Резюмета на научните публикации, с които гл. ас. д-р Иван Георгиев участва в конкурс за академичната длъжност "доцент" по професионално направление 4.5 Математика, специалност 01.01.09. "Изчислителна математика (научни пресмятания)"

При прилагане на метода на крайните елементи към елиптични гранични задачи от втори ред се налага решаване на системи линейни алгебрични уравнения със симетрични и положително определени матрици с разредена структура. Методът на спрегнатия градиент с преобуславяне (PCG) се е наложил, като най-добър за итерационно решаване на такива системи. Скоростта на сходимост на PCG метода зависи от спектралното число на обусловеност на преобусловената матрица на системата. От особена важност са преобусловители, за които числото на обусловеност е равномерно ограничено по-отношение на дискретизационния параметър и по отношение на коефициентите на диференциалната задача.

1. *Неконформни крайни елементи на Ранахер-Турек*

Преобусловители, построени чрез многонивово обобщение на двунивов метод на крайните елементи са в основата на итерационни методи с оптимална изчислителна сложност (линейно пропорционална на размерността на системата). Такива методи се основават на (рекурсивно) двунивово разделяне на крайноелементното пространството. Основна роля за получаването на равномерни оценки за скоростта на сходимост играе константата γ в така-нареченото усилено неравенство на Коши-Буняковски-Шварц. Тя е свързана с абстрактния ъгъл между двете подпространства на разделянето. Общо изискване в теория на оптималните двунивови преобусловители е да се построят две вложени крайноелементни пространства $V_H \subset V_h$, които съответстват на две последователни сгъстявания на мрежата. Това условие не е в сила при неконформните методи, където се налага конструирането на по-специални разделяния.
В работи [P1-P4] се предложени и изследвани два вида йерархични двунивови разделяния на крайноелементни пространства, получени при дискретизация на двумерни и тримерни скаларни елиптични задачи с неконформни крайни елемени на Ранахер-Турек. Получени са равномерни оценки за константата γ по отношение на мрежовия параметър h и възможни скокове на коефициентите. На базата на получените двунивови методи са конструирани алгебрични многонивови итерационни преобусловители (AMLI). Показано е, че адитивният и мултипликативният варианти на метода имат оптимална изчислителна сложност и скорост на сходимост. Резултатите от числените експерименти потвърждават получените теоритични резултати.

2. *Многонивови методи за прекъснат метод на Гальоркин за елиптични задачи със силно нееднородни коефициенти*

В класическата теорията на оптималните многонивови методи се предполага, че скоковете на коефициентите са само по граници между елементи от (най-)грубото геометрично разделяне на областта. Такива предположения обикновено се правят за многонивови, мултигрид и методи използващи разделяне на областта на подобласти.

Има множество числени тестове, които потвърждават, че сходимостта на съответните методи се влошава, ако това условие е нарушено. В същото време, при голям брой модели, комбиниращи няколко физични процеса с различни характеристики при различни мащаби за силно хетерогенни среди, големи скокове на коефициентите се появяват и на най-фината мрежа. Неконформните крайни елементи и прекъснатите методи на Гальоркин са подходящ апарат за дискретизация на такива задачи.
В [P6] и [P11] са изследвани двунивови методи за преобуславяне на системи уравнения получени при дискретизация с прекъснат метод на Гальоркин (DG) на задачи с големи скокове на коефициентите съгласувани с най-финната мрежа. Дифузионната матрица е от вида **a**(x)=k(x)I, където с I е означена единичната матрица. Предложен е обобщен йерархичен базис и е изследвано числено поведението на константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц. В тестовите примери са използвани равномерно разпределени случайни стойности на коефициента на дифузия k(x).

3. Многонивови методи за анизитропни елиптични задачи

Особен интерес представляват методите за ефективно решаване на анизотропни гранични задачи. Анизтропията може да бъде коефициентна, индуцирана от компонентите в дуфузионната матрица **a**(x). Също така може да бъде и мрежова, в термините на ъглите и/или страните на елементите от крайноелементното разделяне на областта. Съществуват оптимални многонивови методи за решаване на анизотропни скаларни елиптични задачи, дискретизирани с линейни конформни и неконформни крайни елементи. При дискретизации с елементи от по-висок ред на силно анизотропни задачи възникват съществени проблеми със сходимостта.
В [P10] е направен сравнителен анализ на различни подходи за конструиране на йерархично двунивово разделяне на крайноелементното пространство в случая на квадратични конформни елементи. Разгледан е и алтернативен подход за конструиране на двунивово разделяне, основан на апроксимиране на допълнението на Шур с разредена матрица, получена при асемблиране на локалните макроелементни допълнения на Шур.
В [P15] е изследван алгебричен многонивов итерационен преобусловител от тип Semi-Coarsening (SC-AMLI) за анизотропни скаларни елиптични задачи в тримерни многостенни области дискретизирани с трилинейни конформнни крайни елементи. Получени са равномерни оценки за числото на обусловеност, както по отношение на мрежовия параметър така и по-отношение на коефициентите на анизотропия, като доминиращото направление на анизотропия може да се променя в различни части на областта. Предложен е съставен блочен преобусловител, при който за решаване на система с горния ляв блок в две на две разделянето на матрицата на коравина се прилага отново „semi-coarsening" подход в перпендикулярно на текущото направление. По този начин задачата за първия блок се свежда до определен брой задачи с двумерна структура.

4. Апроксимация на матрицата на коравина в класа на М-матриците

Модифицираната непълна факторизация на Холецки от нулев ред (MIC(0)) е широко използван метод за пробуславяне на задачи със скок на коефициентите. Методът не е оптимален по отношение на мрежовия параметър но ефективността му за задачи със скокове на коефициените и сравнително лесната му реализация го правят предпочитан при неособено големи задачи. За прилагане на MIC(0) факторизация е необходимо матрицата да е М-матрица. В [P7] са изследвани различни подходи за приближения на матрицата на коравина в класа на М-матриците. Получените резултати са приложени за конструиране на ефективни MIC(0) преобусловители за анизотропни елиптични задачи със скок на коефициентите, дискретизирани с неконформни крайни елементи. Получени са оценки за числото на обусловеност и изчислителната сложност. Проведените числени експерименти потвърждават получените теоретични резултати и показват стабилното поведение на преобусловителя при големи скокове на коефициентите и вариране на коефициента на анизотропия.

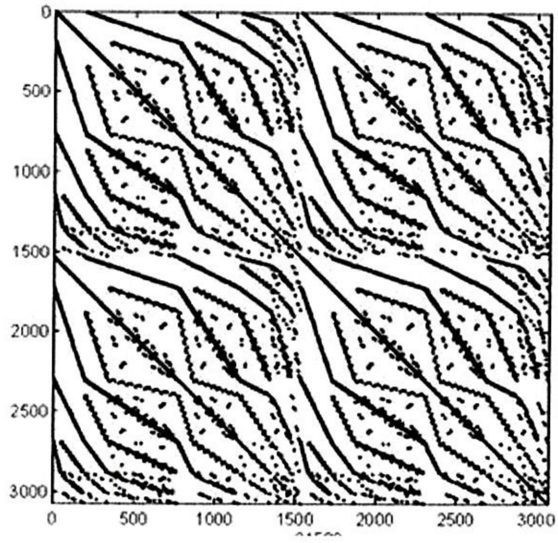
5. *Прекъснат метод на Гальоркин за уравненията на Ламе в случая на почти несвиваеми материали*

При дискретизация на уравненията на Ламе, описващи напрегнатото и деформирано състояние на линейно еластично тяло, с конформни крайни елементи от ниска степен в случая на почти несвиваеми материали се наблюдава ефект на блокиране (locking), при който грешката на апроксимация стагнира независимо от намаляването на дискретизационния параметър. Този ефект може да се избегне при изпозване на неконформни дискретизации, като например прекъснати методи на Гальоркин. Наред с преимуществата на DG дискретизациите, като локална консервативност, липса на условия за съгласуваност по границите на елементите, по-лесно прилагане на локално сгъстяване и адаптивни техники, съществен недостатък е по-големият брой степени на свобода и съответно по-големият размер на системите уравнения, които се налага да се решават. Това прави особенно важно разработването на оптимални многонивови преобусловители за такива класове задачи.

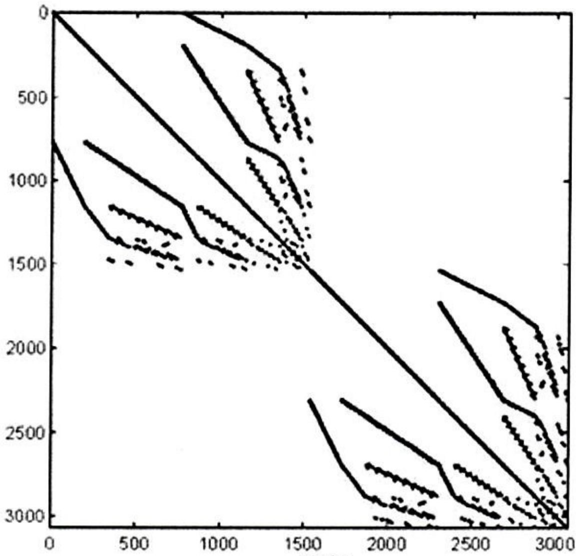
В [P9], [P13] и [P14] е разработен и изследван метод от тип коригиране в подпространства за числено решаване на системи линейни уравнения получени при дискретизация чрез прекъснат метод на Гальоркин от тип SIPG (Symmetric Interior Penalty Galerkin) на уравненията на Ламе. Доказано е, че линейното DG крайно-елементно пространство V^{DG} може да се представи по единствен начин, като директна сума на две подпространства

$$V^{DG}=V^{CR}\oplus Z.$$

Едното от тях V^{CR} е пространството на линейните неконформни крайни елементи на Крозе-Равиа, а с Z е означено допълнението му в V^{DG}. Показано е, че функциите от пространството Z имат локално представяне, което е от голяма важност за практическото приложение на метода. Предложен и изследван е блочно диагонален преобусловител и е доказано, че числото на обусловеност на преобусловената система линейни алгебрични уравнения е равномерно ограничено, както по отношение на дискретизационния параметър h, така и по отношение на коефициентите на Ламе включително и в случая на почти несвиваеми материали. Действието на преобусловителя се свежда до решаването на две независими задачи, свързани с подпространствата Z и V^{CR}. Доказано, е че матрицата на системата уравнения, съответстваща на пространството Z е добре обусловена и следователно може да бъде решена ефективно по метода на спрегнатия градиент. За решаване на системата уравнения, свързана с рестрикцията на билинейната форма в пространството V^{CR}, е необходимо да се конструират ефективни методи за преобуславяне тъй, като съответната матрица е лошо обусловена.



Структура на ненулевите елементи на матрицата съответстваща на пространството V^{DG}.

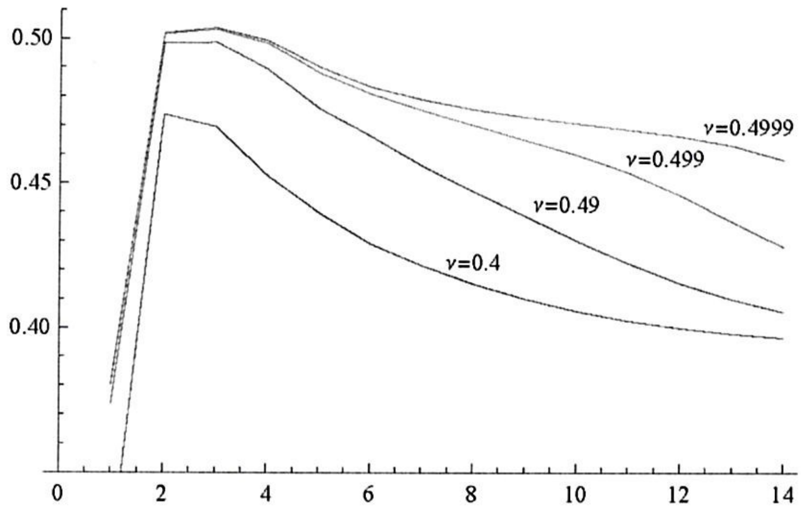


Ненулева структура на матрицата съответстваща на разделянето на крайноелементното пространство. Диагоналните блокове са свързани с подпространствата Z и V^{CR}.

Получените доказателства са в сила, както за двумерни така и за тримерни области. Разработеният метод е изследван числено и при задачи със скокове на коефициентите. Получените резултати показват стабилно поведение на метода при нехомогенни материали включително, когато единият материал е почти несвиваем.

6. *Некомформни елементи на Крозе-Равиа за уравненията на Ламе в случая на почти несвиваеми материали*

В [P8] е представен оптимален многонивов пробусловител от тип AMLI за линейни задачи от теория на еластичността с наложени гранични условия на Дирихле, които са дискретизирани с крайни елементи на Крозе-Равиа. Нека припомним, че сходимостта на AMLI алгоритъма зависи съществено от константата γ, която се оценява с максималната от локалните (макроелементните) константи.



Локалната константа γ^2 като функция на броя нива на сгъстяване и различни стойности на коефициента на Поасон ν.

Числено е изследвано многонивовото поведение на локалната константа в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц, като е наблюдавана равномерна ограниченост по отношение частното на Поасон ν включително и когато клони към границата на несвиваемост $\nu=1/2$. Проведените числени експерименти потвърждават оптималната изчислителна сложност на метода по отношение размера на дискретната задача и съответните параметри на диференциалната задача.

7. *Приложение на граф-лапласиани с тегла при решаване на уравненията на Навие-Стокс*

В [P12] е изследвана елиптична задача в смесена постановка за векторната функция на скоростта и скаларната функция на налягането. Разглеждаме дискретизация с неконформни крайни елементи на Крозе-Равиа за скоростите и на части константи за налягането. В този случай неизвестните на скоростите могат да бъдат изключени точно и задачата се свежда до задача за решаване на система за налягането. Матрицата на тази система има структура на граф-лапласиан с тегла. Предложен е многонивов преобусловител от тип AMLI, като за водещия диагонален блок в йерархичното двунивово разделяне на матрицата се прилага полиномиална апроксимация получена на базата на най-добро приближение на x^{-1} в $L\infty$ норма в краен интервал. Така конструираният преобусловител има директно приложение при численото решаване на нестационарната система от уравнения на Навие-Стокс при използване на проекционен подход.

8. ***Задача на Стефан за изследване на кристализационни и релаксационни процеси***

В [P5] са изследвани числено кристализационни и релаксационни процеси в стопилки. Симулиран е растеж на кристал в мултикомпонентна система, като кристалният състав е различен от околната фаза. Процесът е моделиран, като задача за Стефан със свободна граница. За численото решаване е използван boundary immobilization method, като за дискретизацията на получената диференциална задача е използвана двуслойна диференчна схема с тегло.

Списък на представените за участие в конкурса публикации

[P1] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, Multilevel preconditioning of 2D Rannacher-Turek FE problems; additive and multiplicative methods, *Lecture Notes in Computer Sciences*, Springer-Verlag, **4310** (2007), 56-64.

[P2] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, Multilevel preconditioning of rotated bilinear nonconforming FEM problems, *Computers and Mathematics with Applications*, **55(10)** (2008), 2280-2294.

[P3] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, Multilevel preconditioning of rotated trilinear nonconforming finite element problems, *Lecture Notes in Computer Sciences*, Springer-Verlag, **4818** (2008), 86-95.

[P4] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, *Multilevel algorithms for Rannacher-Turek finite element approximation of 3D elliptic problems*, Computing, ***82*(4)** (2008), 217-239.

[P5] I. Avramov, C. Rüssel, N. Kolkovska, I. Georgiev, *Crystallization kinetics and network rigidity*, J. Phys.: Condens. Matter, **20**(2008), 335203.

[P6] I.Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, O*n the robustness of hierarchical multilevel splittings for discontinuous Galerk in rotated bilinear FE problems*, RICAM-Report 2008-09, 2008 (http://www.ricam.oeaw.ac.at/publications/reports/08/rep08-09.pdf)

[P7] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, J. Schicho, *Locally Optimized MIC(0) Preconditioning of Rannacher-Turek FEM Systems*, Applied Numerical Mathematics, **59** (2009) 2402-2415.

[P8] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, *Multilevel Preconditioning of Crouzeix-Raviart 3D Pure Displacement Elasticity Problems*, Lecture Notes in Computer Sciences, Springer, **5910** (2010), 103-110.

[P9] B. Ayuso, I. Georgiev, J. Kraus, L. Zikatanov, *A simple preconditioner for the SIPG discretization of linear elasticity equations*, Lecture Notes in Computer Sciences, Springer, **6046** (2011), 353-360.

[P10] I. Georgiev, M. Lymbery, S. Margenov, *Analysis of the CBS constant for quadratic finite elements*, Lecture Notes in Computer Sciences, Springer, **6046** (2011), 412-419.

[P11] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, *Two-level preconditioning for DG discretizations of scalar elliptic problems with discontinuous coefficients*, AIP Conference Proceedings, **1404** (2011), 389-396.

[P12] P. Boyanova, I. Georgiev, S. Margenov, L. Zikatanov: *Multilevel Preconditioning of Graph-Laplacians: Polynomial Approximation of the Pivot Blocks Inverses*, Mathematics and Computers in Simulation, **82 (2012)**, 1964-1971.

[P13] I. Georgiev, J. Kraus, *Preconditioning of elasticity Problems with discontinuous Material Parameters,* In Numerical Mathematics and Advanced Applications 2011, A. Cangiani et al. (eds.), Springer (2013), 761-769.

[P14] B. Ayuso, I. Georgiev, J. Kraus, and L. Zikatanov, *A subspace correction method for discontinuous Galerkin discretizations of linear elasticity equations,* ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **47**(5) (2013), 1315-1333.

[P15] I. Georgiev, S. Margenov, *Semi-coarsening AMLI preconditioning of anisotropic trilinear FEM Systems*, Computers and Mathematics with Applications, **68**(12) (2014), 2103-2111.