РЕЦЕНЗИЯ

от

проф. дмн Христо Илиев Семерджиев

(ФМИ при ПУ „Паисий Хилендарски")

върху

дисертационния труд

„НОВИ ПОДХОДИ В КРАЙНОЕЛЕМЕНТНИЯ АНАЛИЗ ЗА ЕЛИПТИЧНИ ЗАДАЧИ"

на

Милена Радославова Рачева

за придобиване на научната степен „доктор на науките"

в област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика,

професионално направление 4.5. Математика,

научна специалност „Изчислителна математика"

Дисертационният труд е посветен на математическото моделиране и съпътстващата компютърна реализация, които са в основата на съвременния технически и икономически прогрес. Дисертантът обръща внимание на два момента от изчислителната математика:

1) Да се създават и анализират числени методи и алгоритми с висока точност, въпреки големия напредък на съвременната изчислителна техника,

2) Предложените числени методи и алгоритми да са възможно по-прости и да търпят по-лесна алгоритмизация.

Разбира се, между тези два пункта съществува известно продиводействие и поради това трябва да се намира разумен компромис между високата точност и простата реализация на построените алгоритми. Както се вижда от темата на дисертационния труд, в него се третират въпроси теоретични и практически свързани с различните видове и модификации на основния числен метод от вариационен тип, метода на крайните елементи (МКЕ). Този метод в много случаи изисква обемисти изчисления. При решаване на приложни задачи МКЕ води до СЛАУ с разредени матрици от висок ред.

В последните години един от основните подходи за хармонизиране на точност и практическа приложимост на МКЕ е развитието на апостериорни процедури (постпроцедури) за ускоряване на сходимостта на приближеното решение към точното. Засилен е интересът към използване на неконформни КЕ. В дисертационния труд се акцентира върху приближаването на спектъра на елиптични оператори от втори и четвърти ред. МКЕ се прилага при решаване на все по-сложни и нестандартни гранични задачи с използване на нови конформни и неконформни КЕ.

В **първа глава**, озаглавена **„Смесен МКЕ за спектрални и интегро-диференциални задачи – вариационни аспекти и оценки“**, смесеният МКЕ се прилага когато е налице смесена формулировка на моделната гранична задача, където основното диференциално уравнение се „разцепва“ на няколко (обикновено на две) диференциални уравнения от по-нисък ред. Такова „разцепване“ често се диктува от инженерната практика. Смесеният МКЕ датира от 70-те години на миналия век в работите на Сиарле, Равиар, Мерсие, Бреци и др.

В **§1.2** е разгледана моделна задача за твърд еластичен прът при разнообразни гранични условия. Детайлният анализ на всички случаи води до заключението, че при съответните условия за коефициентите на диференциалните оператори, всички 7 случая притежават симетрична смесена вариационна формулировка. В **§1.3** се разглежда смесена вариационна формулировка за многомерни спектрални задачи от четвърти ред. Тук се разглеждат строго елиптични оператори от втори ред

$$A_i u(x) = p_i(x)\Delta u(x) + \sum_{j=1}^{d} q_{ij}(x)\partial_j u(x) + r_i(x)u(x)\,, \quad i = 1,2\,,$$

където Δ е операторът на Лаплас, $x = (x_1, \ldots, x_d)$. Изследва се също така спектралната задача от четвърти ред в Ω, записана в своята смесена формулировка:

$$A_1 u(x) - \lambda c_1(x)u(x) = \sigma(x)\,, \quad A_2\sigma(x) - \lambda c_2(x)\sigma(x) = b(x)u(x) + \lambda c_3(x)u(x) \qquad (1)$$

с гранични условия ($s \in \partial\Omega$)

$$\alpha_i(s)\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} + \beta_i(s)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma_i(s)\sigma + \delta_i(s)u = \lambda(\varphi_i(s)\sigma + \psi_i(s)u)\,, \quad i = 1,2\,, \qquad (2)$$

където коефициентите в (2) са непрекъснати в $\partial\Omega$, а $\partial/\partial\nu$ е производна по направление на външната нормала на областта. Целта тук е да се дадат достатъчни условия, при които вариационната постановка на (1) и (2) да бъде симетризуема. Условията са конкретизирани в Теорема 1.2. Доказателството е извършено с разглеждане на всички възможни случаи.

В **§1.4** се предлага ефективна апостериорна процедура за ускоряване на сходимостта за смесения МКЕ за бихармоничната спектрална задача. Тази процедура осигурява крайноелементна суперсходимост на собствените стойности и собствените функции за тази задача. Тук дисертантът доразвива своя идея от първия си дисертационен труд за получаване за образователната и научна степен доктор от 2002 г., където се използва стандартен МКЕ, а не смесен. Тук задачата е същата

$$\Delta^2 u(x) = \lambda u(x)\,, \quad x \in \Omega$$

с хомогенни гранични условия на Дирихле

$$u(x) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0\,, \quad x \in \partial\Omega\,,$$

ν е вектора по външната нормала на $\partial\Omega$.

Описан е апостериорният алгоритъм 1.1, който дава по-добри приближения както на собствените стойности, така и на собствените функции на смесената вариационна задача. В алгоритъм 1.1 е важно конструирането на подходящи крайноелементни пространства за решаване на съответната дискретна задача. В дисертационния труд са описани два практически подхода за решаване на тази задача: I „метод на двете мрежи" и II „метод на двете пространства". Направените оценки показват значително повишаване на реда на сходимост за собственните стойност – $O(h^{4+2s})$ вместо $O(h^{2+2s})$ за изпъкнала многоъгълна област.

В **§1.6** се третира смесена формулировка на интегродиференциален динамичен метод от теорията на вискоеластичността. Една от целите на този параграф е да се представи основното интегродиференциално уравнение от хиперболичен тип във вид на система от две уравнения, в които участващите производни относно времевата променлива да са от първи ред и да се формулира смесена вариационна задача. Такъв подход е оправдан при използване на МКЕ за дискретизация и получаване на приближено решение. **Глава първа** е илюстрирана с числови примери, които демонстрират пресмятането на първите четири собствени стойности посредством смесения метод върху равномерна правоъгълна мрежа с биквадратични крайни елементи и посредством апостериорна процедура съгласно алгоритъм 1.1, като се използват бикубични крайни елементи за решаване на допълнителната елиптична задача.

Глава втора е посветена на спектрални задачи с нелокални условия. Съществуват голям брой интересни задачи от практиката, за които областите са свързани и изпъкнали и са обединение от подобласти. Общите точки между съседните подобласти може да бъдат геометрична структура със същата размерност т.е. да са налице застъпващи се области. Изследвания върху многокомпонентни области е интересно направление в диференциалните уравнения и числовия анализ и обхваща задачи с вътрешни граници или интерфейсни задачи. Главната особеност в тях се съдържа в граничните условия върху вътрешните граници. Съществуват и динамични моделни задачи, в които има променливи във времето гранични условия. Тогава спектралният параметър се съдържа и в граничните условия. В **глава втора** се изследват три типа гранични задачи дефинирани в многокомпонентни области. Именно: I Интерфейсни задачи с преходни гранични условия; II Задачи дефинирани върху припокриващи се области; III Контактни задачи. Получени са приноси в теорията на МКЕ, касаещи общ подход за крайноелементния анализ на задачите с вътрешни граници и на такива със застъпващи се области. Доказани са оценки за сходимост и суперсходимост.

В **§2.1** се разглежда моделна многокомпонентна полигонална област, в която се търсят M на брой функции u_i, $i = 1, \ldots, M$, удоволетворяващи диференциалната система.

$$-\sum_{\ell,m=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(a_{\ell m}^{(i)} \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right) + a_0^{(i)} u_i = \lambda u_i$$

в подобластта Ω_i, където λ е реално число.

Удовлетворяват се класическите условия на Робен и Дирихле, нелокалните условия на Дирихле

$$\int_{\Gamma_{i,k}} [u_i(s) - u_k(s)]\, ds = 0$$

и равенствата $\partial u_i / \partial \nu^{(i)} = -\partial u_k / \partial \nu^{(k)} = const$ върху $\Gamma_{i,k}$, където $\partial u_i / \partial \nu^{(i)}$ е нормалната производна на u_i.

За да не се използва несъвършенният лагранжев интерполант се предлага нов подход за по-успешно справяне с нелокалните условия на Дирихле и за естествено доказателство на реда на сходимост. Използването на интегрални степени на свобода позволява да се конструира възстановяваща апостериорна процедура. Като се направи анализ на грешката в МКЕ, за приближеното решение $(\lambda_h\,,\, u_h)$ е получено, че $\|u - u_h\| = O(h^2)$ и $|\lambda - \lambda_h| = O(h^4)$.

В **§2.3** се представя метод за ускоряване на сходимостта на определения по МКЕ спектър, когато върху част от границата са поставени нелокални гранични условия. Разгледани са две моделни задачи, които може да се отнесат към уравненията на Хелмхолц, имащи широко приложение в теорията на електромагнитните полета. Тези задачи и техните крайноелементни апроксимации са изучавани от Де Шепер и Ван Кеер. Дисертантът доразвива техните резултати. Оптималните оценки

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \le Ch^k \, \|u\|_{k+1,\Omega}$$

$$|\lambda - \lambda_h| \le Ch^{2k} \, \|u\|_{k+1,\Omega}^2$$

са подобрени за задачи с нелокални гранични условия. Теорема 2.3 дава оценка от тип ултрасходимост

$$\left|\lambda - \widetilde{\lambda_h}\right| \le Ch^{2k+2} \, \|u\|_{k+2,\Omega}^2$$

която е с два порядъка по-висока от оптималната. Теорема 2.4 дава оценката от тип суперсходимост

$$\|u - \widetilde{w_h}\|_{1,\Omega} \le Ch^{k+1} \, \|u\|_{k+2,\Omega}$$

т.е. оценката е с един порядък по-висока от оптималната.

Това са резултати от прилагането на описаната от дисертанта апостериорна процедура за подобряване на приближеното решение на спектралната двойка.

§2.5 е посветен на задача от топлообмен, където се изучава крайноелементна апроксимация на контактна задача между две едномерни тела с използване на нелокално условие от интегрален тип в точката на контакта.

В **§2.6** се разглеждат числови примери за всяка от трите задачи в **глава втора**.

Глава трета е посветена на неконформни крайни елементи – анализ и приложения. Принципът на неконформност на МКЕ се налага, когато не са изпълнени следните изисквания. 1) Приближаващото крайноелементно функционално пространство V_h да не се съдържа във вариационното пространство V и да не притежава нужната гладкост. 2) Да се използват приближени стойности на интегралите във вариационното равенство. 3) Дефиниционната област Ω на граничната задача да не съвпада с областта Ω_h на съответната приближена задача. Неконформните МКЕ са с по-ограничено приложение от конформните, а анализът за качеството на неконформните подходи е по-труден. При неконформните подходи има и някои предимства – неконформните МКЕ често водят до разредени матрици с по-добра структура за изчисления, отколкото съответния по точност конформен МКЕ. Неконформните методи имат сериозно предимство при моделиране на фуидни течения в хетерогенни порести среди. Тези методи дават възможност за приближаване отдолу на собствените стойности на елиптичните оператори, докато конформните МКЕ дават оценки отгоре. В **глава трета** се въвеждат, обобщават и анализират нови КЕ, като се използват интегрални степени на свобода.

§3.2 е посветен на линейния триъгълен краен елемент на Crouzeix-Raviart и четириъгълния ротиран билинеен краен елемент и техни разширения, като за тези крайни елементи се използват интегрални степени на свобода. В **§3.3**, по сравнение с предишния вариант на дисертационния труд, е добавена Теорема 3.5, чрез която се изяснява, че не може да се получи повишаване на реда на сходимост, ако се обединят елементи в макроелементи. В Теореми 3.10 и 3.11 е посочено изискването за ограниченост отдолу на собствените функции (неравенствата (3.48) и (3.58)). Теорема 3.14 е прецизирана и трансформирана в две Теорема 3.13 и Теорема 3.14. В първата Теорема 3.13 се разглежда само метод за двустранни оценки само на първото собствено число, а Теорема 3.14 третира въпроса отнасящ се до целия спектър. По-точно казано, в Теорема 3.14 се разглежда спектрална задача от втори ред, като решенията са получени с използване на неконформните крайни елементи $C-R$, $EC-R$, Q_1^{rot} и EQ_1^{rot}.

Глава трета завършва с числени тестове, които илюстрират разгледаните в **гл. 3** теореми.

Глава четири е посветена на крайноелементно моделиране и анализ на задачи за греди, като добре е известно, че гредовите конструкции са основни за приложната механика. Дисертантът притежава значителни компетенции в математическото моделиране на тънки греди. В значителна степен се използват трите монографии на Тимошенко и съавтори, които са оказали благотворно влияние на дисертанта с идеи в математическото моделиране. Моделират се греда върху основа с променлива коравина от винклеров тип (основа върху пружини), свредел закрепен в тричелюстник, ветрогенераторна перка.

В **§4.6** се решават реални задачи от инженерната практика. Прилагат се изведените в **гл. 4** математически модели и съответните вариационни представяния. Приложен е МКЕ за определяне на преместванията и напреженията в съответните греди.

Обща характеристика. В дисертационния труд се разглеждат различни въпроси от теорията и приложението на МКЕ. Получените теоретични резултати са математически модели и нови алгоритми свързани с елиптични опретатори от втори и четвърти ред. Доказаните теореми съдържат оценки на спектрални двойки. Може да се твърди, че са получени и научно-приложни приноси касаещи редица приложни области, като се започне от химия, механика и други. Показателно в това отношение е **глава четири**. След цялостното прочитане на дисертационния труд аз се убедих напълно, че научните изследвания и получените теоретични и научно-приложни приноси са актуални.

Критични бележки. По време на рецензирането в дисертационния труд не са забелязани съществени пропуски и грешки.

Лични впечатления от дисертанта. Виждал съм доц. Милена Рачева само веднъж при много краткото й посещение в ПУ „Паисий Хилендарски“.

Препоръка. Дисертационния труд да се издаде във вид на монография.

Авторефератът и предоставените публикации адекватно представят съдържанието и приносите на дисертационния труд. Посочени са 61 цитирания. Достатъчен брой статии са публикувани в списания с IF и в специализирани международни издания.

Степен на самостоятелност на приносите. Резултатите от дисертационния труд са публикувани в 30 статии, от които 5 са самостоятелни. Не мога да не отбележа, че 23 от статиите са съвместни с проф. дмн А. Андреев. Аз зная, че проф. Андреев е научен ръководител на доц. Рачева при получаване на образователна и научна степен „доктор“. При придобиване на научна степен „доктор на науките“ не бива дисертантът да има научен ръководител (може да има само научен консултант). В тези съвместни работи проф. Андреев и доц. Рачева се демонстрират като един много добър научен тандем с международна известност. Дисертантът самостоятелно е разработил всички принципни въпроси, свързани с изложението на материала в дисертационния труд. Непосредствено е участвал и в компютърната реализация на разработените алгоритми.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: След всичко казано дотук следва, че дисертационният труд е с ясно очертана научна тематика. Получени са достатъчно на брой значими теоретични резултати в МКЕ и важни научно-приложни приноси. Дисертационният труд отговаря на изискванията на ЗРАСРБ и на ППЗРАСРБ за придобиване на научната степен „доктор на науките“ в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, научна специалност Изчислителна математика, отговаря и на специфичните изисквания от Правилника на ИИКТ–БАН. Поради това моята оценка на дисертационния труд на доц. д-р М. Рачева **„НОВИ ПОДХОДИ В КРАЙНОЕЛЕМЕНТНИЯ АНАЛИЗ ЗА ЕЛИПТИЧНИ ЗАДАЧИ“** е положителна. Предлагам на Уважаемите членове на научното жури да гласуват за присъждането на научната степен „доктор на науките“ на Милена Радославова Рачева.

14.02.2014
....

гр. Пловдив