225-те най-големи компании на борсата в Токио.

⁷ Индексът Euronext 100 е blue chip индекс на Европейската борса. Той включва най-големите и най-ликвидни акции, търгувани на Euronext. Всяка акция трябва да се търгува повече от 20% от еминирания в рамките на 1 година. в хода на периодичния период на анализ. Към 21 декември 2002 г. акциите в този индекс представляват 80% (1,177 млрд. Евро) от общата пазарна капитализация на инвестиционната вселена на Euronext EURONEXT 100 (^N100), <https://finance.yahoo.com/quote/%5EN100?p=%5EN100>

⁸ The Swiss Market Index е швейцарският бенчмарк който включва 20-те най-големи и най-ликвидни компании на швейцарската борса. Той представлява около 85 на сто от цялата free-float пазарна капитализация на швейцарския пазар. При стартирането си на 30 юни 1988 година индексът има базова стойност от 1 500 пункта. Данните са от: https://www.finanzen.ch/index/historisch/smi/24.9.2007_24.9.2018

⁹ Държавни (правителствени) облигации или бонове на суверен са облигации, емитирани от националните правителства, обикновено с обещание за плащане на периодични лихвени плащания и за погасяване на номиналната стойност на датата на падежа. Държавните облигации обикновено са деноминирани в собствената валута на страната, като по подразбиране облигациите не могат да бъдат изкупени преди датата им на падежа. https://en.wikipedia.org/wiki/Government_bond CBOE Interest Rate 10 Year T No (^TNX), <https://finance.yahoo.com/bonds>

¹⁰ Yahoo. Finance е медия, която е част от мрежата на Yahoo! Тя предоставя финансови новини, данни и коментари, включително борсови котировки, прессъобщения, финансови отчети и оригинално съдържание. Освен това предлага някои онлайн инструменти за управление на личните финанси. В допълнение към публикуването на съдържание от широк кръг партньори, медията публикува оригинални истории от екипа си от журналисти. От юни 2017, Yahoo Finance е част от Oath, медийното подразделение на Verizon. Това е най-големият уеб сайт за бизнес новини в САЩ с месечен трафик.

включват и *количествено* ограничение, така че всеки актив в портфейла да е ограничен в определен интервал. Второто ограничение е твърде строго и може да се пропусне, за да се получи оптимално решение с по-високо качество. В настоящата дисертация при втория експеримент не се въвежда кардинално ограничение, а оптимизационният процес се разделя на два етапа. На първия етап оптимизацията се извършва с всички налични активи и за определена възвръщаемост. Тогава най-добрите K активи (в случая е прието $K = 3$) се включват във втория етап на оптимизацията, където оптимизационната задача е решена няколко пъти с различна възвръщаемост. Накрая се избира конкретна възвръщаемост и оптимално решение.

Данните, използвани за втория модел са представени в Приложение 3.

Извлечение от Приложение 3:

	Swiss Market	Euronext 100	Nikkei 225 Japan	10 Years US bonds	Interest rate 1% negative	SP 500 USA
Oct 2007	9022.55	1044.67	16737.63	4.475	998.3	1549.38
Nov 2007	8891.47	1000.57	15680.67	3.972	997.44	1481.14
Dec 2007	8645.04	995.23	15307.78	4.035	996.58	1468.36
Jan 2008	8318.82	864.47	13592.47	3.639	995.78	1378.55
Feb 2008	7815.98	852.95	13603.02	3.534	994.92	1330.63
Mar 2008	7403.88	833.82	12525.54	3.432	994.09	1322.7
April 2008	7494.30	889.37	13849.99	3.759	993.24	1385.59

За разглеждания втори експеримент (модел с 6 активи) ковариационната матрица е следната (Таблица 13):

Таблица 13. Ковариационна матрица на оптимизационен етап 1

0.001745	0.000490	0.000521	0.000898	0.0000003	0.000367
0.000490	0.002190	0.001883	0.001306	-0.00000008	0.001641
0.000521	0.001883	0.003336	0.002022	-0.00000002	0.001703
0.000898	0.001306	0.002022	0.009293	-0.00000009	0.001174
0.0000003	-0.00000008	-0.00000002	-0.00000009	0.0000000008	-0.00000008
0.000367	0.001641	0.001703	0.001174	-0.00000008	0.001815

Използвана е следната нотация, както е показано в Таблица 14:

Таблица 14. Променливите в оптимизационната задача

Швейц. акции	Френски акции	Японски акции	ДЦК	Депозит отр. лихва 1%	Америк. акции
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

В Таблица 15 са показани изчислените стойности за геометричната средна на възвръщаемостта в проценти.

Таблица 15. Геометрична средна на възвръщаемостта в проценти

	Швейц. акции	Френски акции	Японски акции	ДЦК	Депозит отр. лихва 1%	Америк. акции
Геометрична средна μ_i	1.1259e-02%	1.0284e-02%	0.24%	-0.35%	-8.4426e-02%	0.48%

Като се използват определените по-горе ковариационна матрица и геометрична средна се формулира следната оптимизационна задача е, както следва:

$$\begin{aligned}
 \min F = & [0.001745x_1^2 + 2.(0.000490)x_1.x_2 + 2.(0.000521)x_1.x_3 + 2.(0.000898)x_1.x_4 + \\
 & + 2.(0.0000003)x_1.x_5 + 2.(0.000367)x_1.x_6 + 0.002190x_2^2 + \\
 & + 2.(0.001883)x_2.x_3 + 2.(0.001306)x_2.x_4 - 2.(0.00000008)x_2.x_5 + \\
 & + 2.(0.001641)x_2.x_6 + 0.003336x_3^2 + 2.(0.002022)x_3.x_4 - 2.(0.00000002)x_3.x_5 + \\
 & + 2.(0.001703)x_3.x_6 + 0.009293x_4^2 - 2.(0.00000009)x_4.x_5 + \\
 & + 2.(0.001174)x_4.x_6 + 0.00000000008x_5^2 - 2.(0.00000008)x_5.x_6 + \\
 & + 0.001815x_6^2],
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

При ограничения:

$$\mu^T x = 0.01259x_1 + 0.010284x_2 + 0.24x_3 - 0.35x_4 - 0.084426x_5 + 0.48x_6 \geq R$$

$$\left| \sum_{i=1}^6 x_i^2 - 0.33333 \right| \leq 0.05,$$

$$\sum_{i=0}^6 \Delta x_{i,t} + \sum_{i=1}^6 c_{i,t} |\Delta x_{i,t}| = 0, \quad t = 1, \dots, T-1;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

След този етап само 3-те актива с най-голям процент се включват в новия портфейл и с тях се конструира нова оптимизационна задача, която се решава във втория етап на оптимизацията.

За портфейла от три класа активи се получава следната ковариационна матрица (Таблица 16.):

Таблица 16. Ковариационна матрица в Оптимизационен етап 2

Ковариация	ШВЕЙЦ. АКЦИИ	ДЕПОЗИТ 1% ОТР. ЛИХВА	АМЕРИК. АКЦИИ
Швейц. акции	0.0017453940	0.0000002754	0.0003672134
Депозит 1% ОТР. ЛИХВА	0.0000002754	0.0000000008	-0.0000000767

Америк. акции	0.0003672134	-0.0000000767	0.0018149142
---------------	--------------	---------------	--------------

В Таблица 17 са показани стойностите за геометричната средна на възвръщаемостта в проценти.

Таблица 17. Геометрична средна на възвръщаемостта в проценти

	Швейц. акции	Депозит 1% отр. лихва	Америк. акции
Геометрично средна μ_i	0.00011259	-0.00084426	0.0048

Формулираната оптимизационна задача е, както следва:

$$\min f = [0.0017453940x_1^2 + 2.(0.0000002754)x_1.x_2 + 2.(0.0003672134)x_1.x_3 + 0.0000000008x_2^2 - 2.(0.0000000767)x_2.x_3 + 0.0018149142x_3^2] \quad (3.8)$$

При ограничения:

$$\mu^T x = 0.011259x_1 - 0.00084426x_2 + 0.0048x_3 \geq R$$

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 - 0.33333 \leq 0.05,$$

$$\sum_{i=0}^3 \Delta x_{i,t} + \sum_{i=1}^3 c_{i,t} |\Delta x_{i,t}| = 0, \quad t = 1, \dots, T-1;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Задачата е решена 10 пъти, използвайки различна норма на възвръщаемост за $R = 6\%$, $R = 6.5\%$, ..., $R = 10.5\%$ със стъпка на нарастване от 0.5% . Ползван е солвър **fmincon** от MATLAB “Optimization Toolbox” [157], посредством *Interior point* алгоритъма.

3.2.1 Резултати при оптимизация на портфейл с 6 актива чрез предложения двукритериален модел и използване на солвър **fmincon** от Matlab

Оптимизацията при решаването на задачата за модела с шест актива се реализира на два етапа.

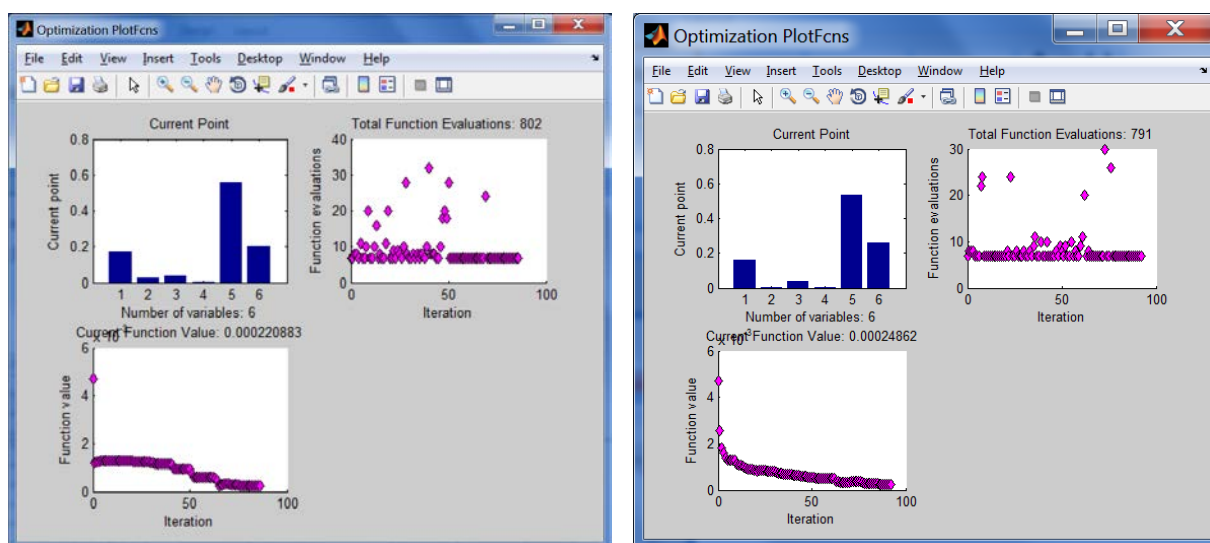
Етап 1

На първия етап оптимизацията се извършва с всичките шест актива за търсените стойности на възвръщаемост. Получените резултати за първия етап чрез солвър **fmincon** от Matlab са представени в Таблица 18.

Таблица 18. Резултати за Етап 1, получени чрез солвъра **fmincon** от Matlab

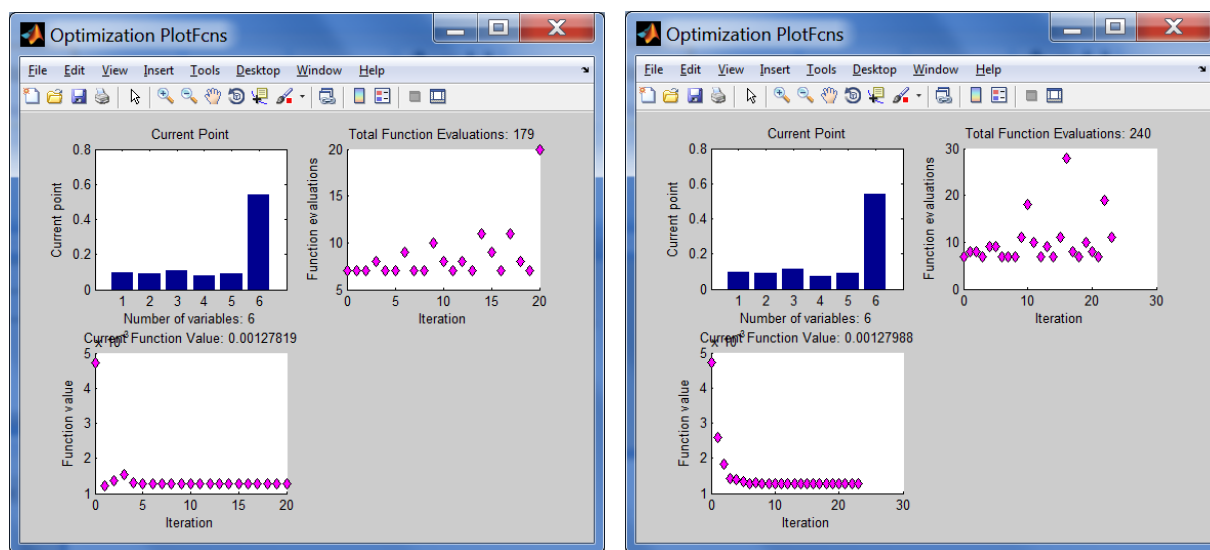
Оптимална стойност на целевата функция	R [%]	iter	f eval	Швейц. акции	Френски акции	Японски акции	ДЦК	Депозит 1% отр. лихва	Америк. акции
2.2088264574732003e-4	6	86	802	0.171817	0.028714	0.039459	0.001748	0.557528	0.200734
2.2459003508634788e-4	6.5	43	435	0.170496	0.022932	0.039854	0.001661	0.554468	0.210590
2.2854717581843303e-4	7	46	406	0.169354	0.017702	0.039999	0.001447	0.551230	0.220268
12.234601478378945e-4	7.5	28	284	0.142161	0.141171	0.242347	0.005046	0.103864	0.365411
12.778476801748404e-4	8	24	203	0.093605	0.093368	0.109097	0.076714	0.088515	0.538701
12.781895400163267e-4	8.5	21	179	0.093610	0.093372	0.109603	0.076358	0.088389	0.538668
2.4862009058792600e-4	9	92	791	0.161965	0.003733	0.036856	0.000738	0.536141	0.260567
10.496316692248544e-4	9.5	23	405	0.126251	0.074649	0.073684	0.050679	0.142232	0.532504
12.793928861501468e-4	10	21	185	0.093618	0.093376	0.111301	0.075188	0.087966	0.538551
12.798834589800813e-4	10.5	24	240	0.093614	0.093370	0.111947	0.074760	0.087804	0.538505

За възвръщаемост $R = 6\%$, $R = 6,5\%$, $R = 7\%$, $R = 9\%$ и $R = 9,5\%$ солвърът **fmincon** намира оптимално решение с най-високи стойности на променливите x_1 , x_5 , x_6 (Фиг. 12).



Фиг. 12 Оптимален портфейл за възвръщаемост 6% и 9%

За възвръщаемост $R = 7,5\%$, $R = 8\%$, $R = 8,5\%$, $R = 10\%$ и $R = 10,5\%$ солвърът **fmincon** намира оптимално решение с най-високи стойности на променливите x_1 , x_3 , x_6 (Фиг. 13). Финалното съобщение на солвъра в тези случаи е: “Възможен локален минимум. Ограниченията са удовлетворени. Солвърът **fmincon** спря, защото размерът на текущата стъпка е по-малък от стойността по подразбиране за толеранса на размера на стъпката и ограниченията са удовлетворени в рамките на стойността по подразбиране на толеранса на ограниченията.”



Фиг. 13 Оптимален портфейл за възвръщаемост 8,5% и 10,5%

С оглед на получените стойности за целевата функция може да се приеме, че получените решения от **fmincon** за възвръщаемост $R = 7,5\%$, $R = 8\%$, $R = 8,5\%$, $R = 10\%$ и $R = 10,5\%$ са само локално оптимални. По тази причина във втория етап на оптимизация се изгражда портфейл, включващ индексите Swiss Market, Депозит при отрицателна лихва 1% и SP500, т.е. променливите x_1 , x_5 , x_6 .

С Хибридният алгоритъм също се получава, че променливите x_1 , x_5 , x_6 имат най-високи стойности. Ако разгледаме само трите променливи с най-високи стойности в десетте намерени най-добри решения с Хибридният алгоритъм (Таблица 19), променливата x_1 участва 5 пъти, променливата x_2 участва 4 пъти, променливата x_3 участва 3 пъти, променливата x_5 участва 10 пъти и променливата x_6 участва 8 пъти. В резултат се потвърждава, че портфейлът на втория етап трябва да съдържа индексите: Швейцарски акции (Swiss Market), Депозит отр. лихва 1% и Американски акции (SP 500 USA), т.е. променливите x_1 , x_5 , x_6 .

3.2.2 Резултати при оптимизация на портфейл с 6 актива чрез предложения модел (2.28) – (2.33) и използване на Хибридният алгоритъм

В този раздел са представени резултатите от проведените тестове на втория модел с Хибридният алгоритъм (виж Таблица 19), с червено е отбелязано най-доброто решение, при търсена възвръщаемост от 6 % до 10,5% за оптимизация на портфейла с 6 актива. За всяка различна стойност на възвръщаемостта са извършени по 6 изчисления с Хибридният алгоритъм.

Таблица 19. Резултати за втория модел с Хибридният алгоритъм, с червено е отбелязано най-доброто решение, при търсена възвръщаемост от 6% до 10,5% при извършени 6 изчисления.

№	С-ст на целевата функция	Оптимален портфейл					
		Швейц. акции	Френски акции	Японски акции	ДКЦ	Депозит 1% отр. лихва	Америк. акции
6% Възвръщаемост							
1	16.68187620659e-04	0.136707436136592	0.012823048196617	0.353371471013417	0.093445663495940	0.005362563416308	0.397333630693842
2	5.829186983791690e-04	0.073832799008721	0.255312612469978	0.029745219454827	0.000841643904796	0.385196199912611	0.257976723120115
3	10.26571748e-04	0.514936832794863	0.231238291511671	0.012675074571854	0.016454872848148	0.042955348399033	0.182625295735171
4	5.829169994432790e-04	0.073850168560546	0.255339717475985	0.029722985266706	0.000841841039746	0.385193591459225	0.257963328059998
5	15.04299253011e-04	0.081961234329811	0.530955148712454	0.070369337813015	0.028139301566989	0.048741430339631	0.240054959214900
6	5.828098768309748e-04	0.073861974276137	0.255383534204454	0.029564277267465	0.000914538076972	0.385136096866381	0.257970696123819
6,5% Възвръщаемост							
1	13.22128074509e-04	0.208605408848907	0.440572879366865	0.075609453015221	0.004524037024761	0.026145933252321	0.243242663930092
2	7.846300995863068e-04	0.105407703864752	0.382620122192498	0.006952820245728	0.000321024103654	0.279765295525875	0.223374271295857
3	5.985735830439170e-04	0.080005148162323	0.071474897739757	0.110320112167903	0.000284652446443	0.368098743219708	0.367313314976008
4	7.787929596939864e-04	0.108907380122276	0.377887410135391	0.004621779217848	0.003954900415678	0.280608248147036	0.224282128564095
5	6.116203456633961e-04	0.056811334390459	0.012750606543775	0.070893266194791	0.000169659879262	0.375196080751231	0.482948257955089
6	6.068876872354066e-04	0.079604536945442	0.073341864919848	0.113871653016791	0.001641557839746	0.365771562715128	0.364435086844700
7% Възвръщаемост							
1	12.51607313410e-04	0.172078530226684	0.058596925516459	0.197199991377695	0.000214047957928	0.061901819238442	0.508634915220072
2	4.638604579780391e-04	0.032140186228539	0.310125700404118	0.069641433787139	0.005673095356611	0.488835555344430	0.092480950567623

3	12.5071319638 1e-04	0.1764215096 99237	0.0532396612 35706	0.1985633033 02342	0.0000769921 03135	0.0604233102 32012	0.5102279600 33040
4	7.26028185756 0133e-04	0.2472951507 06128	0.0040912910 53877	0.0331875424 25778	0.0004424298 01862	0.2136362165 81427	0.4985570908 55399
5	12.8869221132 0e-04	0.1928165001 67251	0.4573397523 56098	0.1378138728 42049	0.0022423916 55922	0.0632149325 90203	0.1453563960 87620
6	4.76005434776 0105e-04	0.0954490597 68271	0.0175357879 13186	0.1499798784 43714	0.0889233159 05716	0.4662867973 68959	0.1799097438 87603
7,5% Възвръщаемост							
1	13.0902569122 6e-04	0.0244019808 48393	0.0556368671 89715	0.4853216194 68542	0.0607559202 84929	0.2649557399 01082	0.1072485038 21133
2	6.61781992608 3224e-04	0.0170147280 34714	0.0909428815 59732	0.2482317712 64106	0.0718621130 95610	0.4390337866 57249	0.1324002143 61000
3	10.1421354993 0e-04	0.0002726571 98520	0.1597391111 33981	0.2055259556 22021	0.0000000000 00001	0.2711676761 03884	0.3669186888 39539
4	4.65748163136 3127e-04	0.1309813833 83494	0.1750690549 46578	0.0085383397 29983	0.0002345553 84255	0.4030036531 68267	0.2803635854 26166
5	4.33482764325 7344e-04	0.0404038596 79737	0.0109135354 62400	0.2519412053 78406	0.0284620924 06255	0.5391397076 57751	0.1289001821 80664
6	4.71901066079 4081e-04	0.1324110042 21432	0.1779277988 31252	0.0078412478 41609	0.0026200629 54891	0.4028516177 60850	0.2789296438 53877
8% Възвръщаемост							
1	17.5480688639 6e-04	0.18190556359 5019	0.1165427795 83222	0.54910385090 7997	0.0000622636 82756	0.0362952447 86295	0.1138103663 10552
2	3.53630696528 9319e-04	0.11744393966 0022	0.0003248678 71875	0.05596394890 5544	0.0535058526 89988	0.4847394076 29939	0.2847612364 52763
3	11.7506139120 7e-04	0.05766180523 7552	0.0821198687 16905	0.16201818088 2063	0.0249338003 56887	0.1536268057 59454	0.5207137031 40617
4	3.53583573610 6050e-04	0.1174691128 02438	0.0002953634 65692	0.0559556387 26535	0.0534801635 67150	0.4847140888 52747	0.2847909435 22433
5	12.6480241134 3e-04	0.0148982559 73510	0.4159310565 29045	0.1645468255 95451	0.0030157359 09679	0.1802491763 85143	0.2228813802 36896
6	9.19020590392 7594e-04	0.4105226426 42135	0.0648397510 32351	0.2879798210 03608	0.0005547547 20691	0.1617796984 99095	0.0725258964 47604
8,5% Възвръщаемост							
1	6.959093240972 920e-04	0.0545753693 73844	0.0013630238 51954	0.1975567294 80204	0.0150801702 08620	0.3570054061 90036	0.3725844887 76488
2	11.26197495673 e-04	0.03306668189 2521	0.0006258217 11080	0.1470066515 79010	0.0635649473 17532	0.1865913202 54010	0.5672003815 05207
3	9.509026745362 963e-04	0.0050484140 12659	0.0028445833 38239	0.1217131060 26931	0.2526161073 38343	0.4771219073 71657	0.1396695637 21993
4	12.80748664968 e-04 8958083	0.2284070122 18788	0.0557503932 64464	0.1182294222 25870	0.0408418142 89292	0.0075688185 62100	0.5489003489 58083
5	6.821471583365 744e-04	0.0011088697 62441	0.1637266769 13735	0.2628385526 67114	0.0048907992 31061	0.4322515126 85772	0.1322778065 29503

6	4.367719677075 428e-04	0.1844728958 47776	0.0314978460 06385	0.2337991975 03848	0.0017090912 09509	0.4546137512 42282	0.0927919430 45054
9% Възвръщаемост							
1	8.456040221409 549e-04	0.36646402981 8115	0.0461853996 79672	0.0785200948 02740	0.0041290439 68692	0.1269999584 06488	0.3769770929 43560
2	17.80846501470 e-04	0.06942532877 2135	0.1933153768 64966	0.4485182936 60130	0.0079205875 37076	0.0471478308 21463	0.2358092076 32561
3	8.265607841661 277e-04	0.02265417967 5245	0.0096167128 10924	0.1727855452 67203	0.0529078989 04055	0.3178695428 13496	0.4239568372 41786
4	15.01551809492 e-04	0.00867102447 9376	0.0815387500 67323	0.4299909603 54978	0.0012132962 42944	0.1602865395 93554	0.3157773808 84437
5	8.510361582857 999e-04	0.08258885869 5935	0.0169021495 68459	0.1921755276 89897	0.0094776681 36450	0.2700383222 66226	0.4293736329 09352
6	7.788073973092 405e-04	0.03027638607 1341	0.2277581678 10629	0.0011315353 17888	0.0030863952 28516	0.3154403520 83582	0.4224629188 57451
9,5% Възвръщаемост							
1	17.56030953925 e-04	0.01518758651 9484	0.1714016432 22885	0.2457130401 31691	0.0109812532 58605	0.0131309298 61821	0.5407546323 40892
2	5.740407423189 965e-04	0.20248377284 1956	0.0000024676 39581	0.0064676116 29413	0.0000053624 80937	0.3099429560 50781	0.4804377930 31772
3	12.01930787721 e-04	0.00322806105 2734	0.0219732737 54317	0.0439400726 75958	0.2688416915 35721	0.3439645794 50528	0.3173135030 09599
4	11.53111588635 e-04	0.33189102416 4477	0.0783992244 59441	0.1838675020 02679	0.0024284178 37793	0.0247639789 89558	0.3778847474 66788
5	9.721932673283 423e-04	0.36983963043 0609	0.0525654734 35031	0.0909565175 83458	0.0292947089 97805	0.0687372629 49885	0.3848375181 23619
6	12.45418461232 e-04	0.37729736173 9122	0.0330913480 87421	0.3260069235 52150	0.0199556058 63163	0.0275344808 93956	0.2140834053 08104
10% Възвръщаемост							
1	9.072497244680 729e-04	0.50827045046 5353	0.0207727027 61466	0.1231621707 14505	0.0009903755 39719	0.1041781965 75265	0.2436156910 00858
2	9.865958898026 205e-04	0.14208944439 1228	0.1117186774 78577	0.0206230245 54226	0.0456947202 00677	0.1498487429 33474	0.5275020152 21231
3	7.025412154233 913e-04	0.26427236934 7030	0.1205596699 69233	0.0003678787 51543	0.0142238806 34376	0.2174955962 82880	0.3824182938 62477
4	11.35298937729 e-04	0.01307365675 1450	0.0137112025 26780	0.3245911663 66939	0.0182831189 48874	0.2444153420 52980	0.3854798816 73270
5	6.619271067553 604e-04	0.42292469685 5303	0.0746885767 29445	0.0350237840 17918	0.0146633963 52404	0.2207418104 65250	0.2299289195 73634
6	8.992367255280 328e-04	0.33982152074 9886	0.0993822594 19549	0.0280208766 64782	0.0132143909 65325	0.1021317430 98691	0.4155970013 00821
10,5% Възвръщаемост							
1	11.32944081437 e-04	0.38008799718 7540	0.005227854 002356	0.1215742649 50027	0.0824278533 56946	0.0237478885 90022	0.3853248181 32694
2	10.37807630889 e-04	0.30882178955 7683	0.000692316 987462	0.1696745057 24845	0.0298011624 60141	0.0745555805 08673	0.4142137583 03063

3	11.24764316926 e-04	0.03206643319 0416	0.050026420 980668	0.1592427137 21702	0.0426227784 63860	0.1863661213 41907	0.5277348972 12411
4	7.399867055979 726e-04	0.41744833984 4219	0.182816086 821208	0.1615400249 59472	0.0076947438 30598	0.2262513454 49187	0.0028341538 41826
5	4.144869326004 034e-04	0.20082429088 9612	0.252401296 717184	0.0208367915 46346	0.0013078774 31558	0.4198917489 42226	0.1033048221 45198
6	6.227210063529 932e-04	0.06589455319 5110	0.046064074 948529	0.0431692784 57333	0.1474656657 33393	0.4237172577 00561	0.2750270082 39285

3.2.3 Сравнение на резултатите за модела с 6 актива, получени с двата подхода

В този раздел е направено сравнение на резултатите за втория модел получени с хибридният алгоритъм и солвър *fmincon* от Matlab. В Таблица 20 са представени резултатите от изчисленията за очаквана възвръщаемост в интервала (6-10,5) %.

Таблица 20. Резултати за Етап 1, получени чрез солвър *fmincon* от Matlab и чрез Хибридният алгоритъм

	С-ст на целевата функция	Оптимален портфейл					
		Швейц. акции	Френски акции	Японски акции	ДКЦ	Депозит 1% отр. лихва	Америк. акции
6 % Възвръщаемост							
Hyb.A	5.82809877e-4	0.073862	0.255384	0.029564	0.000915	0.385136	0.257971
MATLAB	2.20882646e-4	0.171817	0.028714	0.039459	0.001748	0.557528	0.200734
6,5 % Възвръщаемост							
Hyb.A	5.9857358e-04	0.080005	0.071475	0.110320	0.000285	0.368099	0.367313
MATLAB	2.24590035e-4	0.170496	0.022932	0.039854	0.001661	0.554468	0.210590
7 % Възвръщаемост							
Hyb.A	4.6386046e-04	0.032140	0.310125	0.069641	0.005673	0.488835	0.092480
MATLAB	2.28547176e-4	0.169354	0.017702	0.039999	0.001447	0.551230	0.220268
7,5 % Възвръщаемост							
Hyb.A	4.3348276e-04	0.040404	0.010914	0.251941	0.028462	0.539140	0.128900
MATLAB	12.2346015e-4	0.142161	0.141171	0.242347	0.005046	0.103864	0.365411
8 % Възвръщаемост							
Hyb.A	3.5358357e-04	0.117469	0.000295	0.055956	0.053480	0.484714	0.284791
MATLAB	12.7784768e-4	0.093605	0.093368	0.109097	0.076714	0.088515	0.538701
8,5 % Възвръщаемост							
Hyb.A	4.3677197e-04	0.184473	0.031498	0.233799	0.001709	0.454614	0.092792
MATLAB	12.7818954e-4	0.093610	0.093372	0.109603	0.076358	0.088389	0.538668
9 % Възвръщаемост							
Hyb.A	7.7880739e-04	0.030276	0.227758	0.001132	0.003086	0.315440	0.422463
MATLAB	2.48620091e-4	0.161965	0.003733	0.036856	0.000738	0.536141	0.260567
9,5 % Възвръщаемост							
Hyb.A	5.7404074e-04	0.202484	0.000002	0.006468	0.000005	0.309943	0.480438
MATLAB	10.4963167e-4	0.126251	0.074649	0.073684	0.050679	0.142232	0.532504
10 % Възвръщаемост							

Hyb.A	6.6192711e-04	0.422925	0.074689	0.035024	0.014663	0.220742	0.229929
MATLAB	12.7939289e-4	0.093618	0.093376	0.111301	0.075188	0.087966	0.538551
10,5 % Възвръщаемост							
Hyb.A	4.1448693e-04	0.200824	0.252401	0.020837	0.001308	0.419892	0.103305
MATLAB	12.7988346e-4	0.093614	0.093370	0.111947	0.074760	0.087804	0.538505

Във втория експеримент е извършена оптимизация по модифицирания модел на Марковиц за средна вариация, за да се конструира портфейл, който използва исторически данни за възвръщаемостта на шест класа активи за 131 месеца, за изчисляване на оптималните пропорции от активите, включени в портфейла, така че очакваната (търсената) възвръщаемост да *не е по-малка* от предварително зададена процентна ставка и портфейлът да има необходимата диверсификация. В експеримента бяха включени данни от Европа, Азия и Америка – американския индекс SP500 за американски акции, азиатския индекс Japan Nikkei 225 за японски акции, европейския индекс Euronext 100 за френски акции, европейския индекс Switzerland за швейцарски акции, 10-годишни държавни ценни книжа на САЩ (10-year US Treasury), и 1 000 евро парични средства в брой, за целите на втория експеримент 1000 евро депозит в банка при 1% постоянна отрицателна лихва за период от 10 години и 11 месеца. Експериментът се базира на изискването, че портфейлът трябва да съдържа не повече от $K = 3$ броя активи. При това оптимизационният процес се разделя на два етапа. На първия етап оптимизацията се извършва с всички налични активи и за 10 различни стойности на възвръщаемостта. След това най-добрите K активи (в случая $K = 3$) се включват във втория етап на оптимизацията, където оптимизационната задача е решена отново 10 пъти с различна възвръщаемост. Накрая се избира конкретна възвръщаемост и оптимално решение.

При сравнение на резултатите се вижда, че по-добрите стойности за минимума на целевата функция се получават с Хибридният алгоритъм. Той е по-прецизен при изчисленията в сравнение със солвъра **fmincon** от MATLAB в 6 от 10-те случая с различен процент на възвръщаемост. Разликата в полза на Хибридният алгоритъм става все по-голяма при увеличаване на желанния процент на възвръщаемост (виж Таблица 20, възвръщаемост 9,5%, 10%, 10,5%).

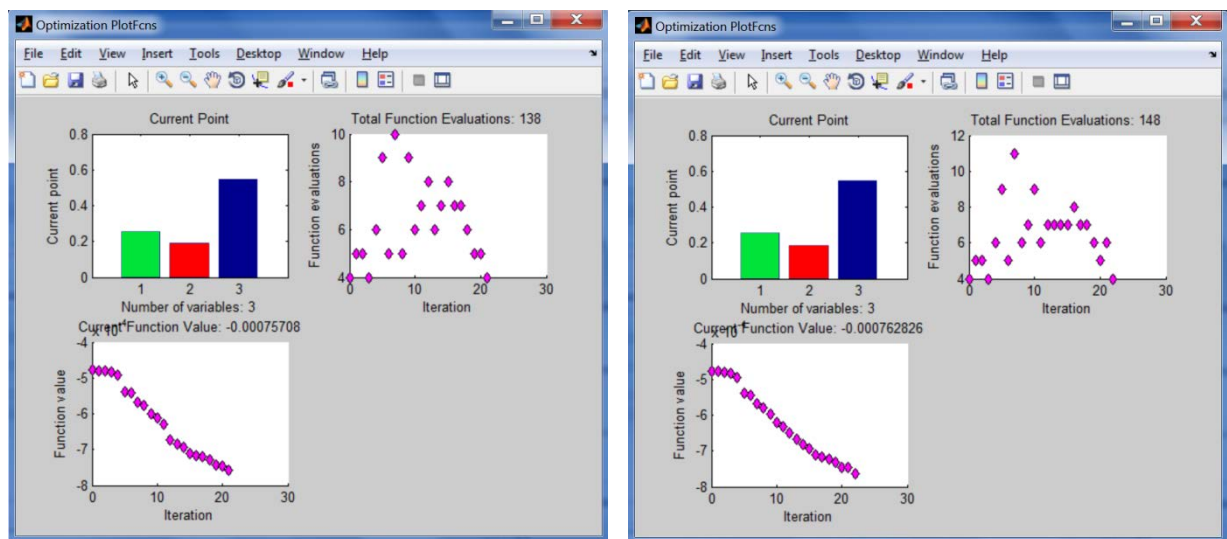
Етап 2

На втория етап на оптимизацията се изчислява оптимален портфейл по модифицирания модел на Марковиц за средна вариация включващ три вида активи: Швейцарски акции (Swiss Market), Депозит отр. лихва 1% и Американски акции (SP 500 USA). За всеки от тестваните 10 случая с различни ставки на възвръщаемост са

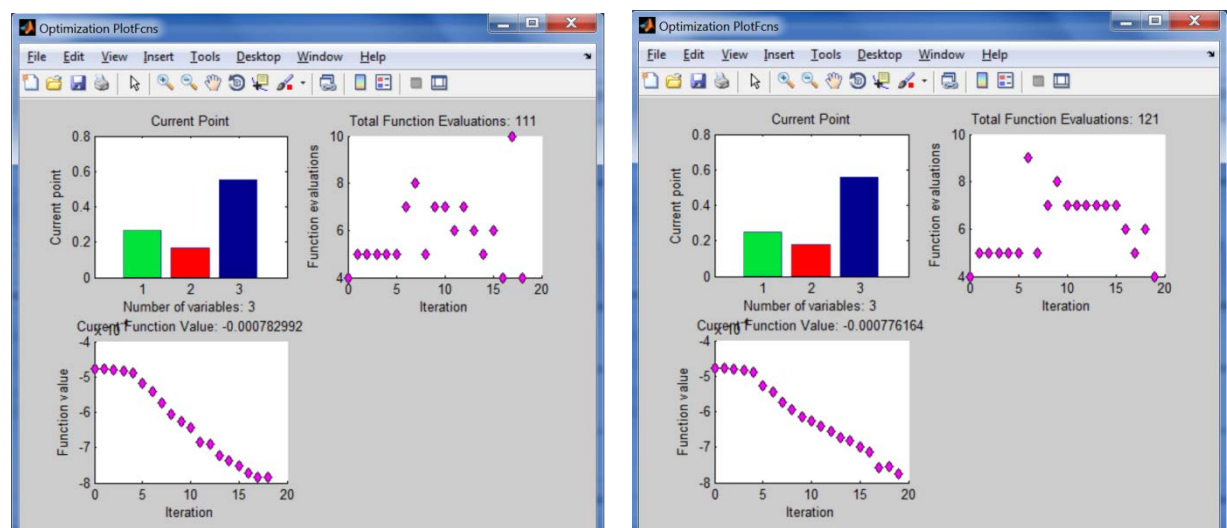
направени по 6 изчисления с Хибридният алгоритъм. Както и в останалите гореописани тествания солвърът **fmincon** на Matlab намира подобни решения, но с по-малка точност.

Фиг. 14 и 15 са представени резултатите за оптимални портфейли при очаквана възвръщаемост при 6%, 7,5%, 9% и 10,5%. получени посредством солвъра **fmincon** от MATLAB.

	Швейцарски акции
	Депозити отр. лихва
	Американски акции



Фиг. 14 Оптимален портфейл за възвръщаемост 6% и 7,5%



Фиг. 15 Оптимален портфейл за възвръщаемост 9 % и 10,5 %

Таблица 21. Резултати за Етап 2, получени чрез солвъра **fmincon** от Matlab:

С-ст на целевата	R [%]	Итерации	Общо	Оптимален портфейл
------------------	-------	----------	------	--------------------

функция f			изчисления на целевата функция	Швейц. акции	Депозит 1% отр. лихва	америк. акции
7.570803525333860E-4	6	21	138	0.255126	0.187342	0.546048
7.418840314847011E-4	6.5	21	143	0.261102	0.189784	0.540048
7.435174192281194E-4	7	19	129	0.259893	0.190981	0.536884
7.628264748392704E-4	7.5	22	148	0.254998	0.186562	0.548762
7.691402238838763E-4	8	29	197	0.271796	0.175162	0.541466
7.727014840321794E-4	8.5	23	163	0.252766	0.190299	0.545429
7.829923029225033E-4	9	18	111	0.263948	0.168294	0.552663
7.860901761764968E-4	9.5	15	89	0.252169	0.176957	0.561002
8.004426925701008E-4	10	17	109	0.281063	0.153078	0.550004
7.761636998721342E-4	10.5	19	125	0.278767	0.157140	0.547826

Таблица 22. Резултати за Етап 2, получени чрез Хибридният алгоритъм
(най-доброто от 6 решения, получени за всяка стойност на R):

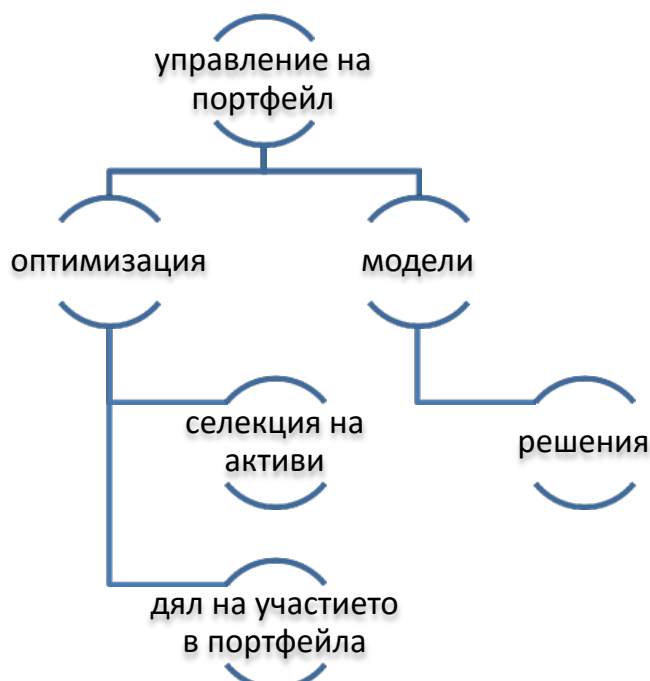
С-ст на целевата функция	R [%]	Итерац ии	Общо изчисления на целевата функция	Оптимален портфейл		
				швейц. акции	депозит 1% отр. лихва	америк. акции
3.454245734754128e-04	6	100	4000	0.17643308	0.4546998	0.3663634
3.129365174569988e-04	6.5	100	4000	0.16513090	0.4835514	0.3503956
5.173782645506672e-04	7	100	4000	0.21421108	0.3367465	0.4494170
5.231363990029533e-04	7.5	100	4000	0.17014017	0.3523580	0.4770294
4.406034287337195e-04	8	100	4000	0.16204261	0.4024634	0.4347456
5.431460187448777e-04	8.5	100	4000	0.17076799	0.3402699	0.4873809
4.193701612695205e-04	9	100	4000	0.14849045	0.4222018	0.4290450
4.553424541009349e-04	9.5	100	4000	0.15206541	0.3977233	0.4483926
4.591256854788493e-04	10	100	4000	0.15431976	0.3959432	0.4494454
5.664016893039217e-04	10.5	100	4000	0.17712438	0.3262453	0.4963191

Във всичките 10 разгледани случая за различна степен на възвръщаемост Хибридният алгоритъм е получил по-точни решения в сравнение със солвъра *fmincon* от Matlab. Разликата в стойностите на целевата функция достига до 4,289e-04 при R = 6,5% (виж Таблица 21 и Таблица 22).

3.3 Използване на предложените модели и алгоритъм за управление на портфейл

При избора на инвестиционна политика се дефинират целите на инвеститора и на обема на инвестициите, оценяват се видовете активи и се избират на най-изгодните от тях при отчитане на факторите възвръщаемост и риск. Формирането на портфейл от

активи включва двуетапна процедура на оптимизация. На първия етап се определят конкретните активи, в които ще се инвестира. Това е нагледно илюстрирано в дисертационния труд с експерименталния модел с 6 актива. След първия етап на оптимизация са определени трите най-изгодни актива, които да се включат в окончателния портфейл, а останалите три актива са отхвърлени. При това е взета предвид диверсификацията на портфейла, като са включени един безрисков - депозит при отрицателна лихва, а останалите активи са рискови, с цел да се постигне определена очаквана възвръщаемост. По този начин прилагайки формулирания нов модел и разработения Хибриден алгоритъм ЛВР съществено се подпомага при селекцията на крайните активи в портфейла (Фиг. 16).



Фиг. 16 Блок-схема на управление на портфейл

На втория етап на оптимизация се изчисляват пропорциите на инвестирания капитал за селектираните активи. Отново ЛВР е съществено подпомогнато при решенията си (виж блок IV.2. в Блок-схемата на управление на портфейл в т. 1.1 в дисертацията), тъй като му се предоставят оптимални решения за 10 различни инвестиционни политики – с очаквана възвръщаемост в интервал $[6\%, 10,5\%]$ със стъпка 0,5%. При реализацията на инвестицията съответно се закупуват оптималните количества от всеки тип активи.

Формираният при началните предпоставки портфейл след даден интервал от време може да се окаже неоптимален за инвеститора.

След етапа на формиране на портфейла обикновено се изчаква определен интервал време, след което се оценява ефективността на портфейла. На този етап се

изчислява доходността от портфейла и получения резултат се сравнява с избрания базов показател. Ако оценката за ефективността на портфейла е положителна, то следва така формирания портфейл да се запази за нов краен период от време. След това се извършва нова оценка на ефективността. При негативна оценка на ефективността на портфейла се преминава на етап преразглеждане на портфейла, което е свързано с промени в целите на инвестирането и евентуален нов избор на активи. Така формулираният нов модел и разработеният хибриден алгоритъм могат да се използват циклично в процеса на управление на портфейл. Доказана е работоспособността им за портфейл с 6 актива при времеви ред за 131 месеца (почти 11 години). Това дава основание да се очаква, че моделът и алгоритъмът могат да се прилагат за решаване на реални задачи за оптимизация на портфейл.

3.4 Изводи

Оптимизацията чрез популация от светулки на данните на двата експериментални модела е реализирана със създадения нов Хибриден алгоритъм за селекция на портфейл, базиран на метода на светулките на Янг от 2007 г. и метода на Хуук и Джийвс от 1961, известен като *Pattern Search*.

Има около две хиляди вида светулки в света, повечето от които имат способността да светят, произвеждайки къси и ритмични вълни. Смята се, че основната функция на светулката е да привлече индивиди от противоположния пол и потенциални жертви. Освен това сигналните вълни могат да служат като защитен механизъм за предупреждаване на потенциалните хищници, че светулката е горчива на вкус. Съществуват два варианта на алгоритми за оптимизация чрез популация от светулки, разработени въз основа на копиране на поведението на светулките – алгоритъм на светулките (Firefly Algorithm, FFA) и алгоритъм за оптимизация чрез рояк светулки (Glowworm Swarm Optimization, GSO)

Разработеният Хибриден алгоритъмът се базира на FFA и използва следния модел на поведение на светулки: 1. Всички светулки могат да се привличат, независимо от техния пол. 2. Привлекателността на една светулка за други индивиди е пропорционална на яркостта ѝ. 3. По-малко привлекателните светулки се движат по посока на по-привлекателна светулка. 4. Интензивността на радиацията на тази светулка, наблюдавана от друга светулка, намалява с увеличаване на разстоянието между светулките. 5. Ако светулката не вижда светулка по-ярка от себе си, тя се движи на случаен принцип. Приема се, че интензивността на излъчване на светулка f_i от популацията F , където $i = 1, \dots, N$; е равна на стойността на фитнес функцията в

текущото положение на светулката. Привлекателността на светулка f_i за светулка f_j се приема за: $\beta_0 e^{-\gamma r_{ij}^2}$ (виж формула (2.37)).

Алгоритъм на светулките (Firelight Algorithm)

Стъпка 1. Инициализиране на популацията на светулките F произволно (със случаен генератор).

Стъпка 2. Намиране на най-добрата светулка GBest.

Стъпка 3. Итерация:

Проверка на критерия за спиране. Ако е изпълнен – премини към **Стъпка 5**.

Цикъл: Докато критерият за спиране не е изпълнен за всяка двойка светулки F_i и F_j изпълни движение

от F_j към F_i , ако F_i е по-атрактивна от F_j или движение от F_j към F_i в противен случай. Край на цикъла.

Стъпка 4. Обновяване на стойността на GBest. Премини към **Стъпка 3**.

Стъпка 5. Край.

Псевдокодът за реализиране на алгоритъма на светулките (FFA) е показан по-долу:

Алгоритъм на светулките

Целева функция $f(x)$ $x = (x_1, \dots, x_d)^T$,

Генериране на начална популация от светулки x_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

Интензитетът на светлината I_i при x_i се определя с $f(x_i)$

Определяне на коефициента на поглъщане на светлината γ

while ($t < \text{MaxGeneration}$)

for $i = 1 : n$ всички n светулки

for $j = 1 : i$ всички n светулки

if ($I_j > I_i$), Придвиги светулка i към светулка j

с размерност d ; end if

Привлекателността варира според разстоянието r съгласно

израза $\exp[-\gamma r]$

Оценяване на новите решения и обновяване на интензитета на светлината за всяка светулка.

end for j

end for i

Подреждаване на светулките и намиране на текущо най-добрата GBest.

end **while**

Крайна обработка на резултатите и визуализация

Псевдокод на алгоритъма на светулките (FFA)

В тази схема GBest е най-доброто решение, открито сред всички светулки в популацията. Понастоящем са разработени много модификации на алгоритъма за светулки за решаване на различни оптимизационни задачи, като освен това е използван и за решаване на много практически проблеми.

Оптимален резултат с Хибридният алгоритъм, Експеримент 1

Rate of return = 8,5%

Program: fa_mincon_KrS.m

$z = 5.406316110207684e-04$

$x = 0.155358409355396 \quad 0.376441585393238 \quad 0.466144297179756$

На Фиг. 17 е показано оптималното решение за портфейла при възвръщаемост от $R = 8,5\%$, получено чрез използване на Хибридният еволюционен алгоритъм.



Фиг. 17. Оптимален портфейл решение (възвръщаемост = 8,5%)

Оптимален резултат на *fmincon* от Matlab, Експеримент 1

Rate of return = 8,5%

$z = 6.403115399398162e-04$

$x = 0.144184 \quad 0.445191 \quad 0.410626$

Посредством два оптимизационни подхода Interior Point на солвъра *fmincon* в средата Matlab и разработения в дисертацията Хибриден алгоритъм, базиран на метода на светулките на Янг и метода на търсене по шаблон (Pattern search) на Хуук и Джийвс, са тествани различни оптимизационни задачи, а именно решени са 30 задачи за оптимизация на портфейл със следните активи: американски, френски, японски и

швейцарски акции, десет годишни американски държавни ценни книжа (облигации) и инвестиция в депозит при 1 % положителна и 1% отрицателна лихва при предварително търсена ставка на възвръщаемост в размер от 6% до 10,5% с възходяща стъпка на нарастване от 0,5%. Извършени са два експеримента посредством построяването на два модела с три и шест активи, като дължината на редиците на изходните данни е съответно 120 и 131 месечни възвръщаемости. Извърши се тестване на различни задачи, а именно задачи от еднокритериална условна оптимизация с реални променливи. Ефективността на подходите беше оценена по следните критерии: брой итерации, брой изчисления на целевата функция и време, за което се извършват изчисленията. Размерът на задачите за изчисления варираше. При първия експеримент по десет изчисления за търсена възвръщаемост от 6 % до 10,5 % със стъпка на нарастване от 0,5, а при втория по шест изчисления за идентична на горната търсена възвръщаемост. В резултат на това беше установено, че хибридният алгоритъм за оптимизация на портфейл решава точно задачите от двата експеримента в сравнение с резултата, получен чрез солвъра **fmincon** от MATLAB и достига до финално решение за относително кратко време. По този начин се дава важна информация на ЛВР при селекцията на активи за участие в портфейла, отчитайки предварително зададените критерии. Така финансовият аналитик, мениджърът или друго ЛВР биват подпомогнати при решението кой/кои активи да се изключи/включи в портфейла. На следващ оптимизационен етап се определят точните пропорции на активите, включени в портфейла. Получаването на резултатите с висока точност е свързано с извършването на настройка на параметрите в Хибридният алгоритъм, както е описано в Глава 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисертационният труд третира проблемите, свързани с разработването на нови, високо ефективни математически модели и методи за оптимизация и управление на портфейл, което представлява не само научен, но и практически интерес както за борсите, банките, застрахователните и инвестиционните компании, така и за държавата от гледна точка функционирането на финансовата система.

В изследването за целите на анализа са използвани математически модели за вземащите решения в условията на стабилна икономическа ситуация, при разширяване на модела на класическата теория на финансите, като вземащият решение търси само максимизиране на своята полза при минимизиране на риска. В реалния живот лицето вземащо решения се среща с редица ограничения: кардинални, разходи за смяна на активите, ограничения за оборот, търговски и др., които са подробно описани. Влияние оказват и поведенческите фактори на лицето, вземащо решения, тъй като действията на инвеститорите/мениджърите/ЛВР понякога се отклоняват от рационалното.

Използваните два оптимизационни подхода *Interior point* при нелинейна оптимизация с ограничения в среда на Matlab и предложеният Хибриден еволюционен алгоритъм за оптимизация на портфейл дават възможност за обработката на големи редове данни за исторически периоди от 10 години и повече за цялата налична международна публична информация.

Извършени са числени пресмятания за два експериментални модела с различен брой на активите, участващи в портфейла и с различни редове изходни реални данни, за да се тества приложимостта на създадения нов хибриден алгоритъм за оптимизация на портфейл и да се сравнят двата подхода за решаване на задачата за оптимизация на портфейл с ограничения.

В първия експеримент за построяване на модела са използвани два международни индекса и допускането, че 100 евро са инвестирани в депозит, с 1% положителна възвръщаемост (лихва) за 10-годишен период. Чрез тези изходни данни за възвръщаемостта на трите актива са изчислени геометричната средна, матрицата на ковариацията и матрицата на корелацията, които послужиха за формулирането на задачата за оптимизация на портфейл като задача на нелинейното програмиране. В нея е включено едно квадратично ограничение от тип неравенство с цел осигуряване на разнообразие на получения портфейл, както и поне едно линейно ограничение от тип неравенство, а именно очакваната възвръщаемост от всички включени в портфейла активи да *не е по-малка* от предварително зададената такава. Най-напред оптимизацията се извърши със солвър *fmincon* от Matlab "Optimization Toolbox", а след това със създадения Хибриден еволюционен алгоритъм, като бяха извършени по 10 теста за всяка от разгледаните 10 очаквани ставки на възвръщаемост. От тези получени десет решения

се избра най-доброто, визуализирано чрез най-малката стойност на целевата функция и представящо пропорциите на активите в портфейла. Резултатите, получени по двата подхода бяха сравнени по следните критерии: брой итерации, брой изчисления за стойността на целевата функция и времето за това. Аналитичното и графичното представяне на резултатите показва, че разработеният Хибриден еволюционен алгоритъм достига до оптималното решение за относително кратко време и получените резултати са с висока точност (над 15 цифри след десетичния знак). Хибридният алгоритъм получава по-точни решения в сравнение със солвъра **fmincon** от Matlab. Така се дава важна информация на ЛВР, кои активи и в какъв размер/пропорция да включи/изключи от портфейла, както и се преодоляват негативните поведенчески фактори при вземането на решение. Представена е апроксимация на Парето фронта за всички алтернативни портфейли при разглежданите десет стойности за процента на желаната възвръщаемост. Тази апроксимация служи за разбиране на инвестициите в портфейла, като подпомага ориентирането за портфейлната инвестиция при различните решения.

Във втория експеримент за построяване на модела са използвани пет международни индекса и допускането, че 1000 евро са инвестирани в депозит, с 1% отрицателна възвръщаемост (лихва) за период от 10 години и 11 месеца. Чрез тези изходни данни за възвръщаемостта на шестте актива са изчислени геометричната средна, матрицата на ковариацията и матрицата на корелацията, които послужиха за формулирането на задачата за оптимизация на портфейл като задача на нелинейното програмиране с едно квадратично ограничение от тип неравенство и поне едно линейно ограничение от тип неравенство, а именно очакваната възвръщаемост на всички включени в портфейла активи да не е по-малка от предварително зададената такава. На първия етап оптимизацията се извърши с всичките шест актива. Най-напред беше използван Хибридният алгоритъм, а след това солвърът **fmincon** от Matlab. След това най-добрите три актива се включиха във втория етап на оптимизацията, където с Хибридният алгоритъм бяха извършени по 6 теста за всяка от разглежданите 10 очаквани ставки на възвръщаемост възвръщаемост. От тези получени шест решения се избра най-доброто, визуализирано чрез най-малката стойност на целевата функция и представящо пропорциите на активите в портфейла. Накрая десет оптимизационни задачи за различните очаквани ставки на възвръщаемост бяха решени със солвъра **fmincon** от Matlab "Optimization Toolbox". Резултатите, получени по двата подхода бяха сравнени по следните критерии: брой итерации, брой изчисления за стойността на целевата функция и времето за това. Аналитичното и графичното представяне на резултатите показва, че еволюционният алгоритъм достига до оптималното решение за относително кратко време, получаваните резултати са с висока точност (над 15 цифри след десетичния знак) като получените оптимални решения са по-точни в сравнение с резултата, получен чрез солвъра **fmincon** от Matlab. Така се дава информация на ЛВР кои активи да

включи/изключи от портфейла и в какъв размер/пропорция, както и се преодоляват негативните поведенчески фактори при вземането на решение.

От всички проведени експерименти може да се установи, че и двата подхода са приложими при оптимизацията на портфейл с ограничения.

Детайлното разглеждане на резултатите от двата експериментални модела показва, че Хибридният еволюционен алгоритъм с лекота преодолява недостатъка на метода на времевите редове за значителната изчислителна трудност, друго предимство е ефикасността / точността му, с която намира оптималните решения. Той е по-прецизен при изчисленията в сравнение със солвъра *fmincon* на Matlab.

В заключение може да се обобщи, че създадения нов Хибриден алгоритъм за оптимизация на портфейл е приложим и ефективен за решаване на широк кръг задачи в реални финансови процеси. По този начин получи потвърждение работната хипотеза на настоящия труд, че хибридни еволюционни алгоритми могат да се прилагат с успех при оптимизацията на портфейли. Решаването на реални задачи с по-големи размери би могло да бъде насока за бъдещи изследвания, които ще доведат до обогатяване на изследваната научна област.

Получените в дисертацията резултати, както и създаденият Хибриден алгоритъм за селекция и оптимизация на портфейл са представени на четири международни конференции:

- Sixth International Scientific Conference (FMNS 2015), Blagoevgrad, Bulgaria, 2015,
- XXX International Conference on Information Technologies (InfoTech-2016), St. St. Constantine and Elena resort, Varna, Bulgaria, 2016,
- Eupean Study Group with Industry 129, Graasten, Denmark, 2017,
- LIII International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies ICEST' 2018, Sozopol, Bulgaria, 2018.

Публикациите по дисертационния труд са отразени в шест статии и една глава от книга на издателство LAP Lambert Academic Publishing и реферирана в Google Scholar.

Приноси

В резултат на проведените изследвания в настоящия труд, са постигнати следните научно-приложни и приложни резултати:

- ▶ Формулиран е модел за оптимизация на портфейл за няколко периода, който представлява модификация на модела Средна вариация (MV) на Хари Марковиц.

- ▶ Предложена е обобщена методология за формиране на портфейл.

- ▶ Формулиран е Хибриден еволюционен алгоритъм на база метода на Янг и метода Pattern search (Търсене по шаблон/еталон) на Хуук и Джийвс. Предимството на предложениия алгоритъм е точността при изчислението на оптималното решение и относително краткото време за решаване на оптимизационните задачи. Полиномиалната изчислителна сложност на Хибридниия еволюционен алгоритъм позволява той да се използва успешно за решаване на оптимизационни задачи с голям размер.

- ▶ На база на предложениия оптимизационен модел са формулирани съответни задачи, които са решени чрез предложениия Хибриден алгоритъм и чрез стандартния солвър *fmincon* на Matlab (*Interior point*). Получените резултати потвърждават работоспособността на Хибридниия алгоритъм.

- ▶ Разработени са програмни модули, реализиращи предложениия Хибриден алгоритъм за решаване на задачата за оптимизация на портфейл при минимизация на риска, с очаквана степен на разнообразие и зададена степен на възвръщаемост.

Публикации по темата на дисертационния труд

1. **Stoyanova, K. Optimization Model of Loan Portfolio. In Proc. of the Sixth International Scientific Conference-FMNS 2015, Blagoevgrad, Bulgaria, 2015, ISSN: 1314-0272, pp. 38-43 Zbl 1410.91475.**
2. Stoyanova, K., Guliashki, V. MOEAs Applications in the Finance Area. In Proc. of the 30-th International Conference of Information Technologies (InfoTech 2016), ISSN: 1314-1023, Varna, Bulgaria, pp. 31-41.
3. Stoyanova, K., Guliashki, V. A FFO-PS Hybrid Algorithm for Portfolio Selection. In Proc. of the 30-th International Conference of Information Technologies (InfoTech 2016), ISSN: 1314-1023, Varna, Bulgaria, pp. 42-52.
4. Batarfi, H., Bootland, N., San Juan, I. I., Please, C., Raffaelli, M., Stoyanova-Chokova, K., Toshev, A. Modelling Socio-Historical Dynamics. ESGI 129 Study Group Report, ISSN: 2167-6163, Graasten, Denmark, 2017, pp. 1-14.
5. Guliashki, V., Stoyanova, K. Portfolio Risk Optimization Based on MVO Model. In Proc. of the LIII International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies ICEST'2018, ISSN: 2603-3259 (Print), 2603-3267 (Online), pp. 67-70.
6. **Stoyanova, K., Guliashki, V., MOEAs for Portfolio Optimization Applications. LAP Lambert Academic Publishing, ISSN: 978-613-9-89984-5, 2018, 52 pages.**
7. **Stoyanova K., Guliashki V. (2020). Two-Stage Portfolio Risk Optimization Based on MVO Model. *International Journal for Reasoning-based Intelligent Systems*, Special Issue: "Intelligent Sensor Data Processing, Mobile Telecommunications and Air Traffic Control", (Guest Eds: K. Dimitrov, I. Draganov), Vol. 12, No. 1, pp. 70-79, ISSN online: 1755-0564, ISSN print: 1755-0556, SJR (0,125), SJR (Q3), DOI: 10.1504/IJRIS.2020.105011**

Декларация за оригиналност на резултатите

Декларирам, че дисертацията съдържа оригинални резултати, получени, при проведени от мен, научни изследвания с подкрепата и съдействието на научния ми ръководител.

Резултатите, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са коректно и подробно цитирани в библиографията.

Настоящият дисертационен труд не е прилаган за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпис:/Кр. Стоянова/

Библиография

1. Abido, M. A., & A. M. Elazouni, Multiobjective Evolutionary Finance-Based Scheduling: Entire Projects' Portfolio, *Journal of Computing in Civil Engineering*, vol. 25, no. 1, pp. 85-97, January-February 2011.
2. Abraham, A., C. Grosan, S. Han, & A. Gelbukh, Evolutionary multiobjective optimization approach for evolving ensemble of intelligent paradigms for stock market modeling, In *MICAI*, 2005, pp. 673-681.
3. Akian, M., Menaldi, J. L., & Sulem, A. (1996). On an Investment-consumption Model with Transaction Costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 34(1):329-364.
4. Anagnostopoulos, K. & Mamanis, G. (2010). A Portfolio Optimization Model with Three Objectives and Discrete Variables. *Computers & Operations Research*, vol. 37, no 7, pp. 1285-1297.
5. Anagnostopoulos, K. & Mamanis, G. (2011a). Multiobjective Evolutionary Algorithms for Complex Portfolio Optimization Problems. *Computational Management Science*, Vol. 8(3):259-279.
6. Anagnostopoulos, K. & Mamanis, G. (2011b). The Mean-Variance Cardinality Constrained Portfolio Optimization Problem: An Experimental Evaluation of Five Multiobjective Evolutionary Algorithms. *Expert Systems with Applications*, Vol. 38(11):14208-14217.
7. Aranha, C. C. Aranha & H. Iba, A tree-based GA representation for the portfolio optimization problem, In *GECCO '08: Proceedings of the 10th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. New York, NY, USA: ACM, 2008, pp. 873-880.
8. Aranha, C. C., & H. Iba, Application of a memetic algorithm to the portfolio optimization problem, In *AI '08: Proceedings of the 21st Australasian Joint Conference on Artificial Intelligence*. Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2008, pp. 512-521.
9. Aranha, C. C., & H. Iba, Using memetic algorithms to improve portfolio performance in static and dynamic trading scenarios, In *Proceedings of the 11th Annual conference on Genetic and evolutionary computation*, ser. *GECCO '09*. New York, NY, USA: ACM, 2009, pp. 1427-1434.
10. Armananzas, R. & Lozano, J. (2005). A Multiobjective Approach to the Portfolio Optimization Problem. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, vol. 2, 2005, pp. 1388-1395.
11. Arnone, S., A. Loraschi, & A. Tettamanzi, A genetic approach to portfolio selection, *Neural Network World*, vol. 3, no. 6, 1993, pp. 597-604.
12. Athan, T. W., & P. Y. Papalambros. 1996. A Note on Weighted Criteria Methods for Compromise Solutions in Multi-Objective Optimization. *Engineering Optimization* Vol. 27 (2): 155-176.
13. Barber, B., & Odean, T. Trading is hazardous to your wealth: The common stock investment performance of individual investors // *Journal of Finance*, Vol. 55(2), 2000, pp. 773-806.
14. Barber, B., & Odean, T. All that glitters: The effect of attention and news on the buying behavior of individual and institutional investors, *Review of Financial Studies*, Vol. 21(2), 2008, pp. 785-818.

15. Barberis, N., & Huang, M. (2001). Mental accounting, loss aversion, and individual stock returns, *The journal of finance*, 56, 1247-1292.
16. Beasley, J. (1990). OR-Library: Distributing Test Problems by Electronic Mail. *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 41(11):1069-1072.
17. Beasley, J. E. (1999). OR Library DataSet. Available from: <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/portinfo.html>. [Online; accessed 02- Oct-2011].
18. Bennett, R. "Introduction to PortfolioAnalytics", May 17., 2018, pp. 1-34,
https://cran.rproject.org/web/packages/PortfolioAnalytics/vignettes/portfolio_vignette.pdf
19. Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of operations research*, 23, pp. 769-805.
20. Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (1999). Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 25, pp. 1-13.
21. Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations research*, 52, pp. 35-53.
22. Bertsimas, D., & Pachamanova, D. (2008). Robust multiperiod portfolio management in the presence of transaction costs. *Computers & Operations Research*, 35, pp. 3-17.
23. Best, M. J., & Grauer, R. R. (1991). Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems. *Management Science*, 37, 980-989.
24. Bhardwaj, G., & Swanson N. R. An empirical investigation of the usefulness of ARFIMA models for predicting macroeconomic and financial time series, *Journal of Econometrics*, Vol. 131, 2006, pp. 539-578.
25. Biglova, A., Ortobelli, S., Rachev, S. T., & Stoyanov, S. (2004). Different Approaches to Risk Estimation in Portfolio Theory. *The Journal of Portfolio Management*, 31(1):103-112.
26. Black, F., & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial analysts journal*, 48, pp. 28-43.
27. Blume, M. E. Betas and Their Regression Tendencies, *The Journal of Finance*, 1975, Vol. 30, No. 3, pp. 785-795.
28. Bogani, C., M. G. Gasparo, & A. Papini, Pattern Search Method for Discrete L_1 -approximation, *J. Opt. Theory Appl.*, vol. 134, 2007, pp. 47-59.
29. Bogani, C., M. G. Gasparo, & A. Papini, (2009), Generalized Pattern Search Methods for a Class of Nonsmooth Optimization Problems with Structure, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 229(1), 2009, pp. 283-293, doi: 10.1016/j.cam.2008.10.047
30. Bouchaud, J.-P. & Potters, M., *Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management*. Cambridge university press, 2003.
31. Box G. E. P., Jenkins G. M. *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, 1976.
32. Bradshaw, N., C. Walshaw, C. Ierotheou, & A. Parrot, A multi-objective evolutionary algorithm for portfolio optimisation, In *Pro. of the Symposium Evolutionary Systems (AISB 2009)*, C. et al., Ed. The Society for the Study of Artificial Intelligence and the Simulation of Behaviour, 2009, pp. 27-32.

33. Branke J., Deb K., Miettinen K., & Słowiński R., Multiobjective Optimization. Interactive and Evolutionary Approaches, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
34. Branke, J., B. Scheckenbach, M. Stein, K. Deb, & H. Schmeck. Portfolio optimization with an envelope-based multi-objective evolutionary algorithm. European Journal of Operational Research, 199(3), 2009, pp. 684-693.
35. Butler, M., & A. Daniyal, Multi-objective optimization with an evolutionary artificial neural network for financial forecasting, In Proc. of the 11th Annual conference on Genetic and evolutionary computation, ser. GECCO '09. New York, NY, USA: ACM, 2009, pp. 1451-1458.
36. Calafiore, G. C. (2008). Multi-period portfolio optimization with linear control policies. Automatica, 44, 2463-2473.
37. Calafiore, G. C. (2013). Direct data-driven portfolio optimization with guaranteed shortfall probability. Automatica, 49, pp. 370-380.
38. Canakgoz, N. & Beasley, J. (2009). Mixed-integer Programming Approaches for Index Tracking and Enhanced Indexation. European Journal of Operational Research, 196(1), pp. 384 - 399.
39. Cesarone, F., Scozzari, A., & Tardella, F. (2011). Portfolio Selection Problems in Practice: A Comparison Between Linear and Quadratic Optimization Models. arXiv preprint arXiv:1105.3594.
40. Cesarone, F., Scozzari, A., & Tardella, F. (2013). A New Method for Mean- Variance Portfolio Optimization with Cardinality Constraints. Annals of Operations Research, Vo. 205(1), pp. 213-234.
41. Chang, T., N. Meade, J. Beasley, & Y. Sharaiha, Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization, Computers and Operations Research, vol. 27(13), 2000, pp. 1271-1302.
42. Chang, T., S. Yang, & K. Chang, Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm, Expert Systems with Applications, vol. 36(7), 2009, pp. 10529-10537.
43. Chaudhuri R., Ivkovic Z., Pollet J., Trzcinka C. What a Difference a Ph. D. Makes: More than Three Little Letters, 2013
44. Chen, C., & Kwon, R. H. (2012). Robust portfolio selection for index tracking. Computers & Operations Research, Vol. 39, pp. 829-837.
45. Chen L. Stochastic Mean and Stochastic Volatility, A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and Its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives, Financial Markets, Institutions and Instruments, Vol. 5, 1996, pp. 1-88.
46. Chen, W., Tan, S., & Yang, D. (2011). Worst-case VaR and robust portfolio optimization with interval random uncertainty set. Expert Systems with Applications, Vol. 38 (1), pp. 67-70.
47. Chen, W. N., Zhang, J., Lin, Y., Chen, N., Zhan, Z. H., Chung, H., Li, Y., & Shi, Y. (2013). Particle swarm optimization with an aging leader and challengers. IEEE transaction on evolutionary computation, 17, pp. 241-258.
48. Chiam, S., K. Tan, & A. Al Mamum, Evolutionary multi-objective portfolio optimization in practical context, International Journal of Automation and Computing, vol. 5(6), 2008, pp. 67-80.

49. Chiam, S., K. Tan, & A. Al Mamun, Investigating technical trading strategy via an multi-objective evolutionary platform, *Expert Systems with Applications*, vol. 36(7), 2009, pp. 10408-10423.
50. Chiu, M. Asset-Liability Management under the Safety-First Principle, *Journal of Optimization Theory and Applications*. Vol. 143(3), 2009, pp. 455-478.
51. Cui, X., Zhu, S., Sun, X., & Li, D. (2013). Nonlinear portfolio selection using approximate parametric value-at-risk. *Journal of Banking & Finance*, 37, pp. 2124-2139.
52. Coello C. A. C. & G. Toscano Pulido, Multiobjective optimization using a micro-genetic algorithm, In Lee Spector et al., eds, *Proc. of the genetic and evolutionary computation conference*, (GECCO'2001), San Francisco, California, Morgan Kaufmann Publishers, 2001, pp. 274-282.
53. Coello C. A. C., D. A. Van Veldhuizen, & G. Lamont, *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*, Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 2002.
54. Coello Coello, C., Van Veldhuizen, D. A., & Lamont, G. B. (2002) *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*, vol. 242, Springer, 2002, ISBN 978-0-387-36797-2
55. Coello, C. A. C. & Lamont G. B., *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms*, World Scientific, Singapore, 2004
56. Coello, C.A.C. & N. Cruz Cortes, Solving multiobjective optimization problems using an artificial immune system, *Genetic Programming and Evolvable Machines*, vol. 2, June 2005, pp. 163-190.
57. Cornuejols, G., & R. Tütüncü, *Optimization Methods in Finance*, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, January 2006
58. Colomi, A., M. Dorigo, & V. Maniezzo, Positive Feedback as a Search Strategy, Department of Electronics, Politecnico di Milano, Italy, Working paper 91-16, 1991.
59. Colomi, A., M. Dorigo, & V. Maniezzo, An Investigation of Some Properties of an Ant Algorithm, In *Parallel Problem Solving from Nature 2*, R. Männer and B. Mandrieck eds., North-Holland: Amsterdam, 1992, pp. 509-520.
60. Corne, D.W., J.D. Knowles, & M.J. Oates, The Pareto envelope-based selection algorithm for multi-objective optimization. In: Deb, K., Rudolph, G., Lutton, E., Merelo, J.J., Schoenauer, M. Schwefel, H. P., Yao, X., (eds.) *PPSN 2000. LNCS*, vol. 1917, Springer, Heidelberg, 2000, pp. 839-848.
61. Corne, D.W., N.R. Jerram, J.D. Knowles, & M.J. Oates, PESA-II: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization, In Lee Spector et al., editor, *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'2001)*, San Francisco, California, Morgan Kaufmann Publishers, 2001, pp. 283-290.
62. Crama, Y. & Schyns, M. (2003). Simulated Annealing for Complex Portfolio Selection Problems. *European Journal of Operational Research, Financial Modelling*, Vol. 150(3), pp. 546-571.
63. Cura, T. (2009). Particle Swarm Optimization Approach to Portfolio Optimization. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 10(4), pp. 2396 - 2406.

64. Dastkhan, H., N. S. Gharneh, & H. Golmakani, A linguistic-based portfolio selection model using weighted max-min operator and hybrid genetic algorithm, *Expert Systems with Applications*, vol. 38(9), 2011, pp. 11735-11743.
65. Davidon, W. C. (1991). Variable metric method for minimization. *SIAM Journal on Optimization* Vol. 1 (1): pp. 1-17.
66. Davis, M. H. A. & Norman, A. R. (1990). Portfolio Selection with Transaction Costs. *Mathematics of Operations Research*, Vol. 15(4), pp. 676-713.
67. de Castro, L. N. & J. Timmis. *An Introduction to Artificial Immune Systems: A New Computational Intelligence Paradigm*. Springer, London, 2002. ISBN 1-85233-594-7
68. De Bondt, W., & Thaler R. Does the stock market overreact?, *The Journal of Finance*, 1985, Vol. XL, No. 3, pp. 793-805.
69. De Bondt, W., Mayoral, R. M., & Vallelado, E. Behavioral decision-making in finance: An Overview and Assessment of Selected Research, *Revista Espanola de Financiacion y Contabilidad*, Vol. XLII, No. 157, 2013, pp. 99-118.
70. Deb, K. (2001), *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*, John Wiley & Sons Inc., Unated States, ISBN: 978-0-471-87339-6, August 2001, 518 pages.
71. Deb K., A. Pratap, S. Agarwal, & T. Meyarivan, A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6(2), 2002, pp. 182-197.
72. Deb K., J. Sundar, U. B. Rao N., S. Chaudhuri, Reference Point Based Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms, *International Journal of Computational Intelligence Research*, Vol. 2(3), 2006, pp. 273-286.
73. De Franco, C., & Monnier, B., The diversification constraint for Minimum Variance portfolios, November 24, 2014, https://www.ossiam.co.uk/files/research_papers/1420536417_The_diversificationconstraint_for_Minimum_Variance_portfolios-v2.pdf
74. Deng, G.-F., Lin, W.-T., & Lo, C.-C. (2012). Markowitz-based Portfolio Selection with Cardinality Constraints using Improved Particle Swarm Optimization. *Expert Systems with Applications*, Vol. 39(4), pp. 4558 - 4566.
75. Devenow, A., Welch I. Rational herding in financial economics, *European Economic Review*, Vol. 40(3-5), 1996, pp. 603-615.
76. Di Tollo, G. & Roli, A. (2008). Metaheuristics for the portfolio selection problem. *International Journal of Operations Research*, Vol. 5(1), pp. 13-35.
77. Diosan, L., A multi-objective evolutionary approach to the portfolio optimization problem, In *CIMCA '05: Proceedings of the International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation and International Conference on Intelligent Agents, Web Technologies and Internet Commerce*, Vol. 2 (CIMCA-IAWTIC'06). Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2005, pp. 183-187.
78. Drake, E. A., & R. E. Marks, *Genetic Algorithms in Economics and Finance: Forecasting Stock Market Prices and Foreign Exchange – a Review*, Genetic Algorithms and Genetic Programming in Computational Finance, Kluwer Academic Publishers, 2002, pp. 29-54.

79. Ducheyne, E. I., R. R. De Wulf, & B. De Baets, A spatial approach to forest-management optimization: linking GIS and multiple objective genetic algorithms, *International Journal of Geographical Information Science*, Vol. 20(8), 2006, pp. 917-928.
80. Dumas, B. & Luciano, E. (1991). An Exact Solution to a Dynamic Portfolio Choice Problem Under Transactions Costs. *The Journal of Finance*, Vol. 46(2), pp. 577- 595.
81. Duran, F., C. Cotta, & A. Fernandez, On the use of on the use of Sharpe's index in evolutionary portfolio optimization under Markowitz's model, In *Proceedings of the Convention on Adaptive & Emergent behavior & Complex Systems (AISB 2009)*, Edinburgh, Scotland, April 2009.
82. Dzurek, N. C., & Y. Nkansah-Gyekye, A Multi-Stage Supply Chain Network Optimization Using Genetic Algorithms, *Mathematical Theory and Modelling*, Vol. 4(8), 2014, pp. 18-29.
83. Eberhart, R. C., & Kennedy, J., A new optimizer using particle swarm theory, In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*, Nagoya, Japan, 39-43, Piscataway, N. J. IEEE Service Center, 1995.
84. Ehrgott, M., K. Klamroth, & C. Schwehm, An MCDM approach to portfolio optimization, *European Journal of Operational Research*, vol. 155(3), 2004, pp. 752-770.
85. Ehrgott, M., & Wiecek, M. M. (2005) Multiobjective programming. In: Figueira J et al. (eds.) *Multiple criteria decision analysis (Int. Ser. Oper. Res. Management Sci. 78)*.
86. El Ghaoui, L., & Lebret, H. (1997). Robust solution to least-squares problems with uncertain data. *Siam journal of matrix analysis and application*, 18, pp. 1035-1064.
87. Engle, R. F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation, *Econometrica*, Vol. 50, 1982, pp. 987-1007.
88. Enke, D., Thawornwong S. The use of data mining and neural networks for forecasting stock market returns, *Expert Systems with Applications*, Vol. 29, 2005, pp. 927-940.
89. Eskandari, H. & C. Geiger, A fast Pareto genetic algorithm approach for solving expensive multiobjective optimization problems, *Journal of Heuristics*, vol. 14(3), 2008, pp. 203-241.
90. Fenzl, T., & Perlzmann, L. Psychological and Social Forces behind Aggregate Financial Market Behavior, *The Journal of Behavioral Finance*, Vol. 13, 2012, pp. 56-65.
91. Fernandez, A. & Gomez, S. (2007). Portfolio Selection using Neural Networks. *Computers & Operations Research*, Vol. 34(4), pp. 1177 -1191.
92. Fieldsend, J., J. Matatko, & M. Peng, Cardinality constrained portfolio optimisation, In *Proceedings of the Fifth International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning (IDEAL'04)*, Z. Yang, Everson, R., and H. Yin, Eds., vol. 3177. Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science, August 2004, pp. 788-793.
93. Fonseca, C., & P. Fleming, Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization, In *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, S. Forrest, Ed., University of Illinois at Urbana- Champaign. San Mateo, California: Morgan Kauffman Publishers, 1993, pp. 416-423.
94. Fontes, D.B.M.M. & A. Gaspar-Cunha, On Multi-Objective Evolutionary Algorithms, Chapter 10 in C. Zopounidis and P. M. Pardalos (eds.), *Handbook of Multicriteria Analysis*, Applied

- Optimization 103, DOI 10.1007/978-3-540-92828-7_10, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010, pp. 287-310.
95. Fortin, I., & Hlouskova, J. (2011). Optimal asset allocation under linear loss aversion, *Journal of Banking & Finance*, Vol. 35, pp. 2974-2990.
 96. Garey M. R. & Johnson D. S., *Computers Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, San Francisco 1979.
 97. Garkaz, M., The Selection and Optimization of Stock Portfolio using Genetic Algorithm based on Mean Semi-variance Model, In *Proc. of International Conference on Economics and Finance Research*. IPEDR, LACSIT Press, Singapore, 4, 2011, pp. 379-381.
 98. Gaspar-Cunha, A., F. Mendes, J. a. Duarte, A. Vieira, B. Ribeiro, A. Ribeiro, & J. a. Neves, Multi-objective evolutionary algorithms for feature selection: application in bankruptcy prediction. In *Proc. of the 8th international conference on Simulated evolution and learning*, ser. SEAL'10. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010, pp. 319-328.
 99. Gaspero, L. D., Tollo, G. D., Roli, A., & Schaerf, A. (2011). Hybrid Meta- heuristics for Constrained Portfolio Selection Problems. *Quantitative Finance*, Vol. 11(10), pp. 1473-1487.
 100. Goldberg, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Reading Mass, Addison Wesley, 1989.
 101. Golmakani, H. R. & Fazel, M. (2011). Constrained Portfolio Selection using Particle Swarm Optimization . *Expert Systems with Applications*, Vol. 38(7), pp. 8327-8335.
 102. Gomez, M., C. Flores, & M. Osorio, Hybrid search for cardinality constrained portfolio optimization. In *GECCO '06: Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. New York, NY, USA: ACM, 2006, pp. 1865-1866.
 103. Gregory, C., Darby-Dowman, K., & Mitra, G. (2011). Robust optimization and portfolio selection: the cost of robustness, *European Journal of Operational Research*, 212, pp. 417-428.
 104. Grootveld, H. and Hallerbach, W. (1999). Variance vs Downside Risk: Is There Really that Much Difference? *European Journal of Operational Research*, Vol. 114(2), pp. 304 - 319.
 105. Haimes, Y.Y., Lasdon, L. S., & Wismer, D. A., On a Bicriterion Formulation of the Problems of Integrated System Identification and System Optimization, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 1 (1971), pp. 296-297.
 106. Hassan, G., & C. Clack, Robustness of multiple objective GP stock- picking in unstable financial markets: real-world applications track, In *Proceedings of the 11th Annual conference on Genetic and evolutionary computation GECCO '09*. New York, NY, USA: ACM, 2009, pp. 1513-1520.
 107. Hassanzadeh, F., Nemati, H., & Sum, M., (2014), Robust optimization for interactive multiobjective programming with imprecise information applied to R&D project portfolio selection, *European Journal of Operational Research*, Vol. 238, pp. 41-53.
 108. Harras, G., & Sornette, D. How to grow a bubble: A model of myopic adapting agents, *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 80(1), 2011, pp. 137-152.
 109. Hertz, A. & D. Kobler, A framework for the description of population based methods, In *Tutorials and Research Reviews, 16-th European Conference on Operational Research*", Brussels, BELGIUM, July 12-15, 1998.

110. Hochreiter, R., An evolutionary computation approach to scenario-based risk-return portfolio optimization for general risk measures, In Proceedings of the 2007 EvoWorkshops 2007 on EvoCoMnet, EvoFIN, EvoIASP, EvoINTERACTION, EvoMUSART, EvoSTOC and EvoTransLog. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007, pp. 199-207.
111. Hochreiter, R., Evolutionary stochastic portfolio optimization, In Natural Computing in Computational Finance, ser. Studies in Computational Intelligence. Springer, vol. 100, 2008, pp. 67-87.
112. Holland, J.H., Adaptation in Natural and Artificial Systems, University of Michigan Press, 1975, MIT Press 1992.
113. Hooke, R.; Jeeves, T.A. (1961), Direct search solution of numerical and statistical problems. Journal of the Association for Computing Machinery (ACM) 8 (2), pp. 212-229.
114. Horn, J. & N. Nafpliotis, Multiobjective optimization using the niched Pareto genetic algorithm, IlliGAL Technical Report 93005, Illinois Genetic Algorithms Laboratory, University of Illinois, Urbana, Illinois, 1993.
115. Horn, J., Nafpliotis, N. & Goldberg D. E., A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization. In Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Evolutionary Computation, IEEE Press, Piscataway, New Jersey, Vol. 1, 1994, pp. 82-87.
116. Hjalmarsson, E. Predicting Global Stock Returns, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 45(1), 2010, pp. 49-80.
117. Huang, X., Credibility-based chance-constrained integer programming models for capital budgeting with fuzzy parameters, Information Sciences, vol. 176(18), 2006, pp. 2698-2712.
118. Jarrett J. Daily variation and predicting stock market returns for the frankfurter boerse (stock market), Journal of Business Economics&Management, Vol. 9(3), 2008, pp. 189-198.
119. Jobst, N., Horniman, M., Lucas, C., & Mitra, G. (2001). Computational Aspects of Alternative Portfolio Selection Models in the Presence of Discrete Asset Choice Constraints. Quantitative Finance, 1(5), pp. 489-501.
120. John, C. (2014). Portfolio Optimization by Heuristic Algorithms. PhD thesis, School of Computer Science and Electronic Engineering, University of Essex.
121. Jorion P. Value at Risk: A New Benchmark for Managing Derivatives Risk, Irwin Professional Publishers, 2000.
122. Kahneman, D., & Tversky, A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // Econometrica, Vol. 47, No 2, 1979, pp. 263-291.
123. Kahneman, D. Thinking, fast and slow. N. Y., Penguin, 2011.
124. Kennedy, J., & Eberhart, R. C., Particle Swarm Optimization, In Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks (ICNN), Perth, Australia, 1995, Vol. IV, pp. 1942-1948
125. Kim, Y. S., Rachev, S. T., Bianchi, M. L., & Fabozzi, F. J. Financial market models with Levy processes and time-varying volatility, Journal of Banking & Finance, Vol. 32, No 7, 2008, pp. 1963-1378.

126. Kim, Y., Giacometti, R., Rachev, S., Fabozzi, F., & Mignacca, D. (2012). Measuring Financial Risk and Portfolio Optimization with a Non-Gaussian Multivariate Model. *Annals of Operations Research*, Vol. 201(1), pp. 325-343.
127. Knowles, J.D. & D.W. Corne, Approximating the nondominated front using the Pareto archived evolution strategy,"*Evolutionary Computation*, vol. 8(2), 2000, pp. 149-172.
128. Kojien, R., van Nieuwerburgh S. Predictability of Returns and Cash Flows, *Annual Review of Financial Economics*, Vol. 3, 2011, pp. 467-491.
129. Konno, H., Yamakazi H. Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market, *Management Science*, Vol. 37, No. 5, 1991, pp. 519-531.
130. Koza, J. R., *Genetic Programming. On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1992.
131. Kuhn, H. W. & Tucker, A. W., *Nonlinear Programming*, In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley, California, University of California Press, 1951, pp. 481-492.
132. Kuo, W., Y., & Lin, T. C. Overconfident individual day traders: Evidence from the Taiwan futures market, *Journal of Banking & Finance*, Vol. 35, No. 9, 2013, pp. 3548-3561.
133. Larkin, F., & C. Ryan, Modesty is the best policy: Automatic discovery of viable forecasting goals in financial data, In *Applications of Evolutionary Computation*, ser. *Lecture Notes in Computer Science*, C. Di Chio, A. Brabazon, G. Di Caro, M. Ebner, M. Farooq, A. Fink, J. Grahlf, G. Greenfield, P. Machado, M. O'Neill, E. Tarantino, and N. Urquhart, Eds. Springer Berlin / Heidelberg, vol. 6025, 2010, pp. 202-211.
134. Laumanns, M., L. Thiele, K. Deb, & E. Zitzler, Combining convergence and diversity in evolutionary multi-objective optimization, *Evolutionary' Computation*, vol. 10, no 3, 2002, pp. 263-282.
135. Lewellen, J. Predicting returns with financial rations, *Journal of Financial Economics*, Vol. 74, 2004, pp. 209-235.
136. Li, J. & S. Taiwo, Enhancing financial decision making using multi-objective financial genetic programming, In *Proceedings of the 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, Vancouver, IEEE Press, (6-21 July 2006), pp. 7935-7942.
137. Li, X., & A. Krause, An evolutionary multiobjective optimization of trading rules in call markets, *Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, vol. 18, 2011, pp. 1-14.
138. Liagkouras, K. & Metaxiotis, K. (2014). A New Probe Guided Mutation Operator and its Application for Solving the Cardinality Constrained Portfolio Optimization Problem. *Expert Systems with Applications*, Vol. 41(14), pp. 6274- 6290.
139. Lin, D., Xiaoming, Li, & Mingiang, Li. A Genetic Algorithm for Solving Portfolio Optimization Problems with Transactions Costs and Minimum Transactions Lots, *Proceedings of the First International Conference on Advances in Natural Computation ICNC'05*. Publisher Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. 3, 2005, pp. 808-811.

140. Lin, C.-C. & Liu, Y.-T. (2008). Genetic Algorithms for Portfolio Selection Problems with Minimum Transaction Lots. *European Journal of Operational Research*, Vol. 185(1), pp. 393-404.
141. Liu Y. K., Wyu X. L., & Hao F. F. A new Chance-Variance optimization criterion for portfolio selection in uncertain decision systems, *Expert Systems With Applications*, Vol. 39, No 7, 2012, pp. 6514-6526.
142. Liu J., X. Jin, T. Wang, & Y. Yuan, (2015), Robust Multi-Period Portfolio Model Based on Prospect Theory and ALMV-PSO Algorithm, *Expert Systems with Applications*, Vol. 42, 2015, pp. 7252-7262.
143. Lin, D., S. Wang, & H. Yan, A multiobjective genetic algorithm for portfolio selection, 2001, working paper, Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and System Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China.
144. Lo A. W., & Repin D. V. The Psychophysiology of Real-Time Financial Risk Processing, *Journal of Cognitive Neuroscience*, Vol. 14, No 3, 2002, pp. 323-339.
145. Lo, A. W., Repin, D. V., & Steenbarger, B. N. Fear and Greed in Financial Markets: A Clinical Study of Day-Traders, *American Economic Review*, Vol. 95, No 2, 2005, pp. 352-359.
146. Lobo, M., Fazel, M., & Boyd, S. (2007). Portfolio Optimization with Linear and Fixed Transaction Costs. *Annals of Operations Research*, Vol. 152(1), pp. 341-365.
147. Lohpetch, D., & D. Corne, Multiobjective algorithms for financial trading: Multiobjective out-trades single-objective, In *Evolutionary Computation (CEC)*, IEEE Congress on, 2011, pp. 192 - 199.
148. Loraschi, A., A. Tettamanzi, M. Tomassini, & P. Verda, Distributed genetic algorithms with an application to portfolio selection problems, In *Artificial Neural Networks and Genetic Algorithms (ICANNGA'95)*, N. Steele and R. Albrecht, Eds. Wien: Springer, 1995, pp. 384-387.
149. Malkiel B., Saha A. Hedge Funds: Risk and Return, *Financial Analysts Journal*, Vol. 61, No 6, 2005, pp. 80-88.
150. Mansini, R., Ogryczak, W., & Speranza, M. G. (2014). Twenty years of linear programming based portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, Vol. 234(2), pp. 518 - 535. 60 years following Harry Markowitz's contribution to portfolio theory and operations research.
151. Mao, J. Models of Capital Budgeting, E-V vs. E-S, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 4, No5, 1970, pp. 657-675.
152. Mardle, S., S. Pascoe, and M. Tamiz, An investigation of genetic algorithms for the optimisation of multi-objective fisheries bioeconomic models, *International Transactions of Operations Research*, vol. 7, no 1, 2000, pp. 33-49.
153. Maringer, D. (2005). *Portfolio Management with Heuristic Optimization*, Volume 8 of *Advances in Computational Management Science*. Springer Verlag.
154. Maringer, D. & Kellerer, H. (2003). Optimization of Cardinality Constrained Portfolios with a Hybrid Local Search Algorithm. *OR Spectrum*, Vol. 25(4), pp. 481- 495.
155. Markowitz, H., Portfolio selection, *Journal of Finance*, 7, March, 1952, pages 77-91.

156. Marler, R. T., & Arora J. S., (2004), Survey of Multi-Objective Optimization Methods for Engineering, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 26, pp. 369-395 (2004). <https://doi.org/10.1007/s00158-003-0368-6>
157. Matlab, [Online]. <http://www.mathworks.com/products/Matlab/>
158. Merton, R. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica*, Vol. 41, No 5, 1973, pp. 867-887.
159. Michalewicz, Z. & C. Janikow. Genocop: A genetic algorithm for numerical optimization problems with linear constraints, *Communications of the ACM*, (12):118, 1996.
160. Miettinen, K., Neittaanmäki, P., Mäkelä, M.M., & Périaux, J., *Evolutionary Algorithms in Engineering and Computer Science*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, Weinheim, New York, Brisbane, Singapore, Toronto, 1999.
161. Miettinen, K., (1999), *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Boston / London / Dordrecht, 1999.
162. Miettinen, K., & M. Mäkelä. (2002) On Scalarizing Functions in Multiobjective Optimization. *OR Spectrum*, Vol. 24, pp. 193-213.
163. Mishra, S., Ganapati, P., Sukadev, M., & Ritanjali, M., *Application of Multi-Objective Evolutionary Algorithms in Computational Finance*, 2010, <http://dspace.nitrkl.ac.in/dspace/bitstream/2080/1333/1/Application+of+Multi.pdf>
164. Moon, Y., & Yao, T. A robust mean absolute deviation model for portfolio optimization. *Computer & Operations Research*, Vol. 38, 2011, pp. 1251-1258.
165. Morelli, M., Montagna, G., Nicosini, G., Treccani, M., Farina, D., & Amato, P. Pricing financial derivatives with neutral networks, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 338, No 1-2, 2004, pp. 160-165.
166. Morgan, J. P. (1996). *RiskMetrics (TM): Technical Document*, 4th ed. New York: Morgan Guaranty Trust Company.
167. Mukerjee, A., R. Biswas, K. Deb, & A. Mathur. Multi-objective evolutionary algorithms for the risk-return trade-off in bank-load management, *International Transactions in Operational Research*, vol. 9, no 5, 2002, pp. 583-597.
168. Mullei, S., & P. Beling. Hybrid Evolutionary Algorithms for a Multiobjective Financial Problem, In *Proceedings IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 4., 1998, pp. 3925-3930.
169. Nakaya, S., S. Wakabayashi, & T. Koide. An adaptive genetic algorithm for VLSI floor planning based on sequence-pair. In *2000 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS'2000)*, IEEE Press, vol. 3, 2000, pp. 65-68.
170. Nebro, A., F. Luna, E. Alba, D. B., D. J.J., & B. A., *Abyss: Adapting scatter search to multiobjective optimization*, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 12, no. 4, 2008, pp. 439-457.
171. Nebro, A., J. Durillo, F. Luna, B. Dorronsoro, & E. Alba, *Mo-cell: A cellular genetic algorithm for multiobjective optimization*, *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 24, no. 7, 2009, pp. 726-746.

172. Nelson C. R., Plosser C. I. Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implication, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 10, 1982, pp. 139-162.
173. Nelson, C. R., & Kang, H. Pitfalls in the Use of Time as an Axplanatory Variable in Regression, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 2, 1984, pp. 73-82.
174. O'Connor, N., & Madden, M. A neutral network approach to predicting stock exchange movements using external factors, *Knowledge-Based Systems*, Vol. 19(5), 2006, pp. 371-378.
175. Odean, T., Do investors trade too much? *American Economic Review*, Vol. 89, No. 5, 1999, pp. 1279-1298.
176. Oksendal, B. & Sulem, A. (2002). Optimal Consumption and Portfolio with Both Fixed and Proportional Transaction Costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(6), pp. 1765-1790.
177. Ong, C., H. J.J., & G. Tzeng, A novel hybrid model for portfolio selection, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 169(2), 2005, pp. 1195-1210.
178. Ortobelli, L. S., & Rachev S. T. Safety-first analysis and stable paretian approach to portfolio choice theory, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 34, No 9-11, 2001, pp. 1037-1072.
179. Ostermark, R. Predictability of Finnish and Swedish stock returns, *Omega*, Vol. 17, No 3, pp. 223-236.
180. Попчев, И., М. Петкова, & С. Златев. Елементи от анализа и управлението на портфейлния риск. Практическо ръководство. ЛКНТ N:7, ИИКТ-БАН, 2017, eISSN: 2367-8666, eISBN: 978-619-7320-04-6, 30 стр.
181. Попчев, И. Шест теми по управление на риска. Шест лекции по компютърни науки и технологии. (редактори: Г. Агре, В. Ангелова, П. Маринов), eISBN: 978-954-91700-8-5, eISSN: 2367-8666, ИИКТ-БАН, 2016.
182. Pehlivanoglu, Y. V. (2013). A new particle swarm optimization method enhanced with a periodic mutation strategy and neural networks. *IEEE transaction on evolutionary computation*, 17, pp. 436-452.
183. Penikas, H., & Proskurin S. How well do Analysts Predict Stock Prices? Evidence from Russia, 2013, Working papers by NRU Higher School of Economics, Seriies FE "Financial Economics", WP BRP 18/FE/2013.
184. Ponsich, A., Jaimes A. L., & Coello C. A. C., A Survey on Multiobjective Evolutionary Algorithms for the Solution of the Portfolio Optimization Problem and Other Finance and Economics Applications, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 17, no 3, 2013, pp. 321-344.
185. Radziukyniene, I., & A. Zilinskas, Approximation of Pareto set in multi objective portfolio optimization, In *World Congress on Engineering (Selected Papers)*, ser. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, 2008, pp. 551-562.
186. Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. Optimization of Conditional Value-at-Risk, *Journal of Risk*, 2000, Vol. 2, pp.21-41.
187. Roy, Arthur D. (1952). Safety First and the Holding of Assets. *Econometrica*. 1952 (July), pp. 431-450.

188. Ross, S. The arbitrage theory of capital asset pricing, *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, No 3, 1976, pp. 341-360.
189. Rothig, A., & Chiarella, C. Small traders in currency futures markets, *Journal of Futures Markets*, Vol. 31, No 9, 2011, pp. 898-914.
190. Runarsson, T. P., & Yao, H. (2000). Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 4, pp. 284-294.
191. Ruspini, E. H., & I. S. Zwir, Automated Qualitative Description of Measurements, In *Proceedings of the 16th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Venice, Italy, 1999.
192. Sarker R., Mohammadian M., & Yao X., *Evolutionary Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 2002
193. Schaerf, A. (2002). Local Search Techniques for Constrained Portfolio Selection Problems. *Computational Economics*, Vol. 20(3), pp. 177-190.
194. Schaffer, J. D., Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. In *Genetic Algorithms and their Applications: Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*, Lawrence Erlbaum. 1985, pp. 93-100.
195. Schaffer, J. D.: Some Experiments in Machine Learning Using Vector Evaluated Genetic Algorithms, Ph.D. thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN (1984).
196. Scherer, B. & Martin, R. (2005). *Modern Portfolio Optimization with NuOPT, S-PLUS®, and S+Bayes*. Springer.
197. Schlottmann, F., & D. Seese, Financial Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms: Recent Developments and Future Research Directions, In *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms*, C. A. Coello Coello and G. B. Lamont, Eds. Singapore: World Scientific, 2004, pp. 627-652.
198. Schlottmann, F. & D. Seese, *Handbook of Computational and Numerical Methods in Finance*, chapter Modern Heuristics for Finance Problems: A Survey of Selected Methods and Applications, Birkhäuser, 2004, pp. 331-360.
199. Schlottmann, F., & D. Seese, A hybrid genetic-quantitative method for risk-return optimization of credit portfolios, In Carl Chiarella and Eckhard Platen, editors, *Quantitative Methods in Finance 2001 Conference abstracts*, page 55, University of Technology, Sydney, 2001. Full paper: <http://www.business.uts.edu.au/finance/resources/qmf2001/Schlottmann.F.pdf>
200. Schlottmann, F., & D. Seese, A hybrid heuristic approach to discrete portfolio optimization, *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 47, no 2, 1 2004, pp. 373-399.
201. Schlottmann, F., & D. Seese, Finding constrained downside risk-return efficient credit portfolio structures using hybrid multi-objective evolutionary computation, In G. Bol, G. Nakhaeizadeh, S. Rachev, T. Ridder and K. Vollmer, editors, *Credit risk*, pages 231-266, Physica, Heidelberg, 2003.
202. Schlottmann, F., & D. Seese, Hybrid multi-objective evolutionary computation of constrained downside risk-return efficient sets for credit portfolios, In 8-th International Conference of the

- Society for Computational Economics: Computing in Economics and Finance, Aix-en-Provence, 2002, <http://www.cepremap.ens.fr/sce2002/papers/paper78.pdf>
203. Seppala, J. The diversification of currency loans: A comparison between safety-first and mean-variance criteria, *European Journal of Operational Research*, Vol. 74, No. 2, 1994, pp. 325-343.
 204. Sharpe, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, 1964, pp. 425-442.
 205. Sharpe, W. F. (1994). The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management* 21 (1), pp. 49-58.
 206. Shefrin, H., & Statman, M. (2000). Behavioral portfolio theory. *Journal of financial and quantitative analysis*, 35, pp. 127-151.
 207. Shoaf, J. & J. Foster, The efficient set GA for stock portfolios, In *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Evolutionary Computation (CEC'98)*. Anchorage, Alaska: IEEE Press, 1998, pp. 354-359.
 208. Shoaf, J., & J. Foster, A Genetic Algorithm Solution to the Efficient Set Problem: A Technique for Portfolio Selection Based on the Markowitz Model, In *Proceedings of the Decision Sciences Institute Annual Meeting*, Orlando, Florida, 1996, pp. 571-573.
 209. Shreve, S. E. & Soner, H. M. (1994). Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs. *The Annals of Applied Probability*, Vol. 4(3): pp. 609-692.
 210. Simon, H. A. Behavioral Model of Rational Choice, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 69, No. 1, 1955, pp. 99-118.
 211. Skolpadungket, P., Dahal, K., & Harnpornchai, N. (2007). Portfolio Optimization using Multi-objective Genetic Algorithms. In *Evolutionary Computation, 2007. CEC 2007. IEEE Congress on*, pp. 516-523.
 212. Soderlind, P. Predicting stock price movements: regressions versus economists, *Applied Economic Letters*, 2010, Vol. 17, pp. 869-874.
 213. Soyster, A. L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, Vol. 21, pp. 1154-1157.
 214. Soleimani, H., Golmakani, H. R., & Salimi, M. H. (2009). Markowitz-based Portfolio Selection with Minimum Transaction Lots, Cardinality Constraints and Regarding Sector Capitalization using Genetic Algorithm. *Expert Systems with Applications*, vol. 36, no 3, pp. 5058 - 5063.
 215. Srinivas, N. & K. Deb, Multiobjective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, vol. 2, no 3, 1994, pp. 221-248.
 216. Stoilov, T., & K. Stoilova. Portfolio Risk Management Modelling by Bi-level Optimization., Chapter 5 of *Handbook in Decision Making*, vol.2 "Risk Management in Decision Making", ed. J. Lu, L. Jain, G. Zhang, *Intelligent systems reference library* vol.33. Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, ISSN1868-4394, ISBN 978-3-642-25755-1, 2012, pp. 91-110.
 217. Stoyanov, S., Rachev, S., & Fabozzi, F. (2013). Sensitivity of Portfolio VaR and CVaR to Portfolio Return Characteristics. *Annals of Operations Research*, Vol. 205(1), pp. 169-187.
 218. Storn, R., & K. V. Price, Differential evolution – A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous Spaces, *J. Global Optimization*, vol. 11, 1997, pp. 341-359.

219. Stracca, I. Behavioral Finance and Asset Prices: Where Do We Stand?, *Journal of Economic Psychology*, Vol. 25, 2004, pp. 373-405.
220. Streichert, F., Ulmer, H., & Zell, A. (2004a). Comparing Discrete and Continuous Genotypes on the Constrained Portfolio Selection Problem. In Deb, K., editor, *Genetic and Evolutionary Computation - GECCO 2004*, volume 3103 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 1239-1250.
221. Streichert, F., Ulmer, H., & Zell, A. (2004b). Evaluating a Hybrid Encoding and Three Crossover Operators on the Constrained Portfolio Selection Problem. In *Congress on Evolutionary Computation, CEC2004*, vol. 1, 2004, pp. 932-939
222. Streichert, F., Ulmer, H., & Zell, A. (2004c). Evolutionary Algorithms and the Cardinality Constrained Portfolio Optimization Problem. Vol. 2003 of *Operations Research Proceedings*, Springer Berlin Heidelberg. pp. 253-260.
223. Subbu, R., P. Bonissone, N. Eklund, K. Bollapragada, S. & Chalermkraivuth, Multiobjective Financial Portfolio Design: A Hybrid Evolutionary Approach, In *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC'2005)*, vol. 2. Edinburgh, Scotland: IEEE Service Center, September 2005, pp. 1722-1729.
224. Tapia M. C. and Coello C. A. C., Applications of multi-objective evolutionary algorithms in economics and finance: A survey, In *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, IEEE, 2007, pp. 532-539.
225. Tay, F. E. H., & Lijuan, C. Application of support vector machines in financial time series forecasting, *Omega: The International Journal of Management Science*, Vol. 29, No 4, 2001, pp. 309-317.
226. Tedeschi, G., Iori G., & Gallegati, M. Herding Effects in Order Driven Markets: The Rise and Fall of Gurus, *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 81, 2012, pp. 82-96.
227. Teive, R., R. Guder, & C. Sebba, Risk management in the energy trading activity - an approach by using multi objective genetic algorithm and multi criteria theory, In *Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America (T D-LA)*, 2010 IEEE/PES, 2010, pp. 504 -510.
228. Torczon, V.J. (1997). On the convergence of pattern search algorithms, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 7 (1), pp. 1-25.
229. Tversky A., Kahneman D. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases, *Science*, Vol. 185, No 4157, 1974, pp. 1124-1131.
230. Tversky, A., & Kahneman D. The framing of decisions and the psychology of choice, *Science*, Vol. 211, No 4481, 1991, pp. 453-458.
231. Tversky, A., & Kahneman, D. Advances in Prospect Theory Cumulative Representation of Uncertainty, *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 5, No 4, 1992, pp. 297-323.
232. Vasicek, O. An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No 2, 1977, pp. 177-188.

233. Vassilev, V., Genova K., & Vassileva M. (2005). A Brief Survey of Multicriteria Decision Making Methods and Software Systems. *Cybernetics and Information Technologies*, vol.5, No 1, pp. 3-14.
234. Vedarajan G., L. C. Chan, & D. E. Goldberg. Investment Portfolio Optimization using Genetic Algorithms. In J. R. Koza, editor, *Late Breaking Papers at the Genetic Programming 1997 Conference*, pp. 255-263, Stanford University, California, 13-16 July 1997. Stanford Bookstore.
235. Venezia I., Nashikkar A., Shapira Z. Firm Specific & Macro Herding by Professional and Amateur Investors and Their Effects on Market Volatility, *Journal of Banking & Finance*, Vol. 35, 2011, pp. 1599-1609.
236. Vilfredo Pareto, 1906 *Manuale di Economia Politica*, Società Editrice Libreria, https://books.google.bg/books/about/Manuale_di_economia_politica.html?id=_oJIAAAAYAAJ&redir_esc=y
237. Vijayalakshmi Pai, G. and Michel, T. (2009). Evolutionary Optimization of Constrained k-Means Clustered Assets for Diversification in Small Portfolios. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 13(5), pp. 1030-1053.
238. Witte, B.-C., "Fund Managers – Why the Best Might Be the Worst: On the Evolutionary Vigor of Risk-Seeking Behavior", *Economics*, vol. 6, 2012, <http://dx.doi.org/10.5018/economics-ejournal.ja.2012-24>
239. Woodside-Oriakhi, M., Lucas, C., and Beasley, J. (2011). Heuristic Algorithms for the Cardinality Constrained Efficient Frontier. *European Journal of Operational Research*, Vol. 213(3), pp. 538-550.
240. Yan, W., R. Miao, & S. Li, Multi-period semi-variance portfolio selection: Model and numerical solution, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 194, no. 1, 2007, pp. 128-134.
241. Yan W. Continuous-time safety-first portfolio selection with jump-diffusion processes, *International Journal of Systems Science*. Vol. 43, No 4, 2012, pp. 622-628.
242. Yang, X. S., *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms*, Luniver Press, (2008).
243. Yang, X. S., Firefly algorithms for multimodal optimization, In: *Stochastic Algorithms: Foundations and Applications, SAGA 2009, Lecture Notes in Computer Science*, 5792, 2009, pp. 169-178.
244. Yang, X. S., Firefly algorithm, Levy flights and global optimization, In: *Research and Development in Intelligent Systems XXVI*, (Eds M. Bramer et al.), Springer, London, 2010, pp. 209-218.
245. Yu, Wen Ci. (1979a), Positive basis and a class of direct search techniques. *Scientia Sinica [Zhongguo Kexue]*, pp. 53-68.
246. Yu, Wen Ci. (1979b), The convergent property the simplex evolutionary technique. *Scientia Sinica [Zhongguo Kexue]*, pp. 69-77.
247. Zhang, Q., & H. Li, MKEA/D: a Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 11, no. 6, 2007, pp. 712-731.

248. Zhang, Q., H. Li, D. Maringer, & T. E.P.K., MKEA/D with NBI-style Tchebycheff approach for portfolio management, In IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC'2010), Barcelona, Spain, July 2010, pp. 1-8.
249. Zitzler, E., M. Laumanns, & L. Thiele, SPEA2; Improving the strength Pareto evolutionary algorithm. In K. Giannakoglou et al., Eds. EUROGEN 2001. Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems, Athens, Greece, 2002, pp. 95-100.
250. Zitzler, E. & L. Thiele, Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach," IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 3(4), 1999, pp. 257-271.
251. Zitzler, E., & S. Künzli, Indicator-based selection in multiobjective search, In Parallel Problem Solving from Nature (PPSN VIII), X. Yao et al., Eds. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2004, pp. 832-842.
252. Zhu, S., & Fukushima, M. (2009). Worst-case conditional value-at-risk with application to robust portfolio management. Operations Research, Vo. 57, pp. 1155-1168.
253. Zymler, S., Kuhn, D., & Rustem, b. (2013). Worst-case value at risk of nonlinear portfolios. Management science, 59, pp. 172-188.

Приложение 1.**Класификация на инвеститорите (вземашите решения) според признака „използвана мярка на риск“**

Доколкото бъдещата стойност на инвестицията i се явява случайна величина, то бъдещата стойност на портфейла W_{t+1} се явява случайна величина и инвеститора може при вземане на решение да използва различни целеви функции, основани на числените характеристики на тези случайни величини. Различават се две групи мерки на риска:

1. Характеристики на средното отклонение

► математическо очакване $M[W_{t+1}]$ (очакваната средна стойност) бъдещата стойност на портфейла W_{t+1} в момента време $t+1$;

► дисперсия на бъдещата стойност на портфейла

$$D[W_{t+1}] = M(W_{t+1} - M[W_{t+1}])^2,$$

► средноквадратично отклонение на бъдещата стойност на портфейла:

$$\sigma[W_{t+1}] = \sqrt{D[W_{t+1}]},$$

► полудисперсия на бъдещата стойност на портфейла

$$D_+[W_{t+1}] = (W_{t+1} - M[W_{t+1}])_+^2, \text{ където } x_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

► абсолютно отклонение и полуотклонение на бъдещата стойност на портфейла

$$\delta[W_{t+1}] = |W_{t+1} - M[W_{t+1}]|,$$

$$\delta_+[W_{t+1}] = \sqrt{M(\min[W_{t+1} - M[W_{t+1}], 0])^2},$$

2. Прагови характеристики

► вероятността затова, че бъдещата стойност на портфейла в момента време $t+1$ няма да падне под някакъв определен праг β от притежавания в момента време t капитал W_t :

$$P_t = P\{W_{t+1} \geq \beta W_t\},$$

► Стойност под риск (Value-at-Risk- $Var\alpha$) – представлява квантил на нивото α на стойността на портфейла W_{t+1} , т.е. такава стойност на бъдещата стойност на портфейла W_{t+1} , чиято вероятност от намаляване стойността на портфейла под тази величина е по-малка от α :

$$Var\alpha[W_{t+1}] = \sup\{l : P(W_{t+1} \leq l) \leq \alpha\},$$

► Условна стойност под риск (Conditional Value-at-Risk, Expected Shortfall - $CVaR\alpha$) – представлява математическото очакване на бъдещата стойност на портфейла в случая, когато стойността на портфейла се понижава под нивото на $Var\alpha$:

$$CVaR\alpha = M[W_{t+1} | W_{t+1} < Var\alpha].$$

Приложение 2.**Исторически данни за трите актива за десетгодишен период**

	Облигации	Акции	Депозити
Март 2008	3.562000	830.659973	100.93
Април 2008	3.486000	899.570007	101.01
Май 2008	3.751000	890.700012	101.1
Юни 2008	4.025000	778.390015	101.18
Юли 2008	3.942000	753.000000	101.27
Август 2008	3.942000	777.250000	101.35
Септември 2008	3.847000	697.710022	101.44
Октомври 2008	3.748000	593.929993	101.53
Ноември 2008	3.937000	548.700012	101.61
Декември 2008	2.883000	546.909973	101.7
Януари 2009	2.203000	511.730011	101.79
Февруари 2009	2.833000	457.809998	101.87
Март 2009	2.963000	476.829987	101.96
Април 2009	2.659000	542.090027	102.05
Май 2009	3.167000	570.330017	102.13
Юни 2009	3.505000	545.340027	102.21
Юли 2009	3.589000	589.179993	102.3
Август 2009	3.565000	632.559998	102.39
Септември 2009	3.399000	660.979980	102.47
Октомври 2009	3.290000	630.880005	102.56
Ноември 2009	3.403000	646.520020	102.65
Декември 2009	3.231000	686.369995	102.74
Януари 2010	3.859000	654.799988	102.82
Февруари 2010	3.633000	657.369995	102.91
Март 2010	3.617000	702.260010	103.
Април 2010	3.859000	679.219971	103.08
Май 2010	3.695000	632.580017	103.17
Юни 2010	3.259000	616.380005	103.25
Юли 2010	2.929000	661.429993	103.34
Август 2010	2.934000	635.789978	103.43
Септември 2010	2.491000	673.169983	103.52
Октомври 2010	2.546000	698.330017	103.6
Ноември 2010	2.588000	662.950012	103.69
Декември 2010	2.903000	696.500000	103.78
Януари 2011	3.377000	721.039978	103.87
Февруари 2011	3.428000	735.859985	103.96
Март 2011	3.464000	718.450012	104.05
Април 2011	3.498000	732.460022	104.14
Май 2011	3.312000	715.049988	104.22

	Облигации	Акции	Депозити
Юни 2011	3.015000	704.510010	104.31
Юли 2011	3.147000	675.989990	104.4
Август 2011	2.792000	602.159973	104.48
Септември 2011	2.202000	545.909973	104.57
Октомври 2011	1.883000	587.400024	104.66
Ноември 2011	2.029000	587.169983	104.75
Декември 2011	2.128000	593.520020	104.84
Януари 2012	1.951000	617.169983	104.93
Февруари 2012	1.807000	639.409973	105.02
Март 2012	2.033000	643.760010	105.11
Април 2012	2.200000	621.109985	105.2
Май 2012	1.919000	577.299988	105.29
Юни 2012	1.521000	613.119995	105.37
Юли 2012	1.643000	633.090027	105.46
Август 2012	1.492000	649.289978	105.55
Септември 2012	1.565000	641.469971	105.64
Октомври 2012	1.620000	651.309998	105.73
Ноември 2012	1.715000	672.049988	105.82
Декември 2012	1.644000	691.359985	105.91
Януари 2013	1.842000	699.270020	106.
Февруари 2013	2.010000	702.450012	106.09
Март 2013	1.850000	712.460022	106.18
Април 2013	1.885000	723.780029	106.27
Май 2013	1.658000	737.479980	106.36
Юни 2013	2.168000	708.380005	106.44
Юли 2013	2.521000	752.760010	106.54
Август 2013	2.601000	748.580017	106.63
Септември 2013	2.837000	775.630005	106.72
Октомври 2013	2.646000	804.010010	106.81
Ноември 2013	2.589000	804.729980	106.9
Декември 2013	2.781000	812.109985	106.99
Януари 2014	3.028000	787.130005	107.08
Февруари 2014	2.677000	815.880005	107.17
Март 2014	2.612000	834.429993	107.26
Април 2014	2.743000	839.909973	107.35
Май 2014	2.660000	853.520020	107.45
Юни 2014	2.500000	843.099976	107.53
Юли 2014	2.550000	814.210022	107.62
Август 2014	2.582000	838.080017	107.71
Септември 2014	2.393000	842.359985	107.8
Октомври 2014	2.475000	818.349976	107.89
Ноември 2014	2.325000	844.679993	107.99

	Облигации	Акции	Депозити
Декември 2014	2.157000	843.030029	108.08
Януари 2015	2.197000	908.130005	108.17
Февруари 2015	1.674000	972.330017	108.26
Март 2015	2.014000	979.489990	108.35
Април 2015	1.892000	980.919983	108.45
Май 2015	2.067000	987.799988	108.54
Юни 2015	2.125000	951.630005	108.62
Юли 2015	2.418000	988.119995	108.72
Август 2015	2.194000	888.840027	108.81
Септември 2015	2.165000	869.859985	108.9
Октомври 2015	2.039000	933.169983	108.99
Ноември 2015	2.175000	963.549988	109.09
Декември 2015	2.229000	897.309998	109.18
Януари 2016	2.230000	875.130005	109.27
Февруари 2016	1.930000	847.700012	109.37
Март 2016	1.749000	854.469971	109.46
Април 2016	1.778000	874.500000	109.55
Май 2016	1.816000	884.070007	109.65
Юни 2016	1.830000	850.840027	109.73
Юли 2016	1.429000	881.299988	109.83
Август 2016	1.494000	878.000000	109.92
Септември 2016	1.594000	881.080017	110.01
Октомври 2016	1.600000	887.619995	110.11
Ноември 2016	1.847000	883.340027	110.2
Декември 2016	2.414000	931.030029	110.3
Януари 2017	2.511000	923.200012	110.39
Февруари 2017	2.487000	949.419983	110.48
Март 2017	2.435000	987.650024	110.57
Април 2017	2.380000	1012.450012	110.67
Май 2017	2.291000	1020.820007	110.77
Юни 2017	2.229000	991.200012	110.85
Юли 2017	2.309000	999.909973	110.95
Август 2017	2.305000	997.090027	111.04
Септември 2017	2.127000	1036.599976	111.14
Октомври 2017	2.341000	1072.000000	111.23
Ноември 2017	2.398000	1039.650024	111.32
Декември 2017	2.383000	1034.109985	111.42
Януари 2018	2.433000	1067.699951	111.51
Февруари 2018	2.743000	1027.339966	111.61

Приложение 3.**Исторически данни за шест актива за период от 10 години и 11 месеца**

	Швейцарски акции	Френски акции	Японски акции	ДКЦ	Депозит 1% отрицателна лихва	Американски акции
Oct 2007	9022.55	1044.67	16737.63	4.475	998.3	1549.38
Nov 2007	8891.47	1000.57	15680.67	3.972	997.44	1481.14
Dec 2007	8645.04	995.23	15307.78	4.035	996.58	1468.36
Jan 2008	8318.82	864.47	13592.47	3.639	995.78	1378.55
Feb 2008	7815.98	852.95	13603.02	3.534	994.92	1330.63
Mar 2008	7403.88	833.82	12525.54	3.432	994.09	1322.7
April 2008	7494.30	889.37	13849.99	3.759	993.24	1385.59
May 2008	7665.80	891.92	14338.54	4.046	992.41	1400.38
June 2008	7555.70	782.98	13481.38	3.979	991.56	1280
July 2008	6849.67	759.28	13376.81	3.979	990.7	1267.38
Aug 2008	7078.22	782.81	13072.87	3.813	989.88	1282.83
Sep 2008	7227.75	690.88	11259.86	3.827	989.02	1166.36
Oct 2008	6727.63	589.09	8576.98	3.97	988.2	968.75
Nov 2008	6233.88	551.7	8512.27	2.957	987.35	896.24
Dec 2008	5527.58	544.92	8859.56	2.244	986.5	903.25
Jan 2009	5756.09	518.79	7994.05	2.844	985.73	825.88
Feb 2009	5166.96	469.65	7568.42	3.041	984.88	735.09
Mar 2009	4438.27	478.46	8109.53	2.685	984.06	797.87
April 2009	5014.90	537.4	8828.26	3.124	983.21	872.81
May 2009	5318.34	561.08	9522.5	3.465	982.39	919.14
June 2009	5432.22	542.3	9958.44	3.523	981.55	919.32
July 2009	5472.94	589.25	10356.83	3.501	980.7	987.48
Aug 2009	5967.43	629.67	10492.53	3.401	979.89	1020.62
Sep 2009	6128.17	659.66	10133.23	3.307	979.04	1057.08
Oct 2009	6255.17	632.16	10034.74	3.392	978.23	1036.19
Nov 2009	6291.22	640.5	9345.55	3.201	977.38	1095.63
Dec 2009	6372.08	683.76	10546.44	3.843	976.54	1115.1
Jan 2010	6631.44	658.88	10198.04	3.609	975.78	1073.87
Feb 2010	6496.33	651.97	10126.03	3.595	974.94	1104.49
Mar 2010	6791.48	698.51	11089.94	3.833	974.13	1169.43
April 2010	6888.92	681.3	11057.4	3.663	973.29	1186.69
May 2010	6607.71	635.56	9768.7	3.301	972.48	1089.41
June 2010	6316.60	625	9382.64	2.951	971.64	1030.71
July 2010	5981.66	656.75	9537.3	2.907	970.81	1101.6
Aug 2010	6321.64	633.53	8824.06	2.477	970	1049.33
Sep 2010	6332.43	671.85	9369.35	2.517	969.16	1141.2
Oct 2010	6284.17	692.85	9202.45	2.612	968.35	1183.26
Nov 2010	6504.72	657.99	9937.04	2.797	967.52	1180.55

Dec 2010	6409.70	690.8	10228.92	3.305	966.69	1257.64
Jan 2011	6493.88	716.51	10237.92	3.378	965.94	1286.12
Feb 2011	6555.26	732.81	10624.09	3.414	965.1	1327.22
Mar 2011	6619.36	713.16	9755.1	3.454	964.3	1325.83
April 2011	6439.91	727.91	9849.74	3.296	963.47	1363.61
May 2011	6544.67	714.07	9693.73	3.05	962.67	1345.2
June 2011	6496.47	704.54	9816.09	3.158	961.84	1320.64
July 2011	6237.81	668.43	9833.03	2.805	961.01	1292.28
Aug 2011	5546.94	600.44	8955.2	2.218	960.21	1218.89
Sep 2011	5531.54	559.28	8700.29	1.924	959.38	1131.42
Oct 2011	5495.69	601.81	8988.39	2.175	958.58	1253.3
Nov 2011	5588.57	587.17	8434.61	2.068	957.76	1246.96
Dec 2011	5681.57	592.85	8455.35	1.871	956.93	1257.6
Jan 2012	6050.93	613.75	8802.51	1.799	956.16	1312.41
Feb 2012	6069.91	640.73	9723.24	1.977	955.34	1365.68
Mar 2012	6128.28	642.31	10083.56	2.216	954.54	1408.47
April 2012	6299.38	612.58	9520.89	1.915	953.72	1397.91
May 2012	6108.77	576.81	8542.73	1.581	952.92	1310.33
June 2012	5777.47	611.81	9006.78	1.659	952.1	1362.16
July 2012	6109.41	632.17	8695.06	1.492	951.28	1379.32
Aug 2012	6407.30	650.61	8839.91	1.562	950.49	1406.58
Sep 2012	6437.66	642.38	8870.16	1.637	949.67	1440.67
Oct 2012	6610.91	651.86	8928.29	1.686	948.88	1412.16
Nov 2012	6660.25	670.29	9446.01	1.606	948.06	1416.18
Dec 2012	6838.70	680.87	10395.18	1.756	947.25	1426.19
Jan 2013	7020.46	698.74	11138.66	1.985	946.51	1498.11
Feb 2013	7420.35	703.59	11559.36	1.888	945.7	1514.68
Mar 2013	7601.99	713.08	12397.91	1.852	944.91	1569.19
April 2013	7899.30	726.81	13860.86	1.675	944.09	1597.57
May 2013	7902.21	740.84	13774.54	2.164	943.31	1630.74
June 2013	7780.98	703.84	13677.32	2.478	942.49	1606.28
July 2013	7741.07	751.71	13668.32	2.593	941.68	1685.73
Aug 2013	7963.93	741.41	13388.86	2.749	940.9	1632.97
Sep 2013	7891.62	776.13	14455.8	2.615	940.09	1681.55
Oct 2013	8059.01	803.48	14327.94	2.542	939.3	1756.54
Nov 2013	8221.80	804.64	15661.87	2.741	938.5	1805.81
Dec 2013	8257.32	809.95	16291.31	3.026	937.69	1848.36
Jan 2014	8270.46	786.58	14914.53	2.668	936.96	1782.59
Feb 2014	8107.02	829.01	14841.07	2.658	936.15	1859.45
Mar 2014	8281.01	831.47	14827.83	2.723	935.37	1872.34
April 2014	8457.27	841.51	14304.11	2.648	934.57	1883.95
May 2014	8442.71	852.19	14632.38	2.457	933.79	1923.57
June 2014	8688.96	840.88	15162.1	2.516	932.98	1960.23

July 2014	8607.97	814.84	15620.77	2.556	932.18	1930.67
Aug 2014	8304.04	836.93	15424.59	2.343	931.4	2003.37
Sep 2014	8746.97	844.22	16173.52	2.508	930.6	1972.29
Oct 2014	8789.53	819.48	16413.76	2.335	929.83	2018.05
Nov 2014	8751.67	850.54	17459.85	2.194	929.02	2067.56
Dec 2014	9146.18	839.52	17450.77	2.17	928.22	2058.9
Jan 2015	8938.85	906.28	17674.39	1.675	927.5	1994.99
Feb 2015	8429.20	973.01	18797.94	2.002	926.7	2104.5
Mar 2015	9055.69	984.5	19206.99	1.934	925.93	2067.89
April 2015	9137.26	983.71	19520.01	2.046	925.13	2085.51
May 2015	9095.82	983.52	20563.15	2.095	924.36	2107.39
June 2015	9267.44	940.56	20235.73	2.335	923.57	2063.11
July 2015	8908.99	987.83	20585.24	2.205	922.77	2103.84
Aug 2015	9468.97	900.51	18890.48	2.2	922	1972.18
Sep 2015	8621.27	858.55	17388.15	2.06	921.21	1920.03
Oct 2015	8510.56	941.71	19083.1	2.151	920.44	2079.36
Nov 2015	8936.08	961.87	19747.47	2.218	919.65	2080.41
Dec 2015	8993.24	906.33	19033.71	2.269	918.86	2043.94
Jan 2016	8656.31	874.3	17518.3	1.931	918.12	1940.24
Feb 2016	8310.99	849.95	16026.76	1.74	917.33	1932.23
Mar 2016	7962.22	864.41	16758.67	1.786	916.56	2059.74
April 2016	7688.34	869.89	16666.05	1.819	915.77	2065.3
May 2016	7977.77	884.17	17234.98	1.834	915.01	2096.95
June 2016	8185.53	846.47	15575.92	1.488	914.22	2098.86
July 2016	8085.21	876.01	16569.27	1.458	913.43	2173.6
Aug 2016	8011.24	875.95	16887.4	1.568	912.67	2170.95
Sep 2016	8142.64	881.48	16449.84	1.608	911.89	2168.27
Oct 2016	8166.32	881.79	17425.02	1.834	911.13	2126.15
Nov 2016	7761.34	884.62	18308.48	2.368	910.34	2198.81
Dec 2016	7779.11	933.89	19114.37	2.479	909.56	2238.83
Jan 2017	8316.18	916.7	19041.34	2.451	908.85	2278.87
Feb 2017	8329.17	942.98	19118.99	2.358	908.07	2363.64
Mar 2017	8634.70	986.27	18909.26	2.396	907.31	2362.72
April 2017	8633.86	1010.93	19196.74	2.282	906.53	2384.2
May 2017	8868.56	1019.99	19650.57	2.196	905.78	2411.8
June 2017	9024.92	986.22	20033.43	2.302	905	2423.41
July 2017	9009.81	995.78	19925.18	2.292	904.22	2470.3
Aug 2017	9122.68	991.62	19646.24	2.121	903.46	2471.65
Sep 2017	8941.62	1036.54	20356.28	2.326	902.68	2519.36
Oct 2017	9242.15	1068.23	22011.61	2.376	901.93	2575.26
Nov 2017	9267.82	1039.35	22724.96	2.417	901.16	2584.84
Dec 2017	9274.55	1032.74	22764.94	2.405	900.38	2673.61
Jan 2018	9478.92	1063	23098.29	2.72	899.68	2823.81

Feb 2018	9290.92	1028.34	22068.24	2.868	898.9	2713.83
Mar 2018	8792.38	1011.72	21454.3	2.741	898.16	2640.87
April2018	8630.93	1063.55	22467.87	2.936	897.38	2648.05
May 2018	8896.28	1049.06	22201.82	2.822	896.63	2705.27
June 2018	8618.54	1044.81	22304.51	2.849	895.86	2718.37
July 2018	8529.59	1078.16	22553.72	2.964	895.09	2816.29
Aug 2018	9155.57	1058.73	22865.15	2.853	894.49	2901.52