БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО ИНФОРМАЦИОННИ И
КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ

Милена Радославова Рачева

НОВИ ПОДХОДИ В КРАЙНОЕЛЕМЕНТНИЯ АНАЛИЗ ЗА ЕЛИПТИЧНИ ЗАДАЧИ

(преработен вариант)

ДИСЕРТАЦИЯ

за придобиване на
научна степен "доктор на науките"
в професионално направление 4.5 "Математика"
(01.01.09 "Изчислителна математика")

София, 2013

"Mathematics is the music of reason"

- James Joseph Silvester

Съдържание

Увод

Въведението към настоящото научно изследване няма да убеждава, че математическото моделиране и съответните компютърни реализации са в основата на съвременния технически и икономически просперитет. В това са вече убедени дори и най-големите скептици и противници на технократското мислене.

Вместо това, необходимо е да припомним двете основни цели на изчислителната математика:

- Да се създават и анализират методи и въз основа на тях да се предлагат алгоритми с възможно **по-голяма точност**. Това означава, че числовата реализация на математическия модел ще се изпълни с по-голяма скорост и по-сигурно ще възпроизведе съответния физически модел.

- Да се изучават и предлагат числени методи, които са възможно **по-лесни за осмисляне и прилагане при конкретни пресмятания**. Като цяло, за тях е необходима относително по-проста алгоритмизация и по-малко изчислителен ресурс.

Веднага се вижда взаимната противоречивост на поставените по-горе две изисквания. Обикновено за получаване на процедури с висок ред на сходимост се налага усложняване на алгоритъма и използване на по-прецизен и дълбок математически апарат. Затова историята на развитието на числените методи е един непрекъснат стремеж към намиране на разумен и прецизен компромис между добра точност и проста реализация.

А сега да разгледаме как стои този въпрос при различните видове и модификации на **методите на крайните елементи** (МКЕ).

Като основен числен метод от вариационен тип, МКЕ решава редица приложни задачи с голям обем изчисления (large scale computations). Освен това резултиращите алгебрични системи имат матрици с разредена структура (sparse matrices). Поне теоретично е пределно ясно, че с увеличаване степента на апроксимиращите полиноми се увеличава и точността на метода, но очевидно решаването на съответната алгебрична система се усложнява [48, 129]. В процеса на преценка за избор на подход при реализиране на конкретна задача важна роля играе изискването за гладкост на функциите от крайноелементното пространство [39, 57]. В този избор се включва и факторът "масов потребител", който се проявява чрез комерсиални софтуери, каквито са разнообразните CAD/CAM системи. Поне от инженерна гледна точка, предпочитанията клонят по-скоро към удовлетворяването на второто изискване – за простота при реализацията на МКЕ.

В последните години една от най-важните стъпки за хармонизиране на точност и практическа приложимост на МКЕ е развитието на ефективни апостериорни процедури за ускоряване на сходимостта на приближеното към точното решение [32, 39]. Основната идея, а именно първоначално да използваме възможно по-прости крайни елементи, а след това да преработим полученото приближено решение, има решаваща роля.

И все пак на дневен ред стоят редица предизвикателства, пред които МКЕ е изправен. Тези предизвикателства се изразяват преди всичко в утвърждаване и доразвиване на достигнатите позиции в неговата математическа теория. Ето защо мотивите за разработването на настоящия дисертационен труд са повече от сериозни и основателни. Те могат да бъдат резюмирани по следния начин:

- Все още недооценена е ролята на математическия модел при решаване на задачи от практиката. Вариационните методи допускат нееднозначност в изводите и тълкуването на интегралните тъждества (различните билинейни форми);
- Интерес за практиката представляват някои елиптични задачи с нестандартни гранични условия. Тези условия се появяват върху вътрешни граници и/или имат нелокален (разпределен) характер. МКЕ се оказва благоприятен за тяхното изследване;
- В последните години е засилен интересът към използване на неконформни крайни елементи. Остават за изследване редица въпроси за сходимост и приложимост на неконформния МКЕ.

В представения дисертационен труд е даден акцент върху приближаването на спектъра на елиптични оператори от втори и четвърти ред. Този факт не е случаен. Новите тенденции в математическата теория на МКЕ, както вече отбелязахме, се отнасят към решаване на по-сложни и нестандартни гранични задачи, както и към намиране на ефективни апостериорни процедури. Това от своя страна е свързано и с предлагане и изучаване на нови (конформни и неконформни) крайни елементи. Известно е също, че динамичните гранични задачи от втори и четвърти ред могат да бъдат по-адекватно интерпретирани посредством спектъра на основния елиптичен оператор.

Наред с казаното дотук се налага да изкажем и водещата философия при излагане на новите подходи при анализ на граничните задачи по МКЕ. Тя е, че е по-добре методите да бъдат прилагани чрез елементи от по-ниска степен, а ефектът да се търси алгоритмично чрез съчетаване на нови елементи и подходящи апостериорни процедури!

В дисертацията се разглеждат няколко различни подхода в МКЕ, които ще изброим по-долу. Някои от идеите са приложими за произволен числен метод от вариационен тип.

Основните въпроси, разглеждани в дисертацията, са:

- Изследване на елиптични спектрални задачи от четвърти ред. Доказване свойства на смесената едномерна и многомерна вариационна задача, както и възможността за ускоряване на сходимостта в МКЕ за бихармоничната спектрална задача.

- Изучаване на интегро-диференциални уравнения в теорията на вискоеластичността с цел вариационното им представяне в смесена формулировка и получаване оценки за устойчивост.

- Представяне и анализиране на нови подходи в МКЕ за елиптични задачи с "нестандартни" гранични условия. Такива са преходните и нелокални условия върху граници, които могат да бъдат и вътрешни за областта. Този въпрос се пренася и върху елиптична задача, чиито области се припокриват.

- Развитие на неконформния МКЕ чрез доказване влиянието на интегралните степени на свобода върху сходимостта и приложимостта на метода.

- Математически модели и вариационни аспекти в теорията на тънките греди.

Наред с изброените основни въпроси се засягат и някои съпътстващи, но важни за вариационните числени методи проблеми. Такива са например изчислителните аспекти за конкретен тип задачи и изучаване структурата на съответните матрици.

Целите на дисертацията са:

1. Да се докажат нови резултати, свързани с използване на интегрални степени на свобода (§ 2.2, § 2.4, § 2.5, § 3.2, § 3.3, § 3.6, § 3.7, § 3.8).

2. Да се доразвият идеите и получат нови резултати в теорията на суперсходящия апостериорен анализ (§ 1.4, § 1.5, § 2.3, § 3.3, § 3.4).

3. Да се получи една възможно по-пълна картина на смесени вариационни задачи от четвърти ред (§ 1.2, § 1.3, § 4.5).

4. Да се изследват конкретни инженерни задачи от теорията на еластичността (§ 1.6, § 4.2, § 4.3, § 4.4).

Дисертацията се състои от четири глави. Номерата на отделните параграфи, теореми, леми, забележки, формули, примери, таблици и фигури се състоят от две числа, отделени с точка, първото от които е номерът на съответната глава, а второто – номерът на съответния обект от този вид в тази глава.

Във всяка една от четирите глави като последен параграф са дадени числови експерименти. Те илюстрират получените в тази глава основни теоретични резултати. Някои от числовите примери са реални задачи от инженерната практика (виж Пример 4.1, Пример 4.2, Пример 4.3).

Ще дадем кратко описание на основните резултати в четирите глави на дисертацията.

В **Глава 1** се изследва и прилага смесеният МКЕ за елиптични спектрални задачи от четвърти ред. Друга задача, която се решава в тази глава, е апроксимацията на интегро-диференциалното уравнение на вискоеластичността от втори ред, представено в смесена формулировка.

Свойствата на билинейните форми и тяхната възможност за симетризация са важна част от прилагането на числените методи от вариационен тип. Това особено важи за различните спектрални задачи [38]. Доказани са две теореми, които дават достатъчни условия за симетризуемост и от там – реалност на спектъра за едномерни и многомерни задачи от четвърти ред. Смесената форма дава много по-голяма вариативност в слабата формулировка.

Целта е да се получат резултати от възможно по-общ характер. Така например в едномерния случай се дискутират шест различни гранични условия, които моделират непринудени колебания на греда в различни реални ситуации.

В последно време се утвърди тенденцията за получаване на ефективни апостериорни процедури, които подобряват значително алгоритъма и качеството на изчислителния процес [32, 39]. В дисертацията е даден задълбочен анализ на една оригинална апостериорна техника за ускоряване на сходимостта за бихармоничната спектрална задача при прилагане на смесения МКЕ. Известно е [53], че ако $n \geq 2$ (n е степента на апроксимиращите полиноми) и собствената функция u е от пространството $H^{n+1}(\Omega)$, то

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^{2n-2}\|u\|_{n+1,\Omega}.$$

За напреженията на собствените функции имаме

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{n-1}\|u\|_{n+1,\Omega},$$

като в горните оценки, а и по-нататък долен индекс h означава приближено решение по МКЕ.

Предлага се метод (Алгоритъм 1.1), който позволява да се подобри точността. Това става за сметка на решаване на допълнителна (и по-лесна) задача по МКЕ върху по-фина мрежа, или с повишение на степента на апроксимиращите полиноми с една единица.

Тогава

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq Ch^{2n}\|u\|_{n+1,\Omega},$$

$$\|\sigma - \widetilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{n}\|u\|_{n+1,\Omega},$$

където $\widetilde{\lambda}_h$ и $\widetilde{\sigma}_h$ са новите приближения след прилагане на апостериорната техника.

Смесеният МКЕ за задачи от четвърти ред е приложим дори когато елементите са линейни. За разглежданата бихармонична задача и $n = 1$, при оценка от оптимален порядък [85, 86]

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^{1/2}\|u\|_{2,\Omega},$$

след прилагане на апостериорната процедура се доказва, че

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq Ch\|u\|_{2,\Omega}.$$

В главата се прави анализ на едно интегро-диференциално хиперболично уравнение от втори ред със слабо сингулярно интегрално ядро, което моделира динамика на вискоеластични материали и демфиращи устройства. В този клас от моделни задачи участват и диференциални оператори от дробен ред $\alpha \in (0, 1)$ [40, 41].

Доказват се оценки за устойчивост чрез трансформиране на основното уравнение в смесена формулировка от две уравнения от първи ред спрямо времевата променлива, на която е намерено симетрично представяне. Така при дискретизация по пространствената променлива x се използва стандартен МКЕ, а по времевата променлива

t – прекъснат метод на Гальоркин. Накрая (Теорема 1.9) се дава оценка на грешката след дискретизация.

Глава 2 е посветена на апроксимацията по МКЕ на спектрални интерфейсни задачи [62]. Този тип задачи се характеризира с това, че дефиниционната област Ω е съставена от няколко подобласти, като между всеки две съседни подобласти се определя преходно условие, т.е. образува се вътрешна граница. Това е едно модерно и бързо развиващо се направление в теорията на диференциалните уравнения и, съответно, в числовия анализ за приближаване на такива задачи. Голямото разнообразие на модели е обединено от понятието *нелокално условие*. Това означава, че върху обща част на две области решенията, определени върху съответните области, съвпадат глобално, т.е. техните интеграли върху общата част имат една и съща стойност.

В главата са разгледани четири типа спектрални задачи от втори ред с нелокални условия:

- Интерфейсни задачи с преходни гранични условия (transition conditions);
- Задачи със застъпващи се области (overlapping domains);
- Задачи с нелокални условия върху част от границата;
- Контактни задачи.

Намерен е общ подход за изследване и числово реализиране на широк клас от споменатите по-горе задачи. Доказва се как при използването на интегрални степени на свобода може да се получи оптимален ред на сходимост. В цялата втора глава се подчертава, че този подход е много по-естествен в МКЕ за апроксимиране на спектрални гранични задачи с нелокални гранични условия. Изследванията в тази глава доразвиват резултатите на Van Keer и De Shepper (виж [67, 68, 69, 70, 71, 133]).

Най-напред за задача, определена върху многокомпонентна област Ω в равнината се използват квадратични триъгълни или биквадратични Сирендипови елементи, чиито степени на свобода са стойностите във върховете, а също така и стойностите на интегралите върху страните. За всеки две съседни подобласти върху общата им граница се дефинират нелокални условия на Dirichlet

$$\int_{\Gamma_{i,k}} [u_i(s) - u_k(s)]\, ds = 0, \quad i, k \in \{1, 2, \ldots, M\},$$

където M е броят на подобластите.

След като дефинираме интерполационния оператор π_h от интегрален тип, оценките за съответната спектрална задача следват от следната оценка: ако $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_M)$, $v_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$, то

$$\|v - \pi_h v\|_{m,\Omega} \leq C h^{3-m} \|v\|_{3,\Omega}, \quad m = 0, 1,$$

където

$$\|v\|_{k,\Omega} = \sum_{i=1}^{M} \|v_i\|_{k,\Omega_i} \ \text{ за } k \geq 0.$$

При тази, както и при останалите задачи с нелокални условия, техниката се основава на сравняване на интерполанта със стандартния Лагранжев интерполант.

Показано е, че използваният подход дава и още едно предимство. Елементите могат да се обединят така, че въздействайки върху вече намереното крайноелементно решение да се получи приближение с много по-висока точност. Тази идея беше развита след работите на Zienkiewicz и Zhu (виж [148]). За обединението на четириъгълни крайни елементи по четворки в макроелемент (patch) се доказва повишен ред на сходимост. За собствените функции той е с един, а за собствените стойности – с два порядъка по-висок, ако точното решение u е с по-висока гладкост, а именно е от $H^5(\Omega)$.

Задачата за определяне на спектъра на елиптичен оператор, когато дефиниционните области се застъпват, намира широко приложение в теорията на топло- и масообмена [66]. Подходът с подходящи крайни елементи е представен, когато имаме две области, т.е. $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq 0$. Разгледани са случаите, когато Ω_1 и Ω_2 са два припокриващи се интервала (a_1, b_1) и (b_2, a_2), като $a_1 < b_2 < b_1 < a_2$ или Ω е двукомпонентна област от два застъпващи се правоъгълника Ω_1 и Ω_2 съответно с граници $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. За спектралната задача от втори ред е поставено и нелокално свързващо условие

$$\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} [u_1(x) - u_2(x)]\ dx = 0,$$

където u_1 и u_2 са собствени функции, определени съответно върху Ω_1 и Ω_2.

При доказване на оптимален ред на сходимост с квадратични/ биквадратични крайни елементи трябва да се преодолеят редица технически трудности. Така Теорема 2.6 извежда основната оценка за близостта на произволна функция от $H^3(\Omega)$ и съответния ѝ интерполант както за едномерния, така и за двумерния случай.

Следващите изследвания в Глава 2 са свързани с така наречените контактни задачи, при които общите им части имат размерност с единица по-малка и там е зададено свързващо условие от интегрален тип [60]. Изучена е крайноелементната апроксимация на векторна спектрална задача между две едномерни тела. Доказва се оптимален ред на точност и се дискутират изчислителни аспекти на компютърната реализация при дискретизация по МКЕ.

Резултатът в дисертацията за контактната задача съществено доразвива теорията на аналогичния проблем, разгледан от De Shepper и Van Keer [71]. Тук се използва различен подход, както и елементи от по-висока степен (квадратични вместо линейни), като целта е отново да се използват интегрални степени на свобода.

Глава 3 от дисертацията изследва разнообразни по характер въпроси, които възникват при използване на неконформни МКЕ.

Интересът към такива методи датира от много години [90, 117], но в последното десетилетие те станаха обект на интензивни изследвания. Това стана факт във връзка с някои благоприятни и дори неочаквани възможности, които предоставиха неконформните крайни елементи. Оказва се, че те дават много по-добра матрична структура за редица важни компютърни пресмятания [88, 134], а също така по-лесно се осъществяват някои съвременни апостериорни процедури [32, 55]. Нека не забравяме, че неконформните методи са (засега) единствената възможност за числено получаване на долни граници на собствените стойности [34].

Всичко казано дотук е достатъчно предизвикателство авторът да има амбицията и да се постарае да изследва (с оглед нейните възможности) всичките изброени по-горе проблеми. И действително: доказани са свойства, характерни само за (определени) неконформни елементи; предложени са апостериорни техники за доказване на суперсходимост; изучен е модифициран елемент за решаване на задачи от четвърти ред; най-сетне, отделено е подобаващо място на доказване и пресмятане на долни граници за елиптични оператори от втори и четвърти ред.

Най-напред, като спазим духа на предходната глава, най-елементарният неконформен елемент на Crouzeix-Raviart (C-R) се разглежда като елемент с интегрални степени на свобода. Това не променя базисните му функции, но има за цел да даде един по-естествен (и удобен!) подход при теоретичните изследвания посредством използване на съответния крайноелементен интерполант.

По-нататък по логичен начин този елемент допуска разширение (Extended C-R) с още една базисна функция, за да се превърне в непълен квадратичен елемент. Двата четириъгълни аналога на елемента на Crouzeix-Raviart и неговия разширен – билинейният Q_1^{rot} елемент и неговото разширение EQ_1^{rot}, допълват картината за следния резултат (свойство): Ако билинейната форма $a_h(\cdot,\cdot)$ е породена от Лапласиана и функцията v_h е от крайноелементното пространство V_h, то за всяко $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ за споменатите четири неконформни елемента е валидно равенството

$$a_h(v - i_h v, v_h) = 0,$$

където $i_h v$ е съответният интерполант.

За малко по-общ елиптичен оператор горното неравенство се превръща в оценка за суперблизост, по-точно в $\mathcal{O}(h^2)$.

Въпреки, че този резултат не изчерпва всички възможни неконформни методи с това свойство, то той, заедно с интегралните степени на свобода, има пряко приложение. То касае конструиране на ускоряваща сходимостта апостериорна техника чрез интерполирани крайни елементи (patch-recovery technique). Доказват се оценки от тип суперсходимост и се дават практически (алгоритмични) правила за използване на процедурата.

Показано е също (Теорема 3.5), че посредством елементите Q_1^{rot} и EQ_1^{rot} не може да се осъществи покриваща техника, която да подобри реда на сходимост.

Теорема 3.7 и Алгоритъм 3.1 показват как и при какви условия може да се повиши точността при спектрални задачи от втори ред посредством решаване на допълнителна и по-проста задача. Първоначално използваме неконформни елементи от възможно по-ниска степен на приближаващите полиноми, а след това използваме конформни елементи, които включват степените на свобода на вече използваните неконформни елементи.

В Глава 3 се доказва редът на сходимост за един от четириъгълните аналози на триъгълника на Morley, прилаган за елиптични задачи от четвърти ред. Така Теорема 3.8 и Теорема 3.9 допълват теорията на числовия анализ за неконформните МКЕ.

Най-голямо място е отделено на апроксимиране отдолу на собствените стойности за оператори от втори и четвърти ред. Известно е [38], че всеки конформен МКЕ приближава тези стойности отгоре.

Направен е един възможно най-пълен обзор за получените досега резултати в това направление от учени, работещи в областта на апроксимиране на спектрални задачи посредством неконформни методи. Доказват се резултати за апроксимиране отдолу на собствените стойности на Лапласиана при използване на C-R и EC-R елементи.

Особено ценни са резултатите за намиране на долни граници на собствените стойности за елиптичните оператори от четвърти ред. Дискутира се това свойство за елемента на Adini, елемента на Morley и за правоъгълните елементи на Morley. Не е известно в световната литература да са извършвани такива числови експерименти с правоъгълен неконформен елемент на Morley. Това е направено в дисертацията с няколко стойности на отношението на Poisson. Забелязва се, че приближената стойност λ_h апроксимира точната стойност λ отдолу.

Накрая се доказват оригинални резултати за получаване на двустранни оценки на собствените стойности. Ако предложим неконформен метод за приближаване на първата (основна) собствена стойност за елиптичен оператор от втори или четвърти ред, така че $\lambda_{1,h} < \lambda_1$, то чрез подходяща апостериорна процедура и използване на конформен метод може да се получи друго приближение $\widetilde{\lambda}_h$, за което

$$\lambda_{1,h} < \lambda_1 < \widetilde{\lambda}_{1,h}.$$

Ако за получаване на апроксимация отдолу λ_h на λ за задача от втори ред са използвани някои измежду елементите C-R, EC-R, Q_1^{rot} или EQ_1^{rot}, то в Теорема 3.14 се дават условията и се доказва получаване на апроксимация $\widetilde{\lambda}_h$ отгоре, т.е.

$$\lambda_{l,h} \leq \lambda_l \leq \widetilde{\lambda}_{l,h}, \quad l = 2, 3, \ldots .$$

Този резултат е отразен в Алгоритъм 3.2.

Глава 4 има принос в математическото моделиране на тънки греди, които са подложени на динамични натоварвания. Последващото числово моделиране има предвид използването на МКЕ, но може да бъде отнесено към произволен числен метод от вариационен тип. Споменатите задачи имат широко приложение в инженерната практика. Достатъчно е да спменем за оразмеряване на режещи инструменти в машиностроенето, или за различни гредови конструкции в строителната механика, върху които въздействат променливи сили.

Една от основните цели в тази глава е да се направи прецизен извод на математическите модели, в които участва едномерна пространствена променлива x, а уравненията са от четвърти ред и от хиперболичен вид [131].

Първата задача, която е изследвана, е за греда върху еластична основа, като по-точно, тя е опряна на три пружини. Върху нея въздейства променлива аксиална сила $\mathcal{P}$. Основната ни задача е да изведем математически модел, който да е адекватен и удобен за прилагане на числен метод. Целта е да се пресмятат динамичните напрежения на гредата. Като използваме слаба формулировка, могат да бъдат пресметнати по МКЕ и собствените стойности и функции на елиптичния оператор от четвърти ред. Този резултат е полезен и за диагонализиране на матриците на маса и коравина.

Това свойство следва от ортогоналността на собствените вектори. Методът е познат като *метод на нормалните форми* [130, 131].

Важен случай от теорията на еластичността е, когато гредата (или част от нея) е върху основа от Винклеров тип. Нов момент в моделирането на такива обекти е, че Винклеровата основа е разгледана като суперпозиция от много на брой еластични опори (амортисьорни пружини). При това положение е получен математическия модел и съответната му вариационна формулировка.

Типичен пример за модел на греда върху Винклерова основа е моделът на свредло, закрепено в тричелюстник. За пример е взето винтово свредло с цилиндрична опашка. Тази задача има особеност, която е следната: неизвестната функция на преместването се налага да бъде разделена на две компоненти – една, която отговаря на свободната част на свредлото и друга, която е еластично закрепена. Представена е изглаждаща процедура между двете части с цел получаване на по-адекватен модел.

Получаването на вариационните модели за трите разгледани задачи съдържа сериозни аналитични преобразования. Освен това всяка от тях е подкрепена с числова реализация, като конкретните примери са с реални параметри, заимствани от инженерната практика (Пример 4.1, Пример 4.2 и Пример 4.3).

Последната – четвърта разглеждана в Глава 4 задача е посветена на някои вариационни аспекти на модел на ветрогенераторна перка [43, 47]. Изведено е смесено вариационно интегрално тъждество на перката, която е разгледана като тънка еластична греда. Участващите билинейни форми са симетрични.

Преобладаващият характер на дисертацията е теоретичен. Тя е посветена на различни въпроси от теорията и приложенията на МКЕ. Получени са оценки, математически модели и алгоритми, които са свързани с елиптични оператори от втори и четвърти ред.

Методите на изследване се определят главно от:

- Методите на приложния функционален анализ;
- Анализ в МКЕ в неговата $h-$версия и $p-$версия;
- Основни твърдения, като: Лемата на Bramble-Hilbert, Теореми на Strang, Теорема за оценки на функционали;
- Техника за получаване на интерполационни полиноми и тяхното приложение за точността на МКЕ;
- Прилагане формулите на Green и минимаксния принцип.

Основните резултати в дисертацията са публикувани в самостоятелните статии [111, 112, 113, 114, 115] и в съвместните работи [4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 116, 150].

Повечето от резултатите в дисертационния труд са представени на специализираните международни конференции:

- *Large Scale Scientific Computations* 2003, 2005, 2007, 2009, 2011 г.;
- *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences* 2010 г.;
- *Numerical Analysis and its Applications* 2004, 2008, 2012 г.;
- *European Finite Element Fair* 2005, 2010, 2011, 2012 г.,

а също и на международните технически конференции:

- *Research and Development in Mechanical Industry* Užice, Serbia 2008 г.;
- *International Conference UNITECH* - Gabrovo, Bulgaria 2009, 2010, 2011, 2012 г.

Резултатите са докладвани и на:

- Семинар по изчислителна математика към ИИКТ-БАН;
- Семинар по изчислителни методи в Технически университет - Габрово;
- Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM 2008, 2009, 2010 г.;
- Семинар на Finite Element Center - Chalmers University of Technology, Sweden 2007, 2008 г.

Работата по дисертацията бе частично подпомогната от следните проекти от НФНИ:

- **ВУ-МИ 202/2006** *"Адаптивни и йерархични алгоритми в метода на крайните елементи"*;
- **ДО 02-147/2008** *"Методи, алгоритми и софтуерни средства за задачи с голяма размерност и йерархични компютърни методи"*;
- **ДФНИ - И01/5/2012** *"Числени методи за свързани системи и компютърно моделиране в биомедицината и екологията"*,

както и от проектите, финансирани от Технически университет - Габрово:

- **5.2/2002** *"Числов анализ за гранични задачи от ред 2m с приложения в механиката"*;
- **E822/2008;2009** *"Числени методи за задачи от електротехниката"*;
- **C1001/2010; 2011** *"Компютърни пресмятания с приложения в обучението и научните изследвания"*
- **C1207/2012; 2013** *"Компютърно-ориентирани методи с приложения в обучението и научните изследвания"*

Изказвам искрена благодарност на моя научен ръководител и дългогодишен учител, съавтор и съмишленик проф. дмн Андрей Андреев за интересната и актуална научна тематика, в която той ме въведе; за вещите и стимулиращи напътствия; за ползотворните дискусии; за своевременната помощ и подкрепа.

Глава 1

Смесен МКЕ за спектрални и интегродиференциални задачи - вариационни аспекти и оценки

1.1 Въведение

Основата на смесените вариационни методи е така наречената смесена формулировка на моделната гранична задача, когато основното диференциално уравнение, чрез подходящо полагане, се "разцепва" на няколко диференциални уравнения от по-нисък ред. Най-голям интерес представляват някои гранични задачи от втори и четвърти ред, които се свеждат към две на брой уравнения, съответно от първи и втори ред. Естествено е при получаването на вариационната (слаба) формулировка да се налага използването на две различни вариационни функционални пространства.

Големият интерес към числените методи от смесен тип и по-специално към смесения МКЕ датира от седемдесетте години на миналия век. Тук могат да се посочат работите на Ciarlet и Raviart [58], Mercier [104], Brezzi и Raviart [51] и много други. Идеята за свеждане на моделното уравнение към система от диференциални уравнения има две основни причини, които се явяват като предимства на смесените числени методи:

- Много често в инженерната практика се интересуваме не толкова от неизвестното решение на задачата, колкото от някоя негова производна. Например при задачите от втори ред такива двойки функции са: температурно поле - топлинен поток или налягане - скорост на флуид. За задачи от четвърти ред могат да се посочат преместване - напрежение и функция на тока - вихър на флуидното течение. Така при апроксимиране на задачата в смесена формулировка наред с решението ще получим и важни деривати на това решение, и то най-често в непрекъснат вид.

- Към вариационните функционални пространства има значително по-слаби изисквания. Гладкостта на точното решение може да бъде по-малка, докато възможностите за избор на апроксимиращи функционални пространства са много по-големи. Така например за задачи от четвърти ред в смесения МКЕ могат да се ползват и линейни елементи [85, 86] и методът позволява да се избегне изискването за така нареченото C^1-условие [56]. Това означава непрекъснатост на функциите от крайноелементното пространство, а също така и непрекъснатост на техните първи производни през границите между отделните крайни елементи.

Смесените вариационни методи имат и един основен недостатък. Той е, че апроксимиращите функционални пространства не са независими. Този факт създава значителни трудности при пресмятане на приближената задача и при компютърната ѝ реализация [50, 56].

Известно е, че всеки вариационен числен метод за решаване на гранични задачи зависи от слабата формулировка на съответната диференциална система от уравнения. Това вариационно представяне в много случаи не е единствено. Видът на вариационната система в смесения МКЕ играе важна роля при изследване качеството на приближеното решение [50]. Това е валидно особено за решаване на спектрални задачи, в които спектралният параметър участва в граничните условия [38].

Една от целите на тази глава е да изследва различни смесени вариационни формулировки за едномерни и многомерни гранични задачи от четвърти ред, повечето от които моделират реални процеси. Представят се условията за симетризуемост на билинейните форми и оттам се определят някои свойства на спектралната задача. Един от параграфите е посветен на апостериорни оценки при смесения МКЕ за спектъра на бихармоничния оператор. Предложена е оригинална апостериорна процедура за ускоряване на сходимостта на приближените собствени стойности и собствени функции. В последните години апостериорните техники в МКЕ заемат водещо място както в числовия анализ, така и при алгоритмизацията на метода (виж напр. [32]).

Задачите, които моделират динамични процеси, приложени към вискоеластични материали, могат да бъдат описвани с интегродиференциални уравнения със слабо сингулярни ядра, получени като резултат от използване на производни от дробен ред [3, 40]. В настоящата глава е получена подходяща слаба формулировка на разглежданата задача, като след дискретизация по пространствените променливи се прилага прекъснат метод на Гальоркин. Доказани са априорни оценки, които осигуряват устойчивост на приложените методи.

Основните резултати от тази глава са публикувани в 8 статии: [4, 8, 9, 15, 111, 113, 114, 116].

1.2 Смесена вариационна формулировка за едномерни спектрални задачи от четвърти ред

В техническата и строителна механика се налага оразмеряването на прътови конструкции, подложени на различни натоварвания. Тук освен провисванията (преместванията) се изисква да се определи полето на напреженията, за да се установят "слабите" точки в дадена конструкция [131]. Ето защо решаването на смесена вариационна задача за определяне на собствените (непринудени) колебания и функции на формата за даден прът е много подходяща за този вид изследвания.

Да разгледаме такава моделна задача за твърд еластичен прът с дължина l:

$$(\alpha u'')'' = \lambda\rho F u, \quad x \in (0, l), \tag{1.1}$$

където $\alpha(x)$ е еластичната коравина, ρ е плътността, а F е лицето на напречно сечение на пръта. По този начин, ρF представлява масата на единица дължина. Разбира се, ние се придържаме към класическата дефиниция на прътово тяло, а именно: произволно негово напречно сечение има размери, много по-малки в сравнение с неговата дължина. Ще предполагаме още, че $\alpha(x)$ е положителна функция, която принадлежи на $C^2[0, l]$.

Граничните условия играят съществена роля при определяне на собствените двойки за задачата (1.1). Целта ни е да разгледаме (1.1) при разнообразни гранични условия, породени от инженерната практика:

(а) Двата края са свободно подпрени:

$$u(0) = u(l) = u''(0) = u''(l) = 0. \tag{1.2}$$

(б) Единият край е неподвижно стегнат (запънат), а другият е свободен (конзолна греда):

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(l) = u'''(l) = 0. \tag{1.3}$$

(в) Двата края са неподвижно фиксирани:

$$u(0) = u(l) = u'(0) = u'(l) = 0. \tag{1.4}$$

(г) В този случай имаме комбинация от еластични подпрени и фиксирани краища ($c_1 = \text{const} > 0$):

$$u(0) = u(l) = 0, \quad u''(0) = c_1 u'(0), \quad u''(l) = -c_1 u'(l). \tag{1.5}$$

(д) Прът с еластични опори в двата края (например посредством пружини):

$$u''(0) = u''(l) = 0, \quad u(0) + c_1 u'''(0) = 0, \quad u(l) - c_1 u'''(l) = 0. \tag{1.6}$$

(е) Конзолна греда (прът), в чийто свободен край е съсредоточена маса [99]:

$$u(l) = u'(l) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) + c_1 \lambda u(0) = 0. \tag{1.7}$$

Смесена формулировка на уравнението (1.1) ще получим, като въведем нова неизвестна функция $\sigma \in H^2(0,l)$. Тогава ще трябва да определим диференциалните оператори от втори ред $A_1,\ A_2$ и A_3 по такъв начин, че уравнението (1.1) да бъде еквивалентно на системата:

$$\begin{aligned} A_1 u &= \sigma, \\ A_2\sigma + A_3 u &= \lambda\rho F u. \end{aligned} \tag{1.8}$$

За да представим последната система в слаба форма, въвеждаме две функционални пространства V и Σ, които са подпространства на $H^1(\Omega)$. Впрочем, V и Σ удовлетворяват граничните условия в съответствие с уравненията (1.2)-(1.7). Тогава (1.8) може да се запише във вида (оттук нататък с $(\cdot,\cdot)$ ще означаваме L_2-скаларно произведение):

$$\begin{aligned} (A_1u,\sigma_1) \quad &= \quad (\sigma,\sigma_1) \quad \forall\sigma_1\in\Sigma, \\ (A_2\sigma,u_1) \quad &+ \quad (A_3u,u_1) = \lambda(\rho Fu,u_1) \quad \forall u_1\in V. \end{aligned} \tag{1.9}$$

На практика тези две уравнения се разглеждат като едно вариационно уравнение върху две вариационни пространства, т.е. уравненията (1.9) се решават едновременно:

$$\begin{aligned} &(A_1u,\sigma_1)+(A_2\sigma,u_1)+(A_3u,u_1)-(\sigma,\sigma_1) \\ &\qquad = \lambda(\rho Fu,u_1) \quad \forall u_1\in V,\ \sigma_1\in\Sigma. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Целта на настоящия параграф е да се определи какъв вид трябва да имат елиптичните оператори A_1 и A_2, и като следствие A_3, така че след отчитане на граничните условия уравнението (1.10) да бъде симетрично по отношение на двойките функции (u,σ) и (u_1,σ_1). Тогава симетричността на смесената вариационна задача (1.9) ще осигури реалност на собствените стойности (виж напр. [38]), а също така оттук ще следват и важни свойства на смесената вариационна апроксимация [53].

Нека в нашия анализ използваме по-общ вид на елиптични оператори от втори ред, чиито коефициенти са достатъчно гладки:

$$A_i = p_i(x)\frac{d^2}{dx^2} + q_i(x)\frac{d}{dx} + r_i(x),$$

където $p_i(x) < 0$ и $r_i(x) \ge 0,\ i = 1,2.$

Тогава за всяко $\sigma_1\in\Sigma$ (за удобство ще изпускаме аргумента x)

$$(A_1u,\sigma_1) = \int_0^l [p_1u'' + q_1u' + r_1u]\,\sigma_1\,dx$$

$$= p_1u'\sigma_1\big|_0^l - \int_0^l p_1u'\sigma_1'\,dx + \int_0^l [-p_1' + q_1]u'\sigma_1\,dx + \int_0^l r_1u\sigma_1\,dx.$$

Аналогично, за всяко $u_1 \in V$

$$(A_2\sigma, u_1) = \int_0^l [p_2\sigma'' + q_2\sigma' + r_2\sigma]\, u_1\, dx$$

$$= p_2\sigma' u_1|_0^l - \int_0^l p_2\sigma' u_1'\, dx + \int_0^l [-p_2' + q_2]\sigma' u_1\, dx + \int_0^l r_2\sigma u_1\, dx.$$

Очевидно, симетрия на (1.10) е гарантирана, ако следните три условия са изпълнени:

- $p_1(x) = p_2(x) := p(x)$. Тогава изразът $-\int_0^l p_1 u' \sigma_1'\, dx - \int_0^l p_2 u_1' \sigma'\, dx$ ще е симетричен;
- най-простият начин да бъде преодоляна трудността, породена от конвективните членове
$$\int_0^l [-p_1' + q_1] u' \sigma_1\, dx \quad \text{и} \quad \int_0^l [-p_2' + q_2] u_1 \sigma'\, dx$$
е да изберем $q_1 = p_1' = p'(x)$ и $q_2 = p_2' = p'(x)$;
- Най-сетне, с цел симетричност на $\int_0^l r_1 u \sigma_1\, dx$ и $\int_0^l r_2 \sigma u_1\, dx$, ние полагаме $r_1 = r_2 := r(x) \geq 0$.

От смесената формулировка (1.8) бихме могли да определим функциите $p(x)$ и $r(x)$. По такъв начин, комбинирайки двете уравнения, лесно се получава, че

$$(\alpha u'')'' = A_2 (A_1 u) + A_3 u. \tag{1.11}$$

Следователно, за суперпозицията на оператори $A_2 \circ A_1 u$ получаваме

$$A_2 (A_1 u) = A_2 (p(x) u'' + p'(x) u' + r(x) u)$$

$$= p^2(x) u^{IV} + 4p(x)p'(x)u''' + [3p(x)p''(x) + 2p'^2(x) + 2p(x)r(x)]u''$$

$$+[p(x)p'''(x) + 2p(x)r'(x) + p'(x)p''(x) + 2p'(x)r(x)]u'$$

$$+[p(x)r''(x) + p'(x)r'(x) + r^2(x)]u.$$

Ако $r(x) \not\equiv 0$, то членовете, съдържащи тази функция, ще бъдат прехвърлени да участват в $A_3 u$. Впрочем, такава по начало е и целта на въвеждането на оператора A_3.

Нека тогава предположим, че $r(x) \equiv 0$.

В такъв случай получаваме:

$$A_2\left(A_1 u\right) = p^2(x)u^{IV} + 4p(x)p'(x)u''' + \left[3p(x)p''(x) + 2p'^2(x)\right]u''$$

$$+ \left(p^2(x)u''\right)'' + \left[p'(x)p''(x)u'' + \left(p(x)p''(x)\right)' u'\right]$$

$$= \left(p^2(x)u''\right)'' + \left(p(x)p''(x)u'\right)'.$$

Използвайки последната зависимост и (1.11), лесно заключаваме, че $\alpha(x) = p^2(x)$. Предвид факта, че A_1 и A_2 са положителни оператори, то $p(x) = -\sqrt{\alpha(x)}$, а също така

$$\left(p^2(x)u''\right)'' = \left(p^2(x)u''\right)'' + \left(p(x)p''(x)u'\right)' + A_3 u.$$

Тогава

$$A_3 u = -\left(p(x)p''(x)u'\right)'$$

и следователно

$$(A_3 u, u_1) = -pp''u'u_1|_0^l + \int_0^l pp''u'u_1'\,dx.$$

Окончателно, уравнението (1.10) ще добие вида:

$$\begin{aligned} &\left(p(x)u'\sigma_1 + p(x)\sigma' u_1\right)|_0^l - \int_0^l p(x)[u'\sigma_1' + u_1'\sigma']\,dx \\ &-p(x)p''(x)u'u_1|_0^l + \int_0^l p(x)p''(x)u'u_1'\,dx = \lambda\int_0^l \rho F u u_1\,dx \end{aligned} \tag{1.12}$$

Сега вече идва ред на специфичните гранични условия, които ще определят слабата вариационна формулировка и нейната симетричност. По тази причина ще разгледаме поотделно случаите (1.2)-(1.7). За всяко $u_1 \in V$ и $\sigma_1 \in \Sigma$ получаваме:

Случай (a) Тъй като $\sigma = A_1 u = p(x)u'' + p'(x)u'$, то граничните условия на системата (1.8) се записват във вида

$$u(0) = u(l) = 0, \quad \sigma(0) = p'(0)u'(0), \quad \sigma(l) = p'(l)u'(l).$$

По такъв начин задачата (1.1), (1.2) притежава симетрична вариационна формулировка, а именно

$$\left.\frac{p}{p'}\sigma\sigma_1\right|_0^l - \int_0^l p(x)[u'\sigma_1' + u_1'\sigma']\,dx + \int_0^l pp''u'u_1'\,dx = \lambda\int_0^l \rho F u u_1\,dx.$$

Случай (б) Тук граничните условия са:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad \sigma(l) = p'(l)u'(l), \quad \sigma'(l) = p''(l)u'(l)$$

и тогава съответната смесена вариационна формулировка е:

$$\frac{p(l)}{p'(l)}\sigma(l)\sigma_1(l) - \int_0^l p(x)[u'\sigma_1' + u_1'\sigma']\,dx + \int_0^l pp''u'u_1'\,dx = \lambda\int_0^l \rho F u u_1\,dx.$$

Случай (в) При тези "класически" гранични условия уравнението (1.12) добива вида:

$$-\int_0^l p(x)[u'\sigma_1' + u_1'\sigma']\,dx + \int_0^l pp''u'u_1'\,dx = \lambda\int_0^l \rho F u u_1\,dx.$$

Случай (г): От условието $u''(0) = c_1 u'(0)$ следва, че

$$\sigma(0) = [c_1 p(0) + p'(0)]u'(0).$$

По същия начин, за $x = l$ следва, че

$$\sigma(l) = [-c_1 p(l) + p'(l)]u'(l).$$

Като използваме също, че $u(0) = u(l) = 0$, можем да запишем задачата (1.1),(1.5) във вида:

$$\frac{p(l)}{p'(l) - c_1 p(l)}\sigma(l)\sigma_1(l) - \frac{p(0)}{p'(0) + c_1 p(0)}\sigma(0)\sigma_1(0)$$
$$-\int_0^l p(x)[u'\sigma_1' + u_1'\sigma']\,dx + \int_0^l pp''u'u_1'\,dx = \lambda\int_0^l \rho F u u_1\,dx.$$

Случай (д) От условията (1.6) се получават зависимостите:

$$\begin{aligned}
\sigma(0) &= p'(0)\sigma'(0); \\
\sigma(l) &= p'(l)\sigma'(l); \\
\sigma'(0) &= p''(0)u'(0) - \frac{1}{c_1}u(0); \\
\sigma'(l) &= p''(l)u'(l) + \frac{1}{c_1}u(l).
\end{aligned}$$

Тогава, окончателният вид на (1.12) за този случай е:

$$\frac{p}{p'}\sigma\sigma_1\Big|_0^l + \frac{1}{c_1}\left[u(l)u_1(l) + u(0)u_1(0)\right] - \int_0^l p(x)[u'\sigma_1' + u_1'\sigma']\,dx$$

$$+ \int_0^l pp''u'u_1'\,dx = \lambda \int_0^l \rho F u u_1\,dx.$$

Случай (е) Условията в (1.7) за левия край $x = 0$ ни дават

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= p'(0)u'(0); \\ \sigma'(0) &= -\lambda c_1 p(0)u(0) + p''(0)u'(0) \end{aligned}$$

и тогава получаваме

$$\frac{p(0)}{p'(0)}\sigma(0)\sigma_1(0) - \lambda c_1 p^2(0)u(0)u_1(0) - \int_0^l p(x)[u'\sigma_1' + u_1'\sigma']\,dx$$

$$+ \int_0^l pp''u'u_1'\,dx = \lambda \int_0^l \rho F u u_1\,dx.$$

След като разгледахме всичките шест случая на гранични условия, можем да формулираме следната теорема:

Теорема 1.1 *Всичките задачи (1.1),(1.2)-(1.7) притежават симетрична смесена вариационна формулировка при следните условия за коефициентите на диференциалните оператори (виж също Забележка 1.1):*

$$\begin{array}{ccccc} r_1(x) & \equiv & r_2(x) & := & r(x); \\ p_1(x) & \equiv & p_2(x) & := & p(x); \\ q_1(x) & = & q_2(x) & = & p'(x). \end{array}$$

Забележка 1.1 *Трябва да подчертаем, че симетричната смесена вариационна формулировка за едномерна спектрална задача от четвърти ред в общия случай не е единствена. Нашите разглеждания се ограничиха до случая $r(x) = 0$, при който*

$$A_3 u = -\left(p(x)p''(x)u'\right)'.$$

Всеки друг нетривиален избор на диференцируемата функция $r(x) \geq 0$ би довел до различен, но също самоспрегнат диференциален оператор A_3 от втори ред:

$$\begin{aligned} A_3 u &= -\left(p(x)p''(x)u'\right)' - 2\left(p(x)r(x)u'\right)' \\ &\quad - \left[p(x)r''(x) + p'(x)r'(x) + r^2(x)\right]u. \end{aligned}$$

Забележка 1.2 *Подобни разглеждания за вариационните аспекти на едномерни спектрални задачи от четвърти ред са изследвани в [152]. Там акцент е поставен на случая, когато спектралният параметър λ фигурира в граничното условие и - за разлика от разглежданията в настоящия параграф - там се използва стандартен (а не смесен) вариант на вариационното представяне.*

1.3 Смесена вариационна формулировка за многомерни спектрални задачи от четвърти ред

И за многомерния случай ще се придържаме към същите означения за вариационните функционални пространства, както в предходния параграф - V и Σ. Ограничената област Ω, в която е дефинирана спектралната задача, принадлежи на R^d. От практическа гледна точка, разбира се, $d = 2, 3$, но многомерността дава отлична възможност за изследване на много по-общи диференциални оператори и разнообразни гранични условия.

И така, нека границата на областта $\Gamma = \partial\Omega$ е непрекъсната по Lipschitz. Да разгледаме строго елиптичните оператори от втори ред [38]

$$\mathcal{A}_i u(x) = p_i(x)\Delta u(x) + \sum_{j=1}^{d} q_{ij}(x)\partial_j u(x) + r_i(x)u(x), \quad i = 1, 2,$$

където Δ е операторът на Laplace, а $\partial_j u = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, d$, $x = (x_1, \dots, x_d)$.

Навсякъде в нашите разглеждания коефициентите на операторите са реални функции, които допускат непрекъснато продължение върху $\overline{\Omega}$.

Приемаме също, че $p_i(x) \in C^2(\Omega)$, $q_{ij}(x) \in C^1(\Omega)$, $r_i(x) \in C(\Omega)$, като $p_i(x) > 0$, $r_i(x) \geq 0$, $i = 1, 2$; $j = 1, \dots, d$.

Обект на изследване е следната спектрална задача от четвърти ред, записана в своята смесена формулировка:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 u(x) - \lambda c_1(x)u(x) &= \sigma(x), \\ \mathcal{A}_2 \sigma(x) - \lambda c_2(x)\sigma(x) &= b(x)u(x) + \lambda c_3(x)u(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.13}$$

с гранични условия ($s \in \Gamma$)

$$\begin{aligned}
\alpha_1(s)\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} + \beta_1(s)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma_1(s)\sigma + \delta_1(s)u &= \lambda(\varphi_1(s)\sigma + \psi_1(s)u), \\
\alpha_2(s)\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} + \beta_2(s)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma_2(s)\sigma + \delta_2(s)u &= \lambda(\varphi_2(s)\sigma + \psi_2(s)u),
\end{aligned} \tag{1.14}$$

като коефициентите на (1.14) са непрекъснати върху Γ, а $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ е производна по направление на външната нормала на областта.

Предвид линейната независимост на уравненията от системата (1.14), без ограничение на общността може да заключим, че ако $\alpha_1(s) \neq 0$, то $\alpha_2(s) = 0$.

Също така, $(\varphi_i, \psi_i) \neq (0,0)$ само ако $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0,0)$, $i = 1; 2$.

Системите (1.13), (1.14) представят възможно най-общия вид на многомерна спектрална задача от четвърти ред. Да подчертаем, че спектралният параметър λ фигурира както в дефиниционната област, така и върху нейната граница. Този тип задачи са интересни не само от математическа гледна точка, но имат и важно приложение в инженерната практика. Например, собствената стойност се появява в граничните условия най-вече когато разделяме променливите при задачи с динамични гранични условия [73, 81]. Друг важен пример е когато се изучават вибрациите и устойчивостта на оребрени плочи (виж напр. [152] и съответната литература там). Ефектът на усилващите ребра (стифнери) е подобен на този, при който някой от коефициентите на диференциалния оператор е делта-функцията на Dirac.

Основен момент за числените вариационни методи от смесен тип е изучаването на съответната слаба формулировка [151]. Тази постановка в общия случай не е единствена за дадена моделна задача [37, 38].

Нашата главна цел е да дадем някои достатъчни условия, при които слабата вариационна постановка на (1.13), (1.14) да бъде симетризуема. За да получим смесената вариационна задача, ще въведем функционалните пространства Σ и V, които са затворени подпространства на $H^1(\Omega)$, т.е.

$$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \subset \Sigma \times V \subseteq H^1(\Omega) \times H^1(\Omega).$$

За удобство в повечето случаи ще пропускаме да изписваме аргументите x и s. След умножаване на първото уравнение на (1.13) с функцията $\sigma_1 \in \Sigma$, а на второто – с $u_1 \in V$ и интегриране върху Ω, получаваме за всяко $\sigma_1 \in \Sigma$ и $u_1 \in V$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_1 u, \sigma_1) - \lambda(c_1 u, \sigma_1) &= (\sigma, \sigma_1), \\
(\mathcal{A}_2 \sigma, u_1) - \lambda(c_2 \sigma, u_1) &= (bu, u_1) + \lambda(c_3 u, u_1).
\end{aligned}$$

Тази система от две уравнения може да бъде записана във вида

$$(\mathcal{A}_1 u, \sigma_1) + (\mathcal{A}_2 \sigma, u_1) - (\sigma, \sigma_1) - (bu, u_1)$$

$$= \lambda \left\{ (c_1 u, \sigma_1) + (c_2 \sigma, u_1) + (c_3 u, u_1) \right\}.$$

Отчитайки граничните условия (1.14), последното равенство може да бъде презаписано чрез използване на съответните билинейни форми

$$\mathfrak{a}\left((\sigma,u),(\sigma_1,u_1)\right)=\lambda\mathfrak{b}\left((\sigma,u),(\sigma_1,u_1)\right),\quad \forall(\sigma_1,u_1)\in\Sigma\times V. \tag{1.15}$$

Видът на $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}-$формите ще бъде прецизиран по-нататък. Нашето изследване се съсредоточава върху представянето (1.15).

Като отчетем, че $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_d)$ и приложим формулата на Green [151], получаваме (навсякъде $\sum_j=\sum_{j=1}^d$):

$$(\mathcal{A}_1u,\sigma_1)+(\mathcal{A}_2\sigma,u_1)-(\sigma,\sigma_1)-(bu,u_1)$$

$$=\int_\Omega[p_1\Delta u\sigma_1+\sum_j q_{1j}\partial_j u\sigma_1+r_1u\sigma_1]\,dx$$

$$+\int_\Omega[p_2\Delta\sigma u_1+\sum_j q_{2j}\partial_j\sigma u_1+r_2\sigma u_1]\,dx-\int_\Omega\sigma\sigma_1\,dx-\int_\Omega buu_1\,dx$$

$$=\int_\Gamma[p_1\frac{\partial u}{\partial\nu}\sigma_1+p_2\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}u_1+\sum_j q_{2j}\nu_j\sigma u_1]\,ds$$

$$+\int_\Omega[-p_1\nabla u\cdot\nabla\sigma_1+\sum_j q_{1j}\partial_j u\sigma_1+r_1u\sigma_1]\,dx$$

$$+\int_\Omega[-p_2\nabla\sigma\cdot\nabla u_1-\sum_j q_{2j}\sigma\partial_j u_1+r_2\sigma u_1]\,dx-\int_\Omega\sigma\sigma_1\,dx-\int_\Omega buu_1\,dx,$$

където $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial}{\partial x_d}\right)$.

Търсим условия, при които изразите в горното равенство са симетрични по отношение на двойките (σ,u) и (σ_1,u_1).

За интегралите върху Ω това е осигурено, ако

$$p_1=p_2:=p;\quad q_{1j}=-q_{2j}:=q_j,\ j=1,\dots,d;\quad r_1=r_2:=r. \tag{1.16}$$

За да трансформираме интеграла върху границата

$$\int_\Gamma[p_1\frac{\partial u}{\partial\nu}\sigma_1+p_2\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}u_1+\sum_j q_{2j}\nu_j\sigma u_1]\,ds$$

$$=\int_\Gamma\left[M\left((\sigma,u),(\sigma_1,u_1)\right)+\lambda N\left((\sigma,u),(\sigma_1,u_1)\right)\right]ds,$$

ще използваме условията (1.14), а изразите M и N ще бъдат уточнени впоследствие.

За да осигурим симетричност на билинейната $\mathfrak{b}-$форма, се изисква:

$$c_1 = c_2 := c. \tag{1.17}$$

Нека да въведем следната детерминанта:

$$\Delta_{\alpha,\beta}(s) = \begin{vmatrix} \alpha_1(s) & \beta_1(s) \\ \alpha_2(s) & \beta_2(s) \end{vmatrix}, \quad s \in \Gamma,$$

и тогава възприемаме означенията $\Delta_{\alpha,\gamma},\ \Delta_{\beta,\gamma},\ \Delta_{\alpha,\varphi}$ и пр. съответно за останалите детерминанти от този вид.

Теорема 1.2 *Нека коефициентите на задачата (1.13), (1.14) притежават достатъчна гладкост (дефинирана в началото на настоящия § 1.3). Ако са изпълнени условията (1.16), (1.17), както и уравненията*

$$p(\Delta_{\alpha,\delta} + \Delta_{\beta,\gamma}) = \sum_j q_j \nu_j \Delta_{\alpha,\beta}, \tag{1.18}$$

$$\Delta_{\alpha,\psi} + \Delta_{\beta,\varphi} = 0, \tag{1.19}$$

то задачата за собствени стойности (1.15) в смесена формулировка е симетрична.

Доказателство. **Случай 1** Най-напред, нека собственият параметър λ възниква линейно в граничните условия. Тогава $\alpha_1(s) \neq 0$ и $\alpha_2(s) = 0$.

Случай 1.1 Нека $\Delta_{\alpha,\beta} \neq 0$, т.е. $\beta_2(s) \neq 0$.
Като пресметнем нормалните производни (в записа пропускаме аргумента $s \in \Gamma$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} &= \frac{1}{\Delta_{\alpha,\beta}} \{\Delta_{\beta,\gamma}\sigma + \Delta_{\beta,\delta}u - \lambda\Delta_{\beta,\varphi}\sigma - \lambda\Delta_{\beta,\psi}u\}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \frac{1}{\Delta_{\alpha,\beta}} \{-\Delta_{\alpha,\gamma}\sigma - \Delta_{\alpha,\delta}u + \lambda\Delta_{\alpha,\varphi}\sigma + \lambda\Delta_{\alpha,\psi}u\}, \end{aligned}$$

ще получим

$$\begin{aligned} & p\frac{\partial u}{\partial \nu}\sigma_1 + p\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}u_1 - \sum_j q_j\nu_j\sigma u_1 \\ = & \frac{p}{\Delta_{\alpha,\beta}} \{-\Delta_{\alpha,\gamma}\sigma\sigma_1 - \Delta_{\alpha,\delta}u\sigma_1 + \Delta_{\beta,\gamma}\sigma u_1 + \Delta_{\beta,\delta}uu_1\} - \sum_j q_j\nu_j\sigma u_1 \\ & + \frac{\lambda p}{\Delta_{\alpha,\beta}} \{\Delta_{\alpha,\varphi}\sigma\sigma_1 + \Delta_{\alpha,\psi}u\sigma_1 - \Delta_{\beta,\varphi}\sigma u_1 - \Delta_{\beta,\psi}uu_1\}. \end{aligned}$$

По такъв начин в този случай изразите за M и N могат да бъдат определени:

$$M = \frac{1}{\Delta_{\alpha,\beta}} \left\{ -p\Delta_{\alpha,\gamma}\sigma\sigma_1 - p\Delta_{\alpha,\delta}u\sigma_1 + (p\Delta_{\beta,\gamma} - \Delta_{\alpha,\beta}\sum_j q_j\nu_j)\sigma u_1 + p\Delta_{\beta,\delta}uu_1 \right\},$$

$$N = \frac{p}{\Delta_{\alpha,\beta}} \left\{ \Delta_{\alpha,\varphi}\sigma\sigma_1 + \Delta_{\alpha,\psi}u\sigma_1 - \Delta_{\beta,\varphi}\sigma u_1 - \Delta_{\beta,\psi}uu_1 \right\}.$$

Лесно се проверява, че условията (1.18) и (1.19) гарантират симетрия съответно на билинейните форми $\mathfrak{a}(\cdot,\cdot)$ и $\mathfrak{b}(\cdot,\cdot)$ в уравнение (1.15).

Случай 1.2 $\Delta_{\alpha,\beta} = 0$ и $\Delta_{\alpha,\gamma} \neq 0$.
Това означава, че $\beta_2(s) = 0,\ \gamma_2(s) \neq 0$.

В такъв случай

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial\nu} &= \frac{1}{\Delta_{\alpha,\gamma}} \left\{ -\Delta_{\beta,\gamma}\frac{\partial u}{\partial\nu} + \Delta_{\gamma,\delta}u + \lambda\frac{\Delta_{\alpha,\delta}}{\Delta_{\alpha,\gamma}}u - \lambda\Delta_{\gamma,\psi}u \right\}, \\ \sigma &= -\frac{\Delta_{\alpha,\delta}}{\Delta_{\alpha,\gamma}}u. \end{aligned}$$

Така достигаме до зависимостта

$$\begin{aligned} & p\frac{\partial u}{\partial\nu}\sigma_1 + p\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}u_1 - \sum_j q_j\nu_j\sigma u_1 \\ = & \frac{p}{\Delta_{\alpha,\gamma}} \left\{ -\Delta_{\alpha,\delta}\frac{\partial u}{\partial\nu}u_1 - \Delta_{\beta,\gamma}\frac{\partial u}{\partial\nu}u_1 + \Delta_{\gamma,\delta}uu_1 \right\} + \frac{1}{\Delta_{\alpha,\gamma}}\sum_j q_j\nu_j\Delta_{\alpha,\delta}uu_1 \\ & + \frac{\lambda p}{\Delta_{\alpha,\gamma}} \left\{ \frac{\Delta_{\gamma,\varphi}\Delta_{\alpha,\delta}}{\Delta_{\alpha,\gamma}} - \Delta_{\gamma,\psi} \right\} uu_1 \end{aligned}$$

и можем да запишем, че

$$M = \frac{1}{\Delta_{\alpha,\gamma}} \left\{ -p(\Delta_{\alpha,\delta} + \Delta_{\beta,\gamma})\frac{\partial u}{\partial\nu}u_1 + (p\Delta_{\gamma,\delta} + \sum_j q_j\nu_j\Delta_{\alpha,\delta})uu_1 \right\},$$

$$N = \frac{p}{\Delta_{\alpha,\gamma}} \left\{ \frac{\Delta_{\gamma,\varphi}\Delta_{\alpha,\delta}}{\Delta_{\alpha,\gamma}} - \Delta_{\gamma,\psi} \right\} uu_1.$$

Условието (1.18), по отношение на допускането $\Delta_{\alpha,\beta} = 0$ (и, следователно, $\Delta_{\alpha,\varphi} = \Delta_{\alpha,\psi} = 0$), ни дава зависимостта

$$p\Delta_{\alpha,\delta} + p\Delta_{\beta,\gamma} = 0.$$

Случай 1.3 $\Delta_{\alpha,\beta} = \Delta_{\alpha,\gamma} = 0,\ \Delta_{\alpha,\delta} \neq 0.$
При тези предположения, граничните условия имат следното представяне:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma_1 \sigma &= \lambda \varphi_1 \sigma, \\ u &= 0. \end{aligned}$$

Следователно

$$p\frac{\partial u}{\partial \nu}\sigma_1 + p\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}u_1 - \sum_j q_j \nu_j \sigma u_1 = p\frac{\partial u}{\partial \nu}\sigma_1.$$

Тогава условието (1.18) не е изпълнено и задачата не е симетрична.

Случай 2 Да се спрем на случаите, когато $\alpha_1(s) = \alpha_2(s) = 0,\ \beta_1(s) \neq 0,\ \beta_2(s) = 0$ и $\varphi_2(s) = \psi_2(s) = 0$.

Случай 2.1 $\Delta_{\beta,\gamma} \neq 0$, т.е. $\gamma_2(s) \neq 0$.
Имаме зависимостите

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \frac{1}{\Delta_{\beta,\gamma}}\left\{\Delta_{\gamma,\delta}u - \lambda\frac{\Delta_{\gamma,\varphi}\Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}}u + \lambda\Delta_{\gamma,\psi}u\right\}, \\ \sigma &= -\frac{\Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}}u. \end{aligned}$$

Получаваме

$$\begin{aligned} & p\frac{\partial u}{\partial \nu}\sigma_1 + p\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}u_1 - \sum_j q_j \nu_j \sigma u_1 \\ = & \frac{p}{\Delta_{\beta,\gamma}}\left\{-\frac{\Delta_{\gamma,\delta}\Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}}uu_1 + \Delta_{\beta,\gamma}\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}u_1\right\} + \frac{\Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}}\sum_j q_j \nu_j u u_1 \\ & -\frac{\lambda p}{\Delta_{\beta,\gamma}}\left\{\frac{\Delta_{\gamma,\varphi}\Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}} - \Delta_{\gamma,\psi}\right\}uu_1. \end{aligned}$$

Да означим в този случай

$$M = \frac{\Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}}\left\{\sum_j q_j \nu_j - p\frac{\Delta_{\gamma,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}}\right\}uu_1 + p\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}u_1,$$

$$N = -\frac{p}{\Delta_{\beta,\gamma}}\left\{\frac{\Delta_{\gamma,\varphi}\Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}} - \Delta_{\gamma,\psi}\right\}uu_1.$$

И в този случай условие (1.18) не е удовлетворено и задачата не допуска симетрично представяне в смесен вид.

Случай 2.2 $\Delta_{\beta,\gamma} = 0,\ \Delta_{\beta,\delta} \neq 0$, т.е. $\delta_2(s) \neq 0$. Тогава граничните условия са:

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma_1 \sigma &= \lambda \varphi_1 \sigma, \\ u &= 0, \end{aligned}$$

и от това следва

$$\begin{aligned} & p\frac{\partial u}{\partial \nu}\sigma_1 + p\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}u_1 - \sum_j q_j \nu_j \sigma u_1 \\ & = \frac{p}{\beta_1}\left\{-\gamma_1 + \lambda\varphi_1\right\}\sigma\sigma_1, \end{aligned}$$

така че условията (1.18) и (1.19) са удовлетворени.

Случай 3 Нека $(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = (\beta_1(s), \beta_2(s)) = (0,0),\ \gamma_1(s) \neq 0$. Тогава $\gamma_2(s) = 0$ и още $(\varphi_i(s), \psi_i(s)) = (0,0),\ i = 1,2$.

При такава зависимост на коефициентите в (1.14) граничните условия са $u = 0,\ \sigma = 0$ и

$$p\frac{\partial u}{\partial \nu}\sigma_1 + p\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}u_1 - \sum_j q_j \nu_j \sigma u_1 = 0.$$

След изчерпване на всички възможни случаи теоремата е доказана.

■

Забележка 1.3 *Резултатът от теоремата е в сила и когато* $\Gamma = \cup_k \Gamma_k$, *като* $meas\,(\Gamma_k) \neq 0$, *при условие, че (1.18) и (1.19) са изпълнени върху всяка част* Γ_k *от границата.*

Доказаната теорема дава достатъчно условие за представяне на задачата за собствени стойности от четвърти ред в симетрична смесена вариационна постановка. Общият вид на диференциалната система (1.13) тогава ще бъде

$$\begin{aligned} p\Delta u + \textstyle\sum_j q_j \partial_j u + ru - \lambda c u &= \sigma, \\ p\Delta \sigma - \textstyle\sum_j q_j \partial_j \sigma + r\sigma - \lambda c \sigma &= bu + \lambda c_3 u. \end{aligned}$$

Оттук се получава следното изходно диференциално уравнение:

$$\begin{aligned} & p^2\Delta^2 u + 2pr\Delta u - \sum_{i,j=1}^{d} q_i q_j \partial_{ij}^2 u + (r^2 - b)u \\ & = \lambda\left[2pc\Delta u + 2rcu + c_3 u\right] - \lambda^2 c^2 u. \end{aligned}$$

Последното уравнение показва, че нашите разглеждания включват и случай, когато собственият параметър фигурира нелинейно (при условие, че $c(x) \neq 0$), т.е.

съществува едночлен, съдържащ λ^2. Трябва да подчертаем, че смесеният метод линеаризира такава задача, а тя има своето място в числовия анализ и в приложенията [59, 77].

Окончателно, симетричната спектрална задача от четвърти ред в смесена формулировка можем да запишем в най-общ вид като:

$$\mathfrak{a}((\sigma, u), (\sigma_1, u_1)) = \lambda \mathfrak{b}((\sigma, u), (\sigma_1, u_1)), \quad \forall(\sigma_1, u_1) \in \Sigma \times V,$$

където

$$\mathfrak{a}((\sigma, u), (\sigma_1, u_1)) = \int_\Omega [-p(\nabla u \cdot \nabla \sigma_1 + \nabla \sigma \cdot \nabla u_1 + \sum_j q_j(\sigma_1 \partial_j u + \sigma \partial_j\, u_1)$$

$$+r(u\sigma_1 + \sigma u_1)]\, dx - \int_\Omega (\sigma\sigma_1 + buu_1)\, dx + \int_\Gamma M((\sigma, u), (\sigma_1, u_1))\, ds,$$

$$\mathfrak{b}((\sigma, u), (\sigma_1, u_1)) = \int_\Omega [c(u\sigma_1 + \sigma u_1) + c_3 uu_1]\, dx - \int_\Gamma N((\sigma, u), (\sigma_1, u_1))\, ds.$$

Забележка 1.4 *За нуждите на числовия анализ за задачи, съдържащи собствената стойност в гранични условия, се налага дефиниране на специални Хилбертови пространства със съответни скаларни произведения и норми. Те отчитат особеностите на граничните условия (виж напр. [111, 152]).*

1.4 Постпроцедура и ускоряване на сходимостта за смесения МКЕ за бихармоничната спектрална задача

В този параграф се предлага една ефективна апостериорна процедура, която осигурява крайноелементна суперсходимост на собствените стойности и собствените функции за бихармоничната спектрална задача. Разглежданията се извършват за смесената вариационна формулировка върху равнинна област.

Първите резултати, свързани с бихармоничната спектрална задача, са тези на Canuto [53] и Ishihara [85]. Те използват резултатите от крайноелементния анализ, извършен от Miyoshi [106] и Brezzi [49]. По-нататък бе развит абстрактният анализ за сходимост на собствените стойности и вектори по МКЕ, базиран на общата теория на компактните оператори [38, 61]. Да отбележим още, че апроксимация на спектрални задачи е реализирана и чрез хибриден [54] и неконформен [117] МКЕ.

През последните няколко години бяха развити и анализирани различни процедури, които контролират грешката и ускоряват сходимостта на собствените двойки за различни модификации на метода. Така например Xu и Zhou [144] предложиха метод на двете мрежи за получаване на оценки от тип суперсходимост за елиптични спектрални задачи от втори ред. Друг пример се съдържа в [89], където се отчита остатъкът от априорната оценка, за да се предложи ефективна апостериорна процедура. И най-сетне, в [116] се дава ефективен апостериорен алгоритъм, който ускорява сходимостта на спектъра за самоспрегнат елиптичен оператор от ред $2m$ за стандартния МКЕ.

Изследванията в този параграф се явяват продължение на идеята в [152], където авторът използва стандартен (а не смесен) МКЕ.

Разглеждаме бихармоничната задача за собствени стойности: Търсим функция $u(x) \neq 0$ и число $\lambda \in \mathbf{R}$ такива, че да удовлетворяват диференциалното уравнение

$$\Delta^2 u(x) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = \lambda\, u(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.20}$$

и хомогенните гранични условия на Dirichlet

$$u(x) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1.21}$$

където $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ е ограничена област с достатъчно гладка граница $\Gamma \equiv \partial\Omega$, а ν е векторът по външната нормала на границата Γ.

Решението на (1.20), (1.21) е свързано с критичните честоти и форми при вибрации на изотропна и хомогенна плоча, която има постоянна дебелина и е с неподвижна граница [131].

Диференциалното уравнение лесно може да се приведе към смесена формулировка, т.е. да се раздели на две уравнения от втори ред:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \sigma, \\ -\Delta \sigma &= \lambda u \end{aligned} \tag{1.22}$$

при същите гранични условия (1.21). Смесената форма (1.22) вече ни отнася към задачи с две неизвестни полета – на преместванията и на напреженията. Това представяне е удобно за апроксимиране чрез смесения МКЕ. Действително, тогава се удвоява броят на степените на свобода, но в замяна на това регулярността на крайноелементните пространства се редуцира от C^1 към C^0.

Слабата вариационна форма на (1.22) ще получим по стандартен начин. Умножаваме първото уравнение на (1.22) с $\psi \in H^1(\Omega)$, второто - с $v \in H_0^1(\Omega)$ и интегрираме по части върху Ω. Така достигаме до интегралните равенства:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla\sigma \cdot \nabla v \, dx &= \lambda \int_\Omega uv \, dx, \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi \, dx &= \int_\Omega \sigma\psi \, dx, \end{aligned} \tag{1.23}$$

които очевидно са коректни за $u \in H_0^1(\Omega)$ и $\sigma \in H^1(\Omega)$. Така системата (1.23) се превръща в смесена вариационна форма на бихармоничната задача за собствени стойности.

Ще приложим стандартен подход (виж напр. [38]), за да сведем (1.23) към частен случай на спектрална задача за седловата точка.

Абстрактният вид на спектралната задача за седлова точка е свързан с три реални Хилбертови пространства V, Σ и H със съответните скаларни произведения и норми $(\cdot,\cdot)_V$, $||\cdot||_V$, $(\cdot,\cdot)_\Sigma$, $||\cdot||_\Sigma$, $(\cdot,\cdot)_H$ и $||\cdot||_H$, както и две билинейни форми $a(\psi,v)$ и $b(\sigma,\psi)$, дефинирани съответно върху $\Sigma\times V$ и $H\times H$. Допускаме, че $V\subset H$ и $\Sigma\subset H$.

Тогава абстрактната спектрална задача гласи (виж [38], стр. 752): Да се намери $(\sigma,u)\in\Sigma\times V$, $(\sigma,u)\neq(0,0)$ и $\lambda\in\mathbf{R}$ така, че

$$\begin{aligned} a(\psi,u)-b(\sigma,\psi) &= 0 && \forall\ \psi\in\Sigma,\\ a(\sigma,v) &= \lambda b(u,v) && \forall\ v\in V. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Тази задача е изследвана при следните предположения:

(A1): $a(\psi,v)$ е дефинирана върху $\Sigma\times V$ и удовлетворява неравенствата:

$$|a(\psi,v)|\le C_1||\psi||_\Sigma\ ||v||_V\quad \forall\psi\in\Sigma,\quad \forall v\in V, \tag{1.25}$$

$$\sup_{\psi\in\Sigma}|a(\psi,u)|>0\quad\forall\quad 0\neq u\in V; \tag{1.26}$$

(A2): билинейната форма $b(\sigma,\psi)$ е симетрична върху $H\times H$ и удовлетворява

$$b(\sigma,\psi)\le C_2||\sigma||_H\ ||\psi||_H,\quad \forall\psi,\sigma\in H, \tag{1.27}$$

$$b(\sigma,\sigma)>0,\ \forall\ 0\neq\sigma\in H. \tag{1.28}$$

Ако (A1) и (A2) са изпълнени, то задачата (1.24) има безброй много решения $(\lambda_j,(\sigma_j,u_j))$, $j=1,2,\ldots$. При това

$$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\nearrow\infty,$$

където $\sigma_j=-\Delta u_j, j=1,2,\ldots$.

Ако отнесем абстрактните функционални пространства към конкретни Соболеви пространства, а именно $H=L_2(\Omega)$, $\Sigma=H^1(\Omega)$ и $V=H_0^1(\Omega)$, а също и

$$a(\sigma,v)=\int_\Omega\nabla\sigma\cdot\nabla v\,dx,\quad b(\sigma,\psi)=\int_\Omega\sigma\ \psi\,dx,$$

то слабата формулировка (1.23) може да бъде записана в абстрактната форма (1.24): Да се намерят функции $(\sigma, u) \in \Sigma \times V$, $(\sigma, u) \neq (0,0)$ и число $\lambda \in \mathbf{R}$ такива, че

$$a(\psi, u) + a(\sigma, v) - b(\sigma, \psi) = \lambda b(u, v), \quad \forall (\psi, v) \in \Sigma \times V. \tag{1.29}$$

Може да определим и скаларните произведения (а оттам и съответните норми) на пространствата V, Σ и H:

$$(u, v)_V = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$(\sigma, \psi)_\Sigma = \int_\Omega (\nabla \sigma \cdot \nabla \psi + \sigma \psi) \, dx,$$

$$(u, v)_H = \int_\Omega uv \, dx.$$

Лесно се вижда например, че от дефиницията на $b(\cdot, \cdot)$ следва съвпадение със скаларното произведение в H и следователно тази билинейна форма е симетрична и коерцитивна в H. Аналогично, билинейната форма $a(\cdot, \cdot)$ е симетрична и коерцитивна във V и следователно тя определя скаларно произведение, което е еквивалентно със скаларното произведение на V (т.е. на $H_0^1(\Omega)$).

За нашия случай условията (1.25), (1.27) и (1.28) са очевидно удовлетворени. Остава да проверим само дали е изпълнено условие (1.26). Действително, тъй като $V \subset \Sigma$, налице е по-силно минимаксно условие за $a(\cdot, \cdot)$:

$$\sup_{0 \neq \psi \in \Sigma} \frac{|a(\psi, u)|}{\|\psi\|_\Sigma} \geq \sup_{0 \neq \psi \in V} \frac{|a(\psi, u)|}{\|\psi\|_V} \geq \frac{|a(u, u)|}{\|u\|_V} = \|u\|_V, \quad \forall\, u \in V. \tag{1.30}$$

Ако $(\lambda; (\sigma, u))$ е една собствена двойка на (1.24), то (λ, u) е собствена двойка на (1.20), (1.21) и $\sigma = -\Delta u$. По такъв начин гладкостта (регулярността) на решението (σ, u) е свързана с гладкостта на решението на задача (1.20), (1.21) (виж напр. [79], стр. 301).

Забележка 1.5 *Интерес представляват и други гранични условия. Например при модел на твърда деформируема плоча, неподвижно подпряна по границата, се достига до уравнение (1.20) с гранични условия*

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x) &= 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Ако областта Ω е многоъгълник, то второто гранично условие на (1.31) се редуцира в равенството $\Delta u = 0$ върху Γ и тогава смесената вариационна задача ще добие вида: Търсим $(\sigma, u) \in V \times V$, $(\sigma, u) \neq (0,0)$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ така, че

$$a(\psi, u) + a(\sigma, v) - b(\sigma, \psi) = \lambda b(u, v), \quad \forall (\psi, v) \in V \times V. \tag{1.32}$$

Лесно се вижда, че тази задача спада към класа от проблеми, които разглеждаме. Действително, тази задача е дори по-проста, тъй като двете билинейни форми $a(\psi, u)$ и $b(\sigma, \psi)$ са симетрични съответно върху $V \times V$ и $H \times H$.

Сега ще разгледаме крайноелементната апроксимация на (1.24). За целта, нека τ_h да е разделянето на Ω на краен брой крайни елементи (триъгълници или четириъгълници), което разделяне е регулярно (виж Ciarlet [56], стр. 38) с характеристичен размер h. Върху тази триангулация τ_h дефинираме крайноелементните пространства $V_h \subset V$ и $\Sigma_h \subset \Sigma$ от по части полиномиални функции от степен n (виж напр. [38], стр. 758). Понеже крайноелементните пространства са подпространства на $H^1(\Omega)$, функциите от V_h и Σ_h трябва да са непрекъснати, ето защо $n \geq 1$. Ще се нуждаем само от апроксимационните свойства на тези функции, т.е. можем да приемем, че

$$\inf_{v \in V_h} \{||u - v||_{0,\Omega} + h||\nabla(u - v)||_{0,\Omega}\} \leq Ch^{n+1}||u||_{n+1,\Omega},$$

а също и

$$\inf_{\psi \in \Sigma_h} \{||\sigma - \psi||_{0,\Omega} + h||\nabla(\sigma - \psi)||_{0,\Omega}\} \leq Ch^{n+1}||\sigma||_{n+1,\Omega}.$$

Добре известно е, че редът на сходимост при крайноелементните приближения на собствените стойности и собствени фунции зависи от гладкостта на точните собствени функции. За най-обща област, собствените функции на бихармоничната задача принадлежат на $H^2(\Omega)$. Допълнителна гладкост би могла да се осигури само при области с гладки граници. В такъв случай обаче се налага използване на изопараметрични крайни елементи, като изобщо $V_h \not\subset V$ и $\Sigma_h \not\subset \Sigma$ [119].

Основната ни идея е чрез подходяща апостериорна техника да достигнем по-висока скорост на сходимост при крайноелементната апроксимация както на собствените стойности, така и на собствените функции. За яснота на изложението ще предположим, че Ω е изпъкнал многоъгълник. Тогава за дадена функция $f \in L^2(\Omega)$, решението w на съответната (пораждаща) бихармонична задача

$$\begin{aligned} \Delta^2 w &= f && \text{в } \Omega, \\ w &= \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 && \text{върху } \Gamma \end{aligned} \tag{1.33}$$

ще принадлежи на $H^3(\Omega)$ (виж [79]). По-прецизни резултати, свързани с гладкостта на решенията на първа бихармонична задача, биха могли да се получат или с използване на Соболеви пространства с тегла (виж [45]), или пък като се работи с пространства на Соболев от нецял ред, получавайки подходящи априорни оценки [79]). Така например, в [45] бе показано, че ако максималният вътрешен ъгъл на границата е по-малък от 126.28^o, $f \in L_2(\Omega)$ и Ω е изпъкнал многоъгълник, то $w \in H^{3+s}(\Omega)$, където $0 < s \leq 1$ е параметър, зависещ от големината на максималния вътрешен ъгъл. Регулярността на изходната задача (1.33) се пренася към гладкостта на точното решение на съответната спектрална задача.

Апроксимацията на собствените двойки $(\lambda, (\sigma, u))$ посредством смесения МКЕ е следната: Търсим $\lambda_h \in \mathbf{R}$ и $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$ такива, че $b(u_h, u_h) = 1$ и

$$a(\psi, u_h) + a(\sigma_h, v) - b(\sigma_h, \psi) = \lambda_h b(u_h, v), \ \ \forall (\psi, v) \in \Sigma_h \times V_h. \tag{1.34}$$

Доказано е (виж напр. [38], Теорема 11.4, стр. 763 или [53]), че ако крайноелементните пространства съдържат по части полиномиални функции от степен $n \geq 2$ и $u \in H^{n+1}(\Omega)$, то

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_h| &\leq C\ h^{2n-2} \|u\|_{n+1,\Omega}, \\ \|u - u_h\|_{0,\Omega} &\leq C\ h^n \|u\|_{n+1,\Omega}, \end{aligned} \tag{1.35}$$

а също така

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} + h\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq C\ h^n \|u\|_{n+1,\Omega}. \tag{1.36}$$

Поради ограничения лимит на гладкост на точното решение не бихме могли да гарантираме, че оценките (1.35) и (1.36) са валидни при $n \geq 3$. Ако например Ω е изпъкнал многоъгълник и $n \geq 3$, вместо (1.35) и (1.36) ще имаме [105]:

$$\begin{aligned} &|\lambda - \lambda_h| \leq C\ h^{2+2s} \|u\|_{3+s,\Omega}, \\ &\|u - u_h\|_{1,\Omega} + h\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq C\ h^{2+s} \|u\|_{3+s,\Omega}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Тук параметърът $0 < s \leq 1$ зависи от максималния вътрешен ъгъл на границата $\partial\Omega$ (виж [45, 78]). За правоъгълна област $s = 1$ и тогава (1.37) дава оптимална скорост на сходимост.

Случаят $n = 1$ ще бъде разгледан допълнително.

Забележка 1.6 *Неравенствата (1.35) и (1.36) показват, че при $n = 2$ оценките за смесения МКЕ за собствените стойности и собствени функции за задачи от четвърти ред имаме оптималност както за осигурената регулярност, така и за реда на сходимост. В този случай се наблюдава и онази зависимост между различните оценки както при спектралните задачи от втори ред, а именно, редът на сходимост за собствените стойности е два пъти по-голям от реда на сходимост за собствените функции в основната (енергетична) норма. Все пак, при многоъгълни области и крайни елементи от степен, по-голяма или равна на три, се забелязва намаляване на реда на сходимост поради евентуалното влошаване на гладкостта на точното решение. Ето защо може да заключим, че за многоъгълни области е добре да използваме апроксимиращи полиноми от степен най-много трета.*

Сега ще предложим една относително елементарна за прилагане процедура, която дава по-добро приближение както за собствените стойности, така и за собствените функции. Тази процедура изисква да решим оригиналната спектрална задача чрез полиноми от степен n и след това да решим една допълнителна изходна елиптична задача. За тази втора (по-лесна) задача може да се използва или по-фина мрежа, или полиноми от по-висока степен, а именно $n + 1$.

За да получим оценки на грешката за приближените собствени двойки $(\lambda_h, (\sigma_h, u_h))$, ще изучим съответната изходна елиптична задача в смесена формулировка. Тя гласи, че ако ни е дадена функция $f \in L_2(\Omega)$, търсим $(\tau, w) \in \Sigma \times V$ така, че

$$a(\psi, w) + a(\tau, v) - b(\tau, \psi) = b(f, v), \quad \forall (\psi, v) \in \Sigma \times V. \tag{1.38}$$

Решението (τ, w) определя *компонентни разрешаващи оператори*:

$$S : L_2(\Omega) \to \Sigma, \quad Sf = \tau,$$
$$T : L_2(\Omega) \to V, \quad Tf = w.$$

Решението $(\lambda, (\sigma, u))$ на спектралната задача (1.24) ще удовлетворява следните зависимости, изразени посредством операторите T и S:

$$\sigma = \lambda\ Su \quad \text{и} \quad u = \lambda\ Tu.$$

Действително, да разгледаме задача (1.38) с дясна част $f = \lambda u$, където $(\lambda, (\sigma, u))$ е решение на (1.24). В този случай решението на (1.38) е

$$(S(\lambda u), T(\lambda u)) = (\lambda Su, \lambda Tu),$$

т.е.

$$a(\psi, \lambda Tu) + a(\lambda Su, v) - b(\lambda Su, \psi) = b(\lambda u, v), \quad \forall (\psi, v) \in \Sigma \times V. \tag{1.39}$$

Сравнявайки (1.39) и (1.29) се вижда, че $(\lambda Su, \lambda Tu)$ и (σ, u) са решения на една и съща изходна елиптична задача. Поради условието за единственост, тези решения трябва да съвпадат, т.е. $\sigma = \lambda\ Su$ и $u = \lambda\ Tu$.

По подобен начин ще извършим разсъжденията за смесената крайноелементна апроксимация: Търсим $(\tau_h, w_h) \in \Sigma_h \times V_h$ такива, че

$$a(\psi, w_h) + a(\tau_h, v) - b(\tau_h, \psi) = b(f, v), \quad \forall (\psi, v) \in \Sigma_h \times V_h,$$

които определят *дискретни компонентни разрешаващи оператори*:

$$S_h : L_2(\Omega) \to \Sigma_h, \quad S_h f = \tau_h,$$
$$T_h : L_2(\Omega) \to V_h, \quad T_h f = w_h.$$

Очевидно операторите S, T, S_h и T_h удовлетворяват следните тъждества:

$$a(\psi, Tf) + a(Sf, v) - b(Sf, \psi) = b(f, v), \quad \forall\ \psi \in \Sigma,\ \forall\ v \in V,$$

и също така

$$a(\psi, T_h f) + a(S_h f, v) - b(S_h f, \psi) = b(f, v), \quad \forall\ \psi \in \Sigma_h,\ \forall\ v \in V_h.$$

Впрочем, $(S_h f,\ T_h f)$ е "проектор на Ritz" на $(Sf,\ Tf)$ върху крайноелементното пространство $\Sigma_h \times V_h$, а именно, приближението удовлетворява тъждеството

$$a(\psi, Tf - T_h f) + a(Sf - S_h f, v) - b(Sf - S_h f, \psi) = 0, \quad \forall\ \psi \in \Sigma_h,\ \forall\ v \in V_h.$$

Нека сега да разгледаме разрешаващия оператор T и фамилията от разрешаващи оператори $\{T_h\}$ върху функционалното пространство $L_2(\Omega)$.

Имаме равенството (виж Falk и Osborn [75])

$$\|Tf - T_h f\|_{0,\Omega} = \|w - w_h\|_{0,\Omega} \leq C\, h^2 \|Tf\|_{3,\Omega}.$$

Условията за регулярност ни дават още

$$\|Tf\|_{3,\Omega} \leq C\|f\|_{0,\Omega},$$

така че получаваме

$$\|T - T_h\| = \sup_{f \in L_2(\Omega)} \frac{\|(T - T_h)f\|_{0,\Omega}}{\|f\|_{0,\Omega}} \leq Ch^2.$$

Следователно

$$\|T - T_h\| \to 0, \quad \text{когато} \quad h \to 0.$$

Тъй като операторите T_h имат крайна кратност, т.е $\dim \mathcal{R}(T_h) < \infty$, то T_h са компактни. Последната граница утвърждава, че T също е компактен оператор. По този начин, собствените двойки $(\lambda, (\sigma, u))$ от (1.24) могат да бъдат определени чрез оператора T. Това означава, че ако $(\lambda, (\sigma, u))$ е решение на (1.24), то $\lambda T u = u,\ u \neq 0$, и обратно, ако $\lambda T u = u,\ u \neq 0$, то съществува функция $\sigma = S(\lambda u),\ \sigma \in \Sigma$ такава, че $(\lambda, (\sigma, u))$ е собствена двойка на задачата (1.24). Окончателно, λ е собствена стойност на (1.24) тогава и само тогава, когато λ^{-1} е собствена стойност на оператора T.

Операторите T и T_h са симетрични по отношение на скаларното произведение, дефинирано от билинейната форма $b(\cdot,\cdot)$. Действително, за всеки две функции $u,\ v \in V$ имаме следната последователност от равенства:

$$\begin{aligned}
b(u, Tv) &= a(Su, Tv) && \text{(от дефиницията на оператора } S)\\
&= b(Su, Sv) && \text{(от дефиницията на оператора } T)\\
&= b(Sv, Su) && \text{(от симетричността на формата } b(\cdot,\cdot))\\
&= a(Sv, Tu) && \text{(от дефиницията на оператора } T)\\
&= b(v, Tu) && \text{(от дефиницията на оператора } S)\\
&= b(Tu, v).
\end{aligned}$$

Същите разсъждения могат да бъдат проведени за дискретната задача, така че и T_h е симетричен относно скаларното произведение $b(\cdot,\cdot)$ и приближените собствени стойности, които са определени от уравнението (1.34) могат да бъдат характеризирани чрез спектъра на оператора T_h. Именно, λ_h е собствена стойност на (1.34) тогава и само тогава, когато λ_h^{-1} е собствена стойност на оператора T_h.

Както е доказано от Falk и Osborn [75], в сила е следната оценка:

$$\begin{aligned} \|(T-T_h)f\|_{1,\Omega} &+ h\|(S-S_h)f\|_{0,\Omega} \\ &+ h^2\|\nabla(S-S_h)f\|_{0,\Omega} \le Ch^n\|Tf\|_{n+1,\Omega}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Нека е вече намерено едно приближено решение $(\lambda_h,(\sigma_h,u_h))$ от смесения МКЕ (1.34). Тогава ще решаваме елиптичната задача (1.38) с дясна част u_h и неизвестни функции $(\widetilde{\tau},\widetilde{w})$:

$$a(\psi,\widetilde{w})+a(\widetilde{\tau},v)-b(\widetilde{\tau},\psi)=b(u_h,v),\quad \forall\ \psi\in\Sigma,\forall\ v\in V. \tag{1.41}$$

Решението на тази задача в термините на операторите S и T се записва като $(\widetilde{\tau},\widetilde{w})=(Su_h,Tu_h)$.

Да допуснем за момент, че разполагаме с решението $(\widetilde{\tau},\widetilde{w})$ на уравнението (1.41). Тогава можем да определим числото

$$\widetilde{\lambda}=\frac{1}{b(u_h,Tu_h)}=\frac{1}{b(u_h,\widetilde{w})}. \tag{1.42}$$

В следващата теорема ще покажем, че $\widetilde{\lambda}$ дава едно добро приближение на λ:

Теорема 1.3 *Нека $(\lambda,(\sigma,u))$ е една собствена двойка на задачата (1.24), $(\lambda_h,(\sigma_h,u_h))$ $\in \mathbf{R}\times\Sigma_h\times V_h$ е нейно крайноелементно приближение, получено чрез (1.34) и собствените функции са нормирани: $\|u\|_{0,\Omega}=\|u_h\|_{0,\Omega}=1$. Нека също $\widetilde{\lambda}$ е определено от (1.42), където $\widetilde{w}$ е решение на (1.41).*

Тогава

$$|\lambda-\widetilde{\lambda}|\le C\ \|u-u_h\|_{0,\Omega}^2. \tag{1.43}$$

Доказателство. Отчитайки симетричността на оператора T по отношение на скаларното произведение $b(\cdot,\cdot)$, равенството $u=\lambda Tu$, както и факта, че собствените функции са нормирани $b(u,u)=b(u_h,u_h)=1$, лесно получаваме, че:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}} &= b(u, Tu) - b(u_h, Tu_h) \\
&= b(u, Tu) - b(u_h, Tu_h) + b(u - u_h, T(u - u_h)) \\
&\quad - b(u - u_h, T(u - u_h)) \\
&= 2b(u, Tu) - 2b(u_h, Tu) - b(u - u_h, T(u - u_h)) \\
&= \frac{1}{\lambda} b(u - u_h, u - u_h) - b(u - u_h, T(u - u_h)).
\end{aligned}
$$

Тъй като

$$
b(u - u_h, T(u - u_h)) \leq \|u - u_h\|_{0,\Omega} \|T(u - u_h)\|_{0,\Omega} \leq \|T\| \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2,
$$

то

$$
|\lambda - \widetilde{\lambda}| \leq \lambda \widetilde{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} + \|T\| \right) \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 \leq C \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2.
$$

Така в последното неравенство ограничеността на оператора T осигурява оценката (1.43).

■

Като следствие от оценката (1.43) и тези от (1.35) можем да заключим, че е налице едно значително подобряване на точността, т.е. че при $n \geq 2$

$$
|\lambda - \widetilde{\lambda}| \leq C\, h^{2n}, \quad \text{ако} \quad u \in H^{n+1}(\Omega).
$$

Това е съществено ускоряване на сходимостта в сравнение с оценката (1.35).

За многоъгълна област Ω се получава малко по-лоша оценка при $n \geq 3$ (защото се налага да отчетем (1.37)!):

$$
|\lambda - \widetilde{\lambda}| \leq C\, h^{2(2+s)}, \quad \text{тъй като} \quad u \in H^{3+s}(\Omega).
$$

Да припомним, че $0 < s \leq 1$ зависи от максималния вътрешен ъгъл на границата.

Доказаната Теорема 1.3 е много важна от теоретична гледна точка. За практически цели обаче не би могла да бъде полезна, тъй като едва ли можем да получим точното решение на елиптичната задача (1.41). За да направим нашия резултат полезен за компютърни пресмятания, се налага да получим подходящо приближение на $\widetilde{\lambda}$. Тук предлагаме два практически подхода за такова приближение. Първият подход е "методът на двете мрежи", предложен от Xu и Zhou [144] за спектрални задачи от втори ред. Вторият подход, предложен и изучен от Андреев и Рачева [116], използва същото разделяне на областта Ω, но елементите с които се решава задачата, са от по-висока степен.

Първият подход използва много по-фина мрежа с размер h^2 с цел апроксимиране на $\widetilde{\lambda}$ с порядък $\mathcal{O}(h^{2n})$. Предимството на този подход е, че за решаване на елиптичната задача използваме същите крайни елементи и не се изисква по-висока регулярност на точното решение. Недостатъкът е, че се налага генериране на значително по-гъста мрежа.

Вторият подход е базиран на едно и също крайноелементно разделяне τ_h, но полиномите са от степен $n+1$. Тук се налага генерираните матрици да се получават от елементи с по-висока степен с цел получаване на апроксимация на $\widetilde{\lambda}$ от ред $\mathcal{O}(h^{2n})$. Освен това е нужна малко по-висока регулярност на решението u (виж следващата забележка).

По-долу ще дискутираме и двата подхода по един и същ абстрактен модел. За целта, въвеждаме крайноелементните функционални пространства $\widetilde{\Sigma}_h \times \widetilde{V}_h \subset \Sigma \times V$ от непрекъснати функции. Предполагаме също, че $\Sigma_h \times V_h \subset \widetilde{\Sigma}_h \times \widetilde{V}_h$.

Нека сега разгледаме дискретната елиптична (изходна) задача: Търсим $(\widetilde{\tau}_h, \widetilde{w}_h) \in \widetilde{\Sigma}_h \times \widetilde{V}_h$ така, че

$$a(\psi, \widetilde{w}_h) + a(\widetilde{\tau}_h, v) - b(\widetilde{\tau}_h, \psi) = b(u_h, v), \quad \forall \psi \in \widetilde{\Sigma}_h, \ \forall v \in \widetilde{V}_h. \tag{1.44}$$

Решението на тази задача $(\widetilde{\tau}_h, \widetilde{w}_h)$ може да бъде представено като $\widetilde{\tau}_h = \widetilde{S}_h u_h$ и $\widetilde{w}_h = \widetilde{T}_h u_h$, където $\widetilde{S}_h$ и $\widetilde{T}_h$ са разрешаващи оператори, свързани с крайноелементното пространство $\widetilde{\Sigma}_h \times \widetilde{V}_h$.

Сега ще дадем апостериорния алгоритъм, който дава по-добри приближения както на собствените стойности, така и на собствените функции на смесената вариационна задача (1.29).

Алгоритъм 1.1

1. Да се реши спектралната задача (1.34) и да се определят $\lambda_h \in \mathbf{R}$ и $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$.

2. Да се реши елиптичната задача (1.44) и да се намери $(\widetilde{\tau}_h, \widetilde{w}_h) \in \widetilde{\Sigma}_h \times \widetilde{V}_h$.

3. Да се пресметне
$$\widetilde{\lambda}_h = b(u_h, \widetilde{T}_h u_h)^{-1} = b(u_h, \widetilde{w}_h)^{-1}. \tag{1.45}$$

4. Да се определят функциите
$$\widetilde{u}_h = \widetilde{\lambda}_h \ \widetilde{w}_h (= \widetilde{\lambda}_h \ \widetilde{T}_h u_h), \quad \widetilde{\sigma}_h = \widetilde{\lambda}_h \ \widetilde{\tau}_h (= \widetilde{\lambda}_h \ \widetilde{S}_h u_h).$$

Собствената двойка $(\widetilde{\lambda}_h, (\widetilde{\sigma}_h, \widetilde{u}_h))$ представлява нова и значително по-добра апроксимация на $(\lambda, (\sigma, u))$ в сравнение с приближението $(\lambda_h, (\sigma_h, u_h))$.

Сега ще изучим реда на сходимост на полученото според Алгоритъм 1.1 подобрено решение посредством оценка на грешката за $\widetilde{\lambda}_h$ и $(\widetilde{\sigma}_h, \widetilde{u}_h))$.

Теорема 1.4 *Нека* $(\lambda, (\sigma, u))$ *е собствена двойка на задача (1.24) и нека* $(\widetilde{\tau}_h, \widetilde{w}_h))$ *и* $\widetilde{\lambda}_h, (\widetilde{\sigma}_h, \widetilde{u}_h))$ *са определени съгласно Алгоритъм 1.1. Ако собствените функции са нормирани посредством* $\|u\|_{0,\Omega} = \|u_h\|_{0,\Omega} = 1$, *то*

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq C \left(\|u - u_h\|^2_{0,\Omega} + \|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|_{1,\Omega} \|\widetilde{w} - \widetilde{w}_h\|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|^2_{0,\Omega} \right). \tag{1.46}$$

Константата C *би могла да зависи от* λ, *но не зависи от параметъра* h.

Доказателство. Нека най-напред да отбележим, че

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq |\lambda - \widetilde{\lambda}| + |\widetilde{\lambda} - \widetilde{\lambda}_h|.$$

Първото събираемо в дясната страна на неравенството беше вече оценено чрез (1.43), така че за да докажем теоремата, трябва да оценим второто събираемо.

Като използваме дефиницията на $\widetilde{\lambda}$ и $\widetilde{\lambda}_h$ и свойствата на операторите T и $\widetilde{T}_h$, получаваме

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\widetilde{\lambda}} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_h} &= b(u_h, \widetilde{w}) - b(u_h, \widetilde{w}_h) \\
&= [2a(\widetilde{\tau}, \widetilde{w}) - b(\widetilde{\tau}, \widetilde{\tau})] - [2a(\widetilde{\tau}_h, \widetilde{w}_h) - b(\widetilde{\tau}_h, \widetilde{\tau}_h)] \\
&= 2a(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{w} - \widetilde{w}_h) - b(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h) \\
&\quad +2\left[a(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{w}_h) - b(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{\tau}_h) + a(\widetilde{\tau}_h, \widetilde{w} - \widetilde{w}_h)\right] \\
&= 2a(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{w} - \widetilde{w}_h) - b(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h).
\end{aligned}$$

Тук използвахме следното тъждество, което се удовлетворява от решенията на елиптичните задачи (1.41) и (1.44):

$$a(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, v) - b(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \psi) + a(\psi, \widetilde{w} - \widetilde{w}_h) = 0, \quad \forall\ (\psi, v) \in \widetilde{\Sigma}_h \times \widetilde{V}_h$$

чрез заместване съответно на ψ с $\widetilde{\tau}_h$ и v с $\widetilde{w}_h$.

Така от горното неравенство стигаме до следната оценка:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\widetilde{\lambda}} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_h}\right| &\leq 2|a(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{w} - \widetilde{w}_h)| + |b(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h)| \\
&\leq 2\|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|_{1,\Omega} \|\widetilde{w} - \widetilde{w}_h\|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|^2_{0,\Omega},
\end{aligned}$$

която, заедно с (1.43), завършва доказателството на (1.46).

■

Ключов момент в Алгоритъм 1.1 е конструирането на подходящи крайноелементни пространства $\widetilde{\Sigma}_h$ и $\widetilde{V}_h$ за решаване на дискретната задача (1.44). По-долу излагаме двата практически подхода за решаването на тази задача.

Метод 1 ("метод на двете мрежи"[144])

Нека $\widetilde{\Sigma}_h$ и $\widetilde{V}_h$ са пространства от непрекъснати функции, които са по части полиноми от степен n върху разделянето $\widetilde{\tau}_h$ с характеристичен мрежов параметър h^β, където $\beta > 1$ (β ще бъде прецизирано впоследствие). Това е по-гъста мрежа, която би могла да бъде получена чрез многонивово сгъстяване на оригиналния грид τ_h [144].

Първо да разгледаме случая, когато задача (1.33) има гладко решение. Нашият анализ ще се ограничи до $n \le 4$, тъй като регулярността на решението $\widetilde{w}$, която може да бъде гарантирана при дясна част от $H^1(\Omega)$, е $H^5(\Omega)$.

Избирайки $\beta = n/(n-1)$ и прилагайки резултата от Теорема 1.4 и оценката (1.40) за $\widetilde{w}_h$, получаваме

$$
\begin{aligned}
|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| &\le C(\|u - u_h\|^2_{0,\Omega} + \|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|_{1,\Omega}\|\widetilde{w} - \widetilde{w}_h\|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|^2_{0,\Omega}) \\
&\le Ch^{2n}(\|Tu\|^2_{n+1,\Omega} + \|Tu_h\|^2_{n+1,\Omega}), \quad n \le 4.
\end{aligned}
$$

Тази оценка е в сила и за област, която е изпъкнал многоъгълник и пространства от по части полиноми от степен $n = 2$. В този случай решението е от $H^3(\Omega)$ и може да вземем $\beta = 2$. Тогава точността ще бъде $\mathcal{O}(h^4)$. Това е значително подобряване на реда на сходимост, защото, ако сравним с (1.35), то там оценката е $|\lambda - \lambda_h| = \mathcal{O}(h^2)$.

За $n = 3, 4$ и Ω – изпъкнал многоъгълник, ще използваме оценка (1.37), за да получим

$$
\begin{aligned}
|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| &\le C(\|u - u_h\|^2_{0,\Omega} + \|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|_{1,\Omega}\|\widetilde{w} - \widetilde{w}_h\|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|^2_{0,\Omega}) \\
&\le C(h^{2(2+s)}\|Tu\|^2_{3+s,\Omega} + h^{2\beta(1+s)}\|Tu_h\|^2_{3+s,\Omega}).
\end{aligned}
$$

За да балансираме двете събираеми в дясната страна на горното неравенство, трябва да изберем стойността на параметъра β. Знаем, че решението е от $H^{3+s}(\Omega)$, $0 < s \le 1$. Ако ни е известна стойността на s, то можем да изберем $\beta = (2+s)/(1+s)$. Ако не знаем стойността на s, то в най-лошия случай можем да изберем $\beta = 2$ и тогава

$$
|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| = \mathcal{O}(h^{4+2s}) \ \text{ за } \ u \in H^{3+s}(\Omega) \ \ 0 < s \le 1.
$$

Тази оценка показва едно значително повишаване на реда на сходимост за собствените стойности – $\mathcal{O}(h^{4+2s})$ вместо $\mathcal{O}(h^{2+2s})$ за изпъкнала многоъгълна област. Цената на това подобрение е решаването на допълнителна елиптична (изходна) задача върху фина мрежа с мрежов параметър h^2. Решаването на тази допълнителна задача е много по-лесно, отколкото да решаваме спектрална задача върху гъста мрежа с цел постигане на същия ред на сходимост.

Метод 2 ("метод на двете пространства"[116])

Нека сега $\widetilde{\Sigma}_h$ и $\widetilde{V}_h$ са пространства от непрекъснати функции, които са по части полиноми от степен $n+1$, но върху същото разделяне τ_h на областта. Ако задача (1.33) има решение, принадлежащо на $H^{n+2}(\Omega)$, то оценката на грешката (1.40) за приближението (1.45) ще бъде:

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq Ch^{2n}(\|Tu\|^2_{n+1,\Omega} + \|Tu_h\|^2_{n+2,\Omega})$$

за $n = 2; 3$. Ограничението $n \leq 3$ изразява максималната гладкост, която може да бъде осигурена на решението на елиптичната задача (1.41), тъй като дясната част е $u_h \in H^1(\Omega)$. Това също е едно подобряване на реда на сходимост в сравнение с (1.35), на което редът на сходимост е $\mathcal{O}(h^{2n-2})$.

Ако Ω е изпъкнал многоъгълник, то използването на този подход е разумно само при $n = 2$. Тогава пространствата V_h, Σ_h и $\widetilde{V}_h, \widetilde{\Sigma}_h$ се състоят от полиноми съответно от степен 2 и 3.

Като отчетем (1.37), получаваме:

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq C(h^4\|Tu\|^2_{3,\Omega} + h^{2+2s}\|Tu_h\|^2_{3+s,\Omega}), \quad 0 < s \leq 1.$$

От оценката (1.35) за по части квадратични елементи имаме $|\lambda - \lambda_h| = \mathcal{O}(h^2)$. Следователно ще получим оценка от тип суперсходимост $|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| = \mathcal{O}(h^{2+2s})$ с цената на решаване на допълнителна елиптична задача върху същата мрежа с кубични крайни елементи.

Забележка 1.7 *Ограниченията за гладкост на точното решение, които произтичат от вида на областта Ω, формират само достатъчни условия. Така например в правоъгълна област може да се даде пример, при който точното решение е дори безкрайно гладко (виж Пример 1.3 в последния параграф на тази глава).*

Нека сега представим втория основен резултат от този параграф. Той се отнася до апостериорното приближение на собствените функции съгласно Алгоритъм 1.1. Както и при собствените стойности, изследването ще извършим в две стъпки.

Първо, нека дефинираме приближенията $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{u})$ на точните собствени функции (σ, u) посредством:

$$\begin{aligned} \widetilde{u} &= \widetilde{\lambda}_h\, \widetilde{w} = \widetilde{\lambda}_h\, Tu_h, \\ \widetilde{\sigma} &= \widetilde{\lambda}_h\, \widetilde{\tau} = \widetilde{\lambda}_h\, Su_h. \end{aligned}$$

Ще докажем следния резултат:

Лема 1.1 *Нека условията на Теорема 1.3 са изпълнени.*
Тогава

$$\|u - \widetilde{u}\|_{1,\Omega} + \|\sigma - \widetilde{\sigma}\|_{0,\Omega} \leq C\left\{|\widetilde{\lambda}_h - \lambda| + \|u - u_h\|^2_{0,\Omega} + |\widetilde{\lambda}_h - \widetilde{\lambda}|\right\}^{1/2}. \qquad (1.47)$$

Доказателство. Ще започнем със следното равенство:

$$\begin{aligned}
b(\sigma-\widetilde{\sigma},\sigma-\widetilde{\sigma}) &= -b(\sigma-\widetilde{\sigma},\sigma-\widetilde{\sigma})+2a(\sigma-\widetilde{\sigma},u-\widetilde{u}) \\
&= [-b(\sigma,\sigma)+2a(\sigma,u)] \\
&+ 2\left[b(\sigma,\widetilde{\sigma})-a(\widetilde{\sigma},u)-a(\sigma,\widetilde{u})\right] \\
&+ [-b(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma})+2a(\widetilde{\sigma},\widetilde{u})]\,.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Сега ще преработим изразите в скобите.

Като използваме (1.29) при $(\psi, v) = (\sigma, u)$, получаваме:

$$-b(\sigma,\sigma)+2a(\sigma,u)=\lambda\; b(u,u)=\lambda. \tag{1.49}$$

След това, от (1.41), предвид дефиницията на $(\widetilde{\sigma},\widetilde{u})$, ще следва:

$$\begin{aligned}
b(\sigma,\widetilde{\sigma})-a(\widetilde{\sigma},u)-a(\sigma,\widetilde{u}) &= \widetilde{\lambda}_h\left[b(\sigma,\widetilde{\tau})-a(\widetilde{\tau},u)-a(\sigma,\widetilde{w})\right] \\
&= -\widetilde{\lambda}_h\; b(u_h,u),
\end{aligned} \tag{1.50}$$

а също и

$$\begin{aligned}
-b(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma})+2a(\widetilde{\sigma},\widetilde{u}) &= \widetilde{\lambda}_h^2\left[-b(\widetilde{\tau},\widetilde{\tau})+2a(\widetilde{\tau},\widetilde{w})\right] \\
&= \widetilde{\lambda}_h^2 b(u_h,\widetilde{w}) = \frac{\widetilde{\lambda}_h^2}{\widetilde{\lambda}}.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Като заместим (1.49), (1.50) и (1.51) в (1.48), получаваме равенството:

$$\begin{aligned}
b(\sigma-\widetilde{\sigma},\sigma-\widetilde{\sigma}) &= \lambda-2\widetilde{\lambda}_h b(u_h,u)+\frac{\widetilde{\lambda}_h^2}{\widetilde{\lambda}} \\
&= \left[\lambda-\widetilde{\lambda}_h\right]+\left[2\widetilde{\lambda}_h-2\widetilde{\lambda}_h b(u_h,u)\right]+\left[\frac{\widetilde{\lambda}_h^2}{\widetilde{\lambda}}-\widetilde{\lambda}_h\right] \\
&= \left[\lambda-\widetilde{\lambda}_h\right]+\widetilde{\lambda}_h\|u-u_h\|_{0,\Omega}^2+\frac{\widetilde{\lambda}_h}{\widetilde{\lambda}}\left[\widetilde{\lambda}_h-\widetilde{\lambda}\right],
\end{aligned}$$

което ни дава оценка за $\|\sigma-\widetilde{\sigma}\|_{0,\Omega}^2$.

За да оценим $u-\widetilde{u}$, ще използваме равенството

$$a(\psi,u-\widetilde{u})=b(\sigma-\widetilde{\sigma},\psi),\quad \psi\in\Sigma.$$

Тогава от минимаксното неравенство (1.30), както и от оценката за $\|\sigma-\widetilde{\sigma}\|_{0,\Omega}$ следва:

$$\|u-\widetilde{u}\|_{1,\Omega} \le \sup_{\psi\in\Sigma} \frac{|a(\psi, u-\widetilde{u})|}{\|\psi\|_\Sigma} = \sup_{\psi\in\Sigma} \frac{|a(\sigma-\widetilde{\sigma}, \psi)|}{\|\psi\|_\Sigma} \le \|\sigma-\widetilde{\sigma}\|_{0,\Omega}.$$

С тази оценка доказателството на Лема 1.1 е завършено.

■

Забележка 1.8 *Оценката (1.47) показва повишаване на реда на сходимост за собствените функции. Това означава, че ако точното решение принадлежи на $H^{n+1}(\Omega)$ и при отчитане на условията за гладкост, които вече бяха дискутирани (т.е. стойността на параметъра n), то*

$$\|u-\widetilde{u}\|_{1,\Omega} + \|\sigma-\widetilde{\sigma}\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(h^n).$$

Сега ще получим оценка на собствената функция $\widetilde{u}_h$, която е възстановена апостериорно съгласно Алгоритъм 1.1.

Най-напред да отбележим, че собствената функция $\widetilde{u}_h$ не е нормирана спрямо билинейната форма $b(\cdot,\cdot)$, т.е. в общия случай $b(\widetilde{u}_h, \widetilde{u}_h) \neq 1$. Този факт следва от (1.45). Тогава, земайки предвид $\widetilde{\lambda}_h\ b(u_h, \widetilde{w}_h) = 1$, получаваме $b(u_h, \widetilde{u}_h) = 1$.

Ще покажем, че $(\widetilde{\sigma}_h, \widetilde{u}_h)$ е проектор на Гальоркин на $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{u})$ върху крайноелементното пространство $\widetilde{\Sigma}_h \times \widetilde{V}_h$.

Действително, от (1.41) и (1.44) лесно следват равенствата

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}_h}\left\{a(\psi, \widetilde{u}_h) + a(\widetilde{\sigma}_h, v) - b(\widetilde{\sigma}_h, \psi)\right\} = b(u_h, v) \quad \forall\ \psi \in \Sigma_h, \forall\ v \in V_h,$$

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}_h}\left\{a(\psi, \widetilde{u}) + a(\widetilde{\sigma}, v) - b(\widetilde{\sigma}, \psi)\right\} = b(u_h, v) \quad \forall\ \psi \in \Sigma, \forall\ v \in V.$$

Тогава за всяко $\psi \in \Sigma_h$ и $v \in V_h$ е изпълнено

$$a(\psi, \widetilde{u}_h - \widetilde{u}) + a(\widetilde{\sigma}_h - \widetilde{\sigma}, v) - b(\widetilde{\sigma}_h - \widetilde{\sigma}, \psi) = 0.$$

Следващата теорема съдържа втория основен резултат от този параграф. В нея се дава оценка на грешката за собствените функции, получени апостериорно съгласно Алгоритъм 1.1.

Теорема 1.5 *Нека условията на Лема 1.1 са изпълнени. Тогава оценката на бихармоничните собствени функции, получени след прилагане на апостериорната техника съгласно Алгоритъм 1.1, е:*

$$|u-\widetilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\sigma-\widetilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \le Ch^m,$$

където $m = n$ в случай на "гладко" решение и $m = n-1+s$ при изпъкнала многоъгълна област Ω, $0 < s \le 1$.

Д о к а з а т е л с т в о. Както и при собствените стойности, биха могли да се разгледат и двата подхода. Ако пространствата $\widetilde{\Sigma}_h$ и $\widetilde{V}_h$ съдържат непрекъснати функции, които са по части полиноми от степен n, а крайноелементното разделяне е върху фина мрежа с параметър h^β, $\beta > 1$, то (виж [56], Теорема 7.1.6):

$$|\widetilde{u} - \widetilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{\beta(n-1)} \left(\|Tu_h\|_{n+1,\Omega} + \|Su_h\|_{n,\Omega}\right). \tag{1.52}$$

За да запазим същия ред на суперсходимост, както в (1.47), избираме $\beta = \dfrac{n}{n-1}$. Като се има предвид, че максималната гладкост на $\widetilde{u}$ е $H^5(\Omega)$, при $n = 2$ или 3 имаме съответно $\beta = 2$ или $\dfrac{3}{2}$.

В случая на многоъгълна област и $n = 3$, след като използваме оценката (1.37), получаваме

$$|\widetilde{u} - \widetilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{\beta(s+1)}\|Tu_h\|_{3+s,\Omega}. \tag{1.53}$$

Следователно, достатъчно е да вземем

$$\beta = \frac{2+s}{1+s}, \quad 0 < s \leq 1.$$

Що се отнася до втория подход [116], има смисъл той да бъде прилаган за $n = 2$. В този случай $\widetilde{\Sigma}_h$ и $\widetilde{V}_h$ са пространства от полиноми върху същата мрежа τ_h.

Като използваме оценката за елиптичната задача, получаваме

$$|\widetilde{u} - \widetilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \left(\|Tu_h\|_{4,\Omega} + \|Su_h\|_{3,\Omega}\right). \tag{1.54}$$

Аналогично, при Ω – изпъкнал многоъгълник, имаме:

$$|\widetilde{u} - \widetilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{1+s}\|Tu_h\|_{3+s,\Omega}. \tag{1.55}$$

Следователно, от (1.52) и (1.54) окончателно получаваме

$$|\widetilde{u} - \widetilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^n, \tag{1.56}$$

където $n = 2$ или 3.

За "полигоналния" случай от (1.53) и (1.55) получаваме оценката

$$|\widetilde{u} - \widetilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{n-1+s}, \tag{1.57}$$

където $0 < s \leq 1$ зависи от максималния вътрешен ъгъл на границата Γ и $n = 2$ или 3.

Окончателният резултат за повишения ред на сходимост при смесения МКЕ за бихармоничните собствени функции, като сме използвали двустъпкова апостериорна процедура, следва от неравенството на триъгълника и оценките (1.47), (1.56) и (1.57). ∎

Забележка 1.9 *Изследванията от настоящия параграф лесно могат да бъдат използвани и за следните спектрални задачи от четвърти ред:*

- *Едномерна задача*
$$u^{IV}(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,l)$$
с гранични условия (1.2)-(1.7), разгледани в § 1.2.

- *Нехомогенни плочи. В този случай дясната страна на уравнение (1.20) се заменя с $\lambda\rho u$, където ρ (плътността) е строго положителна и ограничена функция върху Ω.*

- *Спектралната задача*
$$\Delta^2 u = -\lambda \Delta u \quad \textit{в} \;\; \Omega$$
с гранични условия
$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \textit{върху} \;\; \Gamma$$
е разгледана в [105]. За тази задача също може да се приложи апостериорният метод (виж Пример 1.3 в края на настоящата Глава 1).

1.5 Постпроцедура и ускоряване на сходимостта за смесения МКЕ за бихармоничната спектрална задача в линейния случай $(n = 1)$

Една важна особеност на смесения МКЕ е, че той осигурява сходимост за задачите от четвърти ред (в конформен смисъл) дори и при най-ниска степен на крайните елементи, т.е. при $n = 1$.

Още през 1972 г. Miyoshi [106] доказва, че ако (σ, u) и (σ_h, u_h) са съответно точното решение на (1.38) и неговото крайноелементно приближение в смесена формулировка, то за дадено $f \in L_2(\Omega)$:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} + \|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \le C h^{1/2} \|f\|_{0,\Omega}. \tag{1.58}$$

Този резултат позволява на Ishihara (виж [85] и [86]) да изследва спектралните задачи от четвърти ред, дефинирани в ограничени равнинни области, като се използват линейни (билинейни) крайни елементи. В тези статии се доказват оценките

$$|\lambda - \lambda_h| \leq C\lambda^2 h^{1/2}, \tag{1.59}$$

$$\|u - u_h\|_{s,\Omega} \leq Ch^{1/2}, \quad s = 0; 1, \tag{1.60}$$

където (λ, u) и (λ_h, u_h) са съответно точното решение на (1.24) и решението на приближената задача (1.34).

Необходимостта от отделно разглеждане на линейния случай е породена от факта, че оценките (1.35) и (1.36) не са валидни за $n = 1$. Нека припомним, че стандартният МКЕ изисква използване на апроксимиращи полиноми от степен най-малко трета за задачи от четвърти ред [56].

Ще използваме същите означения за компонентните разрешаващи оператори, както в §1.4. Така за елиптична задача от четвърти ред в смесена формулировка и с дясна част – функцията $f \in L_2(\Omega)$ имаме:

$$S: \; L_2(\Omega) \to \Sigma, \quad Sf = \tau,$$

$$T: \; L_2(\Omega) \to V, \quad Tf = w.$$

По подобен начин дискретните компонентни разрешаващи оператори дават зависимостите:

$$S_h: \; L_2(\Omega) \to \Sigma_h, \quad S_h f = \tau_h,$$

$$T_h: \; L_2(\Omega) \to V_h, \quad T_h f = w_h,$$

където

$$(\tau_h, w_h) \in \Sigma_h \times V_h \subset \Sigma \times V,$$

а Σ_h и V_h са конструирани чрез използване на линейни (билинейни) крайни елементи.

Свойствата на операторите $S, T; S_h, T_h$ са разгледани в предходния параграф. Остават валидни и релациите им с решенията на съответните спектрални задачи.

Следователно оценка (1.58) може да бъде записана във вида

$$\|w - w_h\|_{1,\Omega} + \|\tau - \tau_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{1/2}\|f\|_{0,\Omega}. \tag{1.61}$$

Целта на този параграф е да изясним как работи идеята, съдържаща се в Алгоритъм 1.1 и какъв е ефектът от апостериорната процедура. Нека да означим с u_h приближеното решение на задача (1.34) с използване на линейни крайни елементи по смесения МКЕ. Тази функция ще ни служи за дясна част на елиптична задача от четвърти ред, т.е.

$$a(\psi, \widetilde{w}) + a(\widetilde{\tau}, v) - b(\widetilde{\tau}, \psi) = b(u_h, v) \quad \forall (\psi, v) \in \Sigma \times V. \tag{1.62}$$

Използваме решението на тази задача $(\widetilde{\tau}, \widetilde{w}) = (Su_h, Tu_h)$, за да дефинираме

$$\widetilde{\lambda}^{-1} = b(u_h, Tu_h) = b(u_h, \widetilde{w}).$$

Нека сега да въведем допълнително крайноелементно пространство $\widetilde{\Sigma}_h \times \widetilde{V}_h \subset \Sigma \times V$, като върху същата триангулация (същия параметър h) повишаваме степента на полиномите с единица, т.е. използваме квадратични крайни елементи.

Тогава решаваме следната елиптична задача

$$a(\psi, \widetilde{w}_h) + a(\widetilde{\tau}_h, v) - b(\widetilde{\tau}_h, \psi) = b(u_h, v) \quad \forall (\psi, v) \in \widetilde{\Sigma}_h \times \widetilde{V}_h. \tag{1.63}$$

Ако $(\widetilde{\tau}_h, \widetilde{w}_h) \in \widetilde{\Sigma}_h \times \widetilde{V}_h$ е решение на тази задача, то можем да дефинираме приближената собствена стойност чрез

$$\widetilde{\lambda}_h^{-1} = b(u_h, \widetilde{w}_h). \tag{1.64}$$

Следващата теорема показва, че $\widetilde{\lambda}_h$ е по-добро приближение на λ, отколкото λ_h.

Теорема 1.6 *Нека крайноелементното подпространство $\Sigma_h \times V_h$ съдържа по части полиноми от първа степен и $(\lambda, (\sigma, u))$ е точното решение на (1.24), а $(\lambda_h, (\sigma_h, u_h))$ е неговото крайноелементно приближение, получено от (1.34) по смесения МКЕ с линейни елементи.*

Ако $\widetilde{\lambda}_h$ е определено от (1.64), където $(\widetilde{\tau}_h, \widetilde{w}_h) \in \widetilde{\Sigma}_h \times \widetilde{V}_h$ е решение на (1.63), а функциите u и u_h са нормирани чрез $\|u\|_{0,\Omega} = \|u_h\|_{0,\Omega} = 1$, то в сила е следната оценка:

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq Ch. \tag{1.65}$$

Доказателство. Аналогично на Теорема 1.3 получаваме

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}| \leq \lambda \widetilde{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} + \|T\| \right) \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2.$$

От (1.60) и ограничеността на оператора T следва, че

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}| \leq C \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 = \mathcal{O}(h). \tag{1.66}$$

От друга страна,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\widetilde{\widetilde{\lambda}}} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_h} &= b(u_h, \widetilde{w}) - b(u_h, \widetilde{w}_h) \\ &= b(u_h, \widetilde{w}) + b(u_h, \widetilde{w}_h) - 2b(u_h, \widetilde{w}_h) \\ &= 2a(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{w} - \widetilde{w}_h) - b(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h). \end{aligned}$$

Тогава

$$
\begin{aligned}
|\frac{1}{\widetilde{\widetilde{\lambda}}} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_h}| &\leq 2|a(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{w} - \widetilde{w}_h)| - |b(\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h, \widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h)| \\
&\leq 2\|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|_{1,\Omega}\|\widetilde{w} - \widetilde{w}_h\|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|_{0,\Omega}^2.
\end{aligned}
$$

Тъй като дясната страна u_h на (1.62) принадлежи на пространството $H^1(\Omega)$, то решението $\widetilde{w}$ е функция поне от $H^3(\Omega)$. Да отбележим, че за задача (1.63) не могат да се използват линейни крайни елементи. В последното неравенство се прилага неравенството за квадратични елементи (при $n = 2$), за да оценим $\|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|_{1,\Omega}$, $\|\widetilde{w} - \widetilde{w}_h\|_{1,\Omega}$ и $\|\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}_h\|_{0,\Omega}$.

Най-накрая, като приложим (1.66) и

$$
|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq |\lambda - \widetilde{\lambda}| + |\widetilde{\lambda} - \widetilde{\lambda}_h| \leq Ch,
$$

завършваме доказателството на теоремата.

■

Неравенство (1.65) показва, че след използване на апостериорна процедура се ускорява сходимостта на собствените стойности с половин порядък. Това подобряване става за сметка на решаване на една относително по-лесна елиптична задача с използване на квадратични крайни елементи.

Забележка 1.10 *"Методът на двете мрежи" е неприложим за линейните крайни елементи. Това следва от факта, че при апостериорната процедура се налага да използваме оценка (1.36), която е неприложима при $n = 1$.*

1.6 Смесена формулировка на интегро-диференциален динамичен модел от теорията на вискоеластичността

Почти всяка деформируема материя проявява както еластични, така и вискозни свойства при едновременното съхраняване и загуба на механична енергия. Ето защо всеки вискоеластичен материал (например различните видове каучуков материал и пр.) може да бъде отнесен към резултираща линейна система вследствие на релацията деформации – напрежения като входни и изходни (неизвестни) функции при изучаване на неговите свойства. Тъй като тези зависимости са добре изследвани в теорията на вискоеластичността, то моделите върху тази основа описват само идеални течности и идеално твърдо тяло.

В края на миналия век за описание на динамичните свойства на вискоеластичните материали и демфиращи устройства все по-често започнаха да се използват диференциални и интегро-диференциални уравнения от дробен ред. Bagley и Torvik [40, 41] показаха, че уравнения, съдържащи производни от ред $1/2$ на неизвестната функция моделират много добре свойствата на вискоеластични и демфиращи материали. Koeller [87] използва дробния анализ, за да дефинира релаксиращи функции и функции с памет, които описват вискоеластичните свойства. Съвременното развитие на дробния анализ позволи този подход да преобладава в модерните примери на модели във физиката, механиката на флуидите, теория на сигналите, математическата биология и електрохимията. Без съмнение дробният функционален анализ е една нова и многообещаваща област в математиката с широко приложение. Съвсем естествено е и използването на съвременните компютърни методи за получаване на добро приближение на моделната задача.

Една от целите на този параграф е да представим основното интегро-диференциално уравнение от хиперболичен тип във вид на система от две уравнения, в които участващите производни относно времевата променлива са от първи ред и да дефинираме смесена вариационна задача. Подобен подход е оправдан при използване на някой вариант на МКЕ за дискретизация и получаване на приближено решение.

Числено решаване на квазистатични модели на задачи от вискоеластичността е разгледано например в [3, 123]. Основна трудност в този случай е, че цялата предистория на неизвестната функция на напрежението трябва да се запазва на всяка стъпка от изчислителния процес по отношение на времето и да се използва на следваща стъпка от пресмятанията. Най-често използваните алгоритми за този вид задачи (поради конволюционния член) се основават на конволюционната квадратурна формула на Lubich [101] за оператори от дробен ред.

Основен акцент в нашите изследвания е динамичният случай, който резултира в интегро-диференциално уравнение от хиперболичен тип със слабо сингулярно ядро, описващо поведението на вискоеластичен материал. Предлага се негова смесена вариационна формулировка, която дава възможност за приближено пресмятане както на функцията на преместването u, така и на скоростта на това преместване $\dot{u}$. Друг акцент е, че предлаганата смесена вариационна формулировка е намерена във вид, подходящ за получаване на оценки за устойчивост, които от своя страна осигуряват доказването на априорни оценки. В нашите разглеждания за дискретизация по пространствената променлива x използваме стандартен МКЕ, а по времевата променлива t – прекъснат метод на Гальоркин [121].

Нека най-напред да въведем някои важни и донякъде стандартни означения [132], които ще използваме в настоящия параграф. За използваните по-долу индекси е валидно, че $i, j, k = 1, \ldots, d$, където $d = 2; 3$ е броят на пространствените променливи.

Нека σ_{ij} и ϵ_{ij} означават съответно тензорите на напрежение и деформации (опън), а u е векторът на преместване. Да припомним, че линейният тензор на деформациите се дефинира като

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Посредством разлагането

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij},$$

структурните уравнения в теорията на еластичността могат да се запишат във вида [132]:

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) - \tau_1^\alpha \partial_t^\alpha s_{ij}(t) &= 2G_\infty e_{ij}(t) + 2G_{\tau_1^\alpha}\partial_t^\alpha e_{ij}(t), \\ \sigma_{kk}(t) + \tau_2^\alpha \partial_t^\alpha \sigma_{kk}(t) &= 3K_\infty \epsilon_{kk}(t) + 3K_{\tau_2^\alpha}\partial_t^\alpha \epsilon_{kk}(t), \end{aligned} \tag{1.67}$$

при начални условия

$$s_{ij}(0+) = 2Ge_{ij}(0+), \quad \sigma_{kk}(0+) = 3K\epsilon_{kk}(0+),$$

като последните (начални) условия изразяват известния закон на Hooke в теорията на еластичността. Освен това в (1.67) сме означили с G и K базови (неотслабени) модули, а G_∞ и K_∞ са дългосрочни (асимптотични) отслабени модули.

Да отбележим също, че имаме и две релаксиращи (отслабващи) времена: $\tau_1, \ \tau_2 > 0$. Дробният ред на диференциалните оператори се изразява с параметъра $\alpha \in (0,1)$, като производна от дробен ред α по дефиниция е:

$$\partial_t^\alpha \varphi(t) = \partial_t \partial_t^{-(1-\alpha)}\varphi(t) = \partial_t \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\varphi(s)\,ds.$$

Уравненията (1.67) могат да бъдат решени спрямо σ с използване на трансформация на Laplace, като преди това за простота направим допускане, че $\tau_1 = \tau_2 := \tau$:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2G\left(e_{ij}(t) - \frac{G-G_\infty}{G}\int_0^t \beta(t-s)e_{ij}(s)\,ds\right) \\ \sigma_{kk} &= 3K\left(\epsilon_{kk}(t) - \frac{K-K_\infty}{K}\int_0^t \beta(t-s)\epsilon_{kk}(s)\,ds\right) \end{aligned}$$

където

$$\beta(t) = -\frac{d}{dt}E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha\right); \quad E_\alpha(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{\Gamma(1+n\alpha)},$$

а E_α е функцията на Mittag-Leffler от ред α.

Сега вече може да дефинираме важните за по-нататъшното разглеждане параметри и функции:

- параметъра γ: $\gamma = \dfrac{G-G_\infty}{G} = \dfrac{K-K_\infty}{K}$;
- слабо сингулярното ядро $\gamma\beta$;

- константите на Lamé: $\lambda = K - \dfrac{2}{3}G$ и $\mu = G$.

Базовото уравнение ще добие вида (δ_{ij} е символ на Cronecker):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= (2\mu\epsilon_{ij}(t) + \lambda\epsilon_{kk}(t)\delta_{ij}) \\ &= \int_0^t \beta(t-s)\left(2\mu\epsilon_{ij}(t) - \lambda\epsilon_{kk}(t)\delta_{ij}\right)\, ds \\ &= \left(\sigma_0\right)_{ij}(t) - \int_0^t \beta(t-s)\left(\sigma_0\right)_{ij}(s)\, ds. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Заключаваме, че вискоеластичната част на модела съдържа само 3 параметъра, а именно:

$$0 < \gamma < 1, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{и} \quad \tau > 0.$$

Ядрото е слабо сингулярно:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \gamma\frac{d}{dt}E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha\right) \\ &= \gamma\frac{\alpha}{\tau}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-1+\alpha} E'_\alpha\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha\right) \\ &\approx Ct^{-1+\alpha}, \quad t \to 0^+. \end{aligned}$$

Да отбележим, че $\beta(t) \geq 0$, и за нормата получаваме

$$\|\beta\|_{L_1(\mathbf{R}^+)} = \int_0^\infty \beta(t)\, dt = \gamma(E_\alpha(0)) = E_\alpha(\infty) = \gamma < 1.$$

Моделът с дробен ред на производните представя затихваща (fading) памет, понеже конволюционното ядро в (1.68) е строго намаляваща функция (т.е. $\dfrac{d\beta}{dt} < 0$).

Нека сега разгледаме моделното вискоеластично уравнение за напреженията σ. Ако допуснем, че материята притежава изотермични и изотропни свойства, то линейното моделно уравнение може да се запише в интегрален вид с ядро – функцията $\beta(t)$:

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) - \int_0^t \beta(t-s)\sigma_1(t)\, ds, \tag{1.69}$$

където

$$\sigma_0(t) = 2\mu_0\epsilon(t) + \lambda_0 tr\left(\epsilon(t)\right)\mathbf{I},$$

$$\sigma_1(t) = 2\mu_1\epsilon(t) + \lambda_1 tr\left(\epsilon(t)\right)\mathbf{I},$$

като $\lambda_0 > \lambda_1 > 0$ и $\mu_0 > \mu_1 > 0$ са константите на Lamé за еластичност, $\epsilon(t)$ е функцията на деформация (опън), а $\mathbf{I}$ е единичен вектор.

Константите на Lamé в (1.69) биха могли да се изразят по класическия начин:

$$\mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)}, \quad \mu_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu)},$$
$$\lambda_0 = \frac{E_0\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \lambda_1 = \frac{E_1\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

където ν е отношението на Poisson, E_0 и E_1 са единични аксиални модули на еластичност, като $E_0 - E_1 > 0$.

Дефинираният преди параметър $\gamma < 1$ представя за удобство отношенията

$$\gamma = \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{E_1}{E_0},$$

а също така, $\sigma_1 = \gamma\sigma_0$.

Нашите разглеждания се извършват върху основното динамично уравнение на движение (преместване) в интегро-диференциален вид с гранични и начални условия (I е интервалът $(0,T)$):

$$\begin{aligned}
&\rho\ddot{u}(x,t) - \nabla\cdot\sigma_0(u;x,t) \\
&\qquad + \int_0^t \beta(t-s)\nabla\cdot\sigma_1(u;x,t)\,ds = f(t) && \text{в} \;\; \Omega\times I \\
&u(x,0) = u_0(x) && \text{в} \;\; \Omega \\
&\dot{u}(x,0) = v_0(x) && \text{в} \;\; \Omega \\
&u(x,t) = 0 && \text{върху} \;\; \Gamma_{\mathcal{D}}\times I \\
&\sigma(u;x,t)\cdot\vec{n}(x) = g(x,t) && \text{върху} \;\; \Gamma_{\mathcal{N}}\times I,
\end{aligned} \tag{1.70}$$

където $\rho = \mathrm{const}$ е плътност на масата, функциите f и g представляват съответно обемен и повърхнинен товар, u е векторът на преместванията, σ_0 и σ_1 са напреженията съгласно (1.69), а деформациите се определят от линейното кинематично съотношение [3]

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right).$$

В нашите изследвания $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, $\;d = 2,3$ е ограничена многоъгълна област с граница

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma}_{\mathcal{D}} \cup \overline{\Gamma}_{\mathcal{N}}, \quad \Gamma_{\mathcal{D}}\cap\Gamma_{\mathcal{N}} = \emptyset, \quad \text{като} \;\; \mathrm{meas}(\Gamma_{\mathcal{D}}) \neq 0.$$

Да дефинираме пространствата $H = L_2(\Omega)^d$ със съответното скаларно произведение $(\cdot,\cdot)$ и норма $\|\cdot\|$ и

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^d : \ v = 0 \text{ върху } \ \Gamma_{\mathcal{D}}\}.$$

Билинейната $a-$форма се дефинира посредством

$$a(v,w) = \int_\Omega 2\mu_0 \epsilon_{ij}(v)\epsilon_{ij}(w) + \lambda_0 \epsilon_{ii}(v)\epsilon_{jj}(w)\, dx, \quad v,w \in V.$$

Добре известно е, че $a(\cdot,\cdot)$ е коерцитивна билинейна форма във V [3, 109].

Операторът $Au = -\nabla \cdot \sigma_0(u)$, определен заедно с хомогенни гранични условия в (1.70) (т.е. $g = 0$), дава

$$a(u,v) = (Au, v),$$

като, при достатъчно гладки $u, v \in V$, този оператор може да бъде продължен до самоспрегнат, положителен и неограничен линеен оператор в H.

Така уравнението на движение в слаба формулировка гласи: Търсим функция $u(t) \in V$ такава, че $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = v_0$ и

$$\begin{aligned} \rho(\ddot{u}, \psi) + a(u(t), \psi) - \gamma \int_0^t \beta(t-s) a(u(s), \psi)\, ds \\ = (f(t), \psi) + \langle g(t), \psi \rangle_{\Gamma_{\mathcal{N}}}, \quad \forall \psi \in V, \end{aligned} \tag{1.71}$$

където $\langle g(t), v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{N}}} = \displaystyle\int_{\Gamma_{\mathcal{N}}} g \cdot v\, ds.$

Полудискретният МКЕ (т.е. непрекъснат по времевата променлива t) може да определим по следния начин: нека $V_h \subset V$ да се състои от по части линейни функции в Ω.

Крайноелементната полудискретна задача е: Търсим функция $u_h(t) \in V_h$ такава, че $u_h(0) = u_{h,0}$ и $\dot{u}_h(0) = v_{h,0}$ и

$$\begin{aligned} \rho(\ddot{u}_h, \psi_h) + a(u_h(t), \psi_h) - \gamma \int_0^t \beta(t-s) a(u_h(s), \psi_h)\, ds \\ = (f(t), \psi_h) + \langle g(t), \psi_h \rangle_{\Gamma_{\mathcal{N}}}, \quad \forall \psi_h \in V_h, \end{aligned} \tag{1.72}$$

Ще получим оценки за устойчивост както на непрекъснатата задача (1.71), така и на полудискретната задача (1.72). Подобни уравнения, в които обаче конволюционното ядро е гладка функция, са изучени в [109]. В нашия случай от сингулярността на ядрото произтичат значителни трудности и подходът в [109] е неприложим. По-скоро тук е уместно, насочени от разглежданията в [74], да използваме друго представяне на задача (1.71) (а, следователно и на (1.72)), което носи значителни преимущества не само в последващия анализ, но и в изчислителен аспект.

Уравнение (1.70) можем да запишем във вида

$$\rho\ddot{u} + Au - \gamma\int_0^t \beta(t-s)Au(s)\,ds = f(t),$$

т.е.

$$\rho\ddot{u} + Au - \gamma\int_0^t \beta(s)Au(t-s)\,ds = f(t),$$

което е еквивалентно на

$$\rho\ddot{u} + \left(1-\gamma\int_0^t \beta(s)\,ds\right)Au + \gamma\int_0^t \beta(s)Aw(t,s)\,ds = f(t), \tag{1.73}$$

където $w(t,s) = u(t) - u(t-s)$.

Да въведем функцията

$$\xi(t) = 1 - \gamma\int_0^t \beta(s)\,ds,$$

която очевидно е намаляваща, $\xi(0) = 1$ и $\lim_{t\to\infty} = 1-\gamma$ и следователно

$$\xi(t) \geq 1-\gamma > 0.$$

Ако в (1.73) положим $\dot{u} := v$, то получаваме

$$\rho\dot{v}(t) + \xi(t)Au(t) + \gamma\int_0^t \beta(s)Aw(t,s)\,ds = f(t). \tag{1.74}$$

Тук е уместно да дадем някои тъждества за така въведената функция $w(t,s)$, които ще използваме за целите на нашия анализ: Ясно е, че $\partial_t w = v - \partial_s w$ и $\partial_s w = v - \partial_t w$, а съответно и $v = \partial_t w + \partial_s w$, така че:

$$\dot{w}(t,s) = \partial_t u(t) - \partial_t u(t-s) = \partial_t u(t) + \partial_s u(t-s)$$

$$= \partial_t u(t) - \partial_t\left[u(t) - u(t-s)\right] = \dot{u} - \partial_s w = v - \partial_s w.$$

Ако означим $(u,v,w) := z$, $z \in V \times H \times W$, $W = L_{2,\beta}(\Omega)$, от (1.74) следва, че задача (1.70) може да се запише като:

$$\rho\dot{z} + \mathcal{A}z = F,$$

където

$$\mathcal{A}z = \left(-v, A\left[\xi(t)u + \gamma\int_0^t \beta(s)w(t,s)\,ds\right], -(v - \partial_s w)\right),$$

$$F(t) = (0, f(t), 0).$$

Съответно, от (1.74) следва, че (1.71) можем да запишем във вида

$$
\rho(\dot{v}(t),\psi)+\xi(t)a(u(t),\psi)+\gamma\int_0^t\beta(s)a(w(t,s),\psi)\,ds
= (f(t),\psi)+\langle g(t),\psi\rangle_{\Gamma_{\mathcal{N}}},\quad \forall\psi\in V, \tag{1.75}
$$

Именно това представяне ще използваме, за да докажем в следващата теорема оценки за устойчивост.

Ще използваме следните норми:

$$
|v|_l = \|A^{l/2}v\| = \sqrt{(v, A^l v)},\quad l\in\mathbf{R}.
$$

Теорема 1.7 *Нека u е решение на (1.71) при достатъчно гладки функции u_0, v_0, f и g. Тогава, ако означим $\dot{u}=v$, $w(t,s)=u(t)-u(t-s)$, то за всяко $l\in\mathbf{R}$ и $T>0$ е в сила равенството*

$$
\begin{aligned}
&\rho\|v(T)\|_l^2+\xi(T)\|u(T)\|_{l+1}^2\\
&+\gamma\int_0^T\beta(s)\|u(t)\|_{l+1}^2\,dt+\gamma\int_0^T\beta(s)\|w(T,s)\|_{l+1}^2\,ds\\
&+\gamma\int_0^T\int_0^t[\beta(s)-\beta(t)]\,\partial_s\|w(t,s)\|_{l+1}^2\,ds\,dt\\
&=\rho\|v_0\|_l^2+\|u_0\|_{l+1}^2+2\int_0^T(f,A^l v)\,dt+2\int_0^T\langle g(t),A^l v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{N}}}\,dt,
\end{aligned}\tag{1.76}
$$

всички събираеми в лявата страна на което са неотрицателни.

Нещо повече, при $l=0$ е валидна следната оценка:

$$
\begin{aligned}
&\rho^{1/2}\|\dot{u}(T)\|+(1-\gamma)^{1/2}\|u(T)\|_1\le C\Big[\rho^{1/2}\|v_0\|+\|u_0\|_1\\
&+\rho^{-1/2}\int_0^T\|f\|\,dt+(1-\gamma)^{-1/2}\left(\max_{[0,T]}\|g\|_{L_2(\Gamma_{\mathcal{N}})}+\int_0^T\|\dot{g}\|_{L_2(\Gamma_{\mathcal{N}})}\,dt\right)\Big].
\end{aligned}\tag{1.77}
$$

Доказателство. Полагаме $\psi=A^l v$ в (1.75) и интегрираме относно t:

$$
\begin{aligned}
&\rho\int_0^T(\dot{v},A^l v)\,dt+\int_0^T\xi(t)(Au,A^l v)\,dt\\
&+\gamma\int_0^T\int_0^t\beta(s)(Aw(t,s),A^l v)\,ds\,dt=\int_0^T(f(t),A^l v)\,dt+\int_0^T\langle g(t),A^l v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{N}}}\,dt.
\end{aligned}
$$

Ще разгледаме всяко събираемо в лявата страна на горното равенство.

За първото събираемо имаме:

$$\rho\int_0^T(\dot v(t),A^lv)\,dt=\frac{\rho}{2}\int_0^T\partial_t(v,A^lv)\,dt$$
$$=\frac{\rho}{2}\int_0^T\partial_t\|v\|_l^2\,dt=\frac{\rho}{2}\|v(T)\|_l^2-\frac{\rho}{2}\|v_0\|_l^2. \tag{1.78}$$

За второто събираемо получаваме, че:

$$\int_0^T\xi(t)(Au,A^lv)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^T\xi(t)\partial_t\|u\|_{l+1}^2\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\xi(T)\|u(T)\|_{l+1}^2-\frac{1}{2}\|u_0\|_{l+1}^2+\frac{\gamma}{2}\int_0^T\beta(t)\|u(t)\|_{l+1}^2\,dt. \tag{1.79}$$

Сега да разгледаме и преработим третото събираемо:

$$\int_0^T\int_0^t\beta(s)(Aw(t,s),A^lv(t))\,ds\,dt$$
$$=\int_0^T\int_0^t\beta(s)\left(Aw(t,s),A^l[\partial_tw(t,s)+\partial_sw(t,s)]\right)\,ds\,dt \tag{1.80}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^t\beta(s)\left(\partial_t\|w(t,s)\|_{l+1}^2+\partial_s\|w(t,s)\|_{l+1}^2\right)\,ds\,dt.$$

Нека да сменим реда на интегрирането в първото събираемо от (1.80):

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^t\beta(s)\partial_t\|w(t,s)\|_{l+1}^2\,ds\,dt=\frac{1}{2}\int_0^T\int_s^t\beta(s)\partial_t\|w(t,s)\|_{l+1}^2\,dt\,ds$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^T\beta(s)\|w(T,s)\|_{l+1}^2\,ds-\frac{1}{2}\int_0^T\beta(s)\|w(s,s)\|_{l+1}^2\,ds.$$

Тогава, като използваме, че

$$\frac{1}{2}\int_0^T\beta(s)\|w(s,s)\|_{l+1}^2\,ds=\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^t\beta(t)\partial_s\|w(t,s)\|_{l+1}^2\,ds\,dt,$$

можем да запишем (1.80) във вида

$$\int_0^T\int_0^t\beta(s)(Aw(t,s),A^lv(t))\,ds\,dt=\frac{1}{2}\int_0^T\beta(s)\|w(T,s)\|_{l+1}^2\,ds$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^t[\beta(t)-\beta(s)]\partial_s\|w(t,s)\|_{l+1}^2\,ds\,dt. \tag{1.81}$$

За да покажем, че последният член от (1.81) е положителен, при $0 < \varepsilon < t$ разглеждаме интеграла

$$\int_{\varepsilon}^{t} [\beta(t) - \beta(s)] \partial_s \|w(t,s)\|_{l+1}^2 \, ds = [\beta(\varepsilon) - \beta(t)] \|w(t,\varepsilon)\|_{l+1}^2$$
$$+ \int_{\varepsilon}^{t} \beta'(s) \|w(t,s)\|_{l+1}^2 \, ds \leq \beta(\varepsilon) \|w(t,\varepsilon)\|_{l+1}^2,$$

като последното неравенство е в сила, защото $\beta'(t) \leq 0$ и $\beta(t) \geq 0$.

Използвайки

$$w(t,\varepsilon) = w(t,0) + \int_0^{\varepsilon} \partial_s w(t,s) \, ds = \int_0^{\varepsilon} \partial_s w(t,s) \, ds$$

и неравенството на Cauchy-Schwarz, получаваме

$$\|w(t,\varepsilon)\|_{l+1}^2 \leq \left(\int_0^{\varepsilon} \|\partial_s w(t,s)\|_{l+1} \, ds \right)^2 \leq \int_0^{\varepsilon} \frac{ds}{\beta(s)} \int_0^{\varepsilon} \beta(s) \|\partial_s w(t,s)\|_{l+1} \, ds,$$

следователно

$$\int_{\varepsilon}^{t} [\beta(t) - \beta(s)] \partial_s \|w(t,s)\|_{l+1}^2 \, ds \leq \int_0^{\varepsilon} \frac{\beta(\varepsilon)}{\beta(s)} \, ds \int_0^{\varepsilon} \beta(s) \|\partial_s w(t,s)\|_{l+1} \, ds.$$

Но $\dfrac{\beta(\varepsilon)}{\beta(s)} \leq 1$, откъдето $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{\beta(\varepsilon)}{\beta(s)} \, ds \leq \int_0^{\varepsilon} ds = \varepsilon$, така че

$$\int_{\varepsilon}^{t} [\beta(t) - \beta(s)] \partial_s \|w(t,s)\|_{l+1}^2 \, ds \leq \varepsilon \int_0^{\varepsilon} \beta(s) \|\partial_s w(t,s)\|_{l+1}^2 \, ds.$$

Съгласно резултатите от [74], при достатъчна гладкост на u_0, v_0, f и g, в сила е

$$\int_0^T \beta(s) \|\partial_s w(t,s)\|_{l+1}^2 \, ds < \infty$$

и тогава, при $\varepsilon \to 0$ получаваме

$$\int_0^t [\beta(t) - \beta(s)] \partial_s \|w(t,s)\|_{l+1}^2 \, ds \leq 0. \tag{1.82}$$

От (1.78), (1.79), (1.81) и (1.82) получаваме (1.76), а от него, предвид Теоремата за следата и факта, че $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ са еквивалентни норми, следва (1.77).

■

Доказателството на Теорема 1.7 може да се приложи и за полудискретната задача (1.72), като използваме L_2-проекционния оператор $P_h: \ H \to V_h$ и оператора $A_h: \ V_h \to V_h$, който дефинираме като:

$$a(v_h, w_h) = (A_h v_h, w_h).$$

Използваме дискретната норма

$$\|v_h\|_{h,l} = \|A_h^{l/2} v_h\| = \sqrt{(v_h, A_h^l v_h)}, \quad \forall v_h \in V_h, \ l \in \mathbf{R}.$$

Достатъчно е да се формулира оценка при $g = 0$:

Теорема 1.8 *Нека u_h е решение на задача (1.72) при $g = 0$. Тогава, за всяко $l \in \mathbf{R}$ и $T > 0$ е в сила оценката*

$$\begin{aligned} &\rho^{1/2}\|\dot{u}_h(T)\|_{h,l} + (1-\gamma)^{1/2}\|u_h(T)\|_{h,l+1} \\ &\leq C\Big[\rho^{1/2}\|v_{h,0}\|_{h,l} + \|u_{h,0}\|_{h,l+1} + \rho^{-1/2}\int_0^T \|P_h f\|_{h,l}\, dt\Big]. \end{aligned} \tag{1.83}$$

Сега вече, благодарение на оценките за устойчивост, можем да докажем и априорни оценки.

Нека $R_h: \ V \to V_h$ е проективният оператор на Ritz

$$a(R_h v - v, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \tag{1.84}$$

Ще предполагаме, че за оператора A е изпълнено

$$\|v\|_{2,\Omega} \leq C\|Av\|_{0,\Omega} \quad \forall v \in H^2(\Omega), \tag{1.85}$$

откъдето може да се получи следната оценка:

$$\|R_h v - v\|_{l,\Omega} \leq C h^{m-l}\|v\|_{m,\Omega}, \tag{1.86}$$

за $l, m \in \mathbf{N}$, $0 \leq l < m \leq 2$.

Оценката (1.85) е в сила например при задача на Dirichlet ($\Gamma_{\mathcal{D}} = \partial\Omega$) в случай, че Ω е изпъкнал многоъгълник. По-общи гранични условия би трябвало да са обект на друго изследване.

Теорема 1.9 *Нека u и u_h са решения съответно на (1.71) и (1.72). Тогава, ако означим $e = u_h - u$, то в сила са следните оценки:*

$$\begin{aligned} \|\dot{e}(T)\| \leq\; & C\left(\|v_{h,0} - v_0\| + \|u_{h,0} - R_h u_0\|_{1,\Omega}\right) \\ & + Ch^2\left(\|v_0\|_{2,\Omega} + \|\dot{u}(T)\|_{2,\Omega} + \int_0^T \|\ddot{u}(T)\|_{2,\Omega}\, dt\right), \end{aligned}$$

$$\|e(T)\|_{1,\Omega} \le C\left(\|v_{h,0}-v_0\| + \|u_{h,0}-u_0\|_{1,\Omega}\right) + Ch\left(\|v_0\|_{1,\Omega} + \|u_0\|_{2,\Omega} + \|u(T)\|_{2,\Omega} + \int_0^T \|\ddot{u}(T)\|_{1,\Omega}\,dt\right),$$

$$\|e(T)\| \le C\left(\|v_{h,0}-v_0\| + \|u_{h,0}-u_0\|\right) + Ch^2\left(\|v_0\|_{2,\Omega} + \|u_0\|_{2,\Omega} + \|u(T)\|_{2,\Omega} + \int_0^T \|\ddot{u}(T)\|_{2,\Omega}\,dt\right),$$

където константата C зависи от ρ и γ.

Доказателство. Ще представим грешката като сбор от две компоненти: $u_h - u = e_1 + e_2$, където $e_1 = u_h - R_h u$ и $e_2 = R_h u - u$. Предвид (1.86), достатъчно е да работим с e_1.

От (1.71), (1.72) и (1.84) можем да запишем, че

$$\rho(\ddot{e}_1, v_h) + a(e_1, v_h) - \gamma \int_0^t \beta(s) a(e_1(t-s), v_h)\,ds = \rho(\ddot{e}_2, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Като приложим оценка (1.83) от Теорема 1.8 при $l = 0$ и отчетем, че $\|\cdot\|_{h,0} = \|\cdot\|$, а $\|\cdot\|_{h,1}$ и $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ са еквивалентни норми, получаваме

$$\|\dot{e}_1(T)\| + \|e(T)\|_{1,\Omega} \le C\left(\|\dot{e}_1(0)\| + \|e(0)\|_{1,\Omega} + \int_0^T \|P_h \ddot{e}_2\|\,dt\right),$$

където C зависи от ρ и γ.

Аналогично, при $l = -1$ имаме

$$\|\dot{e}_1(T)\|_{h,-1} + \|e(T)\| \le C\left(\|\dot{e}_1(0)\|_{h,-1} + \|e(0)\| + \int_0^T \|P_h \ddot{e}_2\|_{h,-1}\,dt\right).$$

Като използваме, че $\|\cdot\|_{h,-1} \le C\|\cdot\|$, $e = e_1 + e_2$ и $\|e_1(0)\| \le \|e(0)\| + \|e_2(0)\|$, стигаме до оценките, които трябваше да докажем.

■

Оценка за устойчивост може да бъде получена и за дискретизирания модел, при който дискретизация относно времевата променлива е извършена по т. нар. *прекъснат метод на Гальоркин.*

Нека посредством точки $t_j,\ j = 0, \ldots, N$:

$$0 = t_0 < t_1 \ldots < t_N = T$$

разделим интервала $[0, T]$ на подинтервали $I_n = (t_{n-1}, t_n)$ със стъпка съответно $k_n = t_n - t_{n-1}$, $n = 1, \ldots, N$.

Прекъснатият метод на Гальоркин се реализира върху крайноелементни пространствено-времеви разделяния, състоящи се от пространствено-времеви "отрязъци" $S_n = \Omega \times I_n$. Съответните базисни функции са прекъснати относно времевата променлива t, а приближеното решение се търси поотделно върху отрязъците $S_n,\ n = 1, \ldots, N$.

Дискретното крайноелементно пространство дефинираме като:

$$W_D = \left\{ w = (w_1, w_2)^T : w_i(t) = w_{i,n},\ t \in I_n,\ i = 1, 2, \quad w_n \in V_h, n = 1, \ldots, N \right\}.$$

Тъй като в общия случай функциите от W_D са прекъснати в $t_n, n = 1, \ldots, N$, се налага за всяко $w \in W_D$ да въведем означенията

$$w_n = w|_{I_n} = w_{n-1}^+ = w_n^-,$$

$$[w]_n = w_{n+1} - w_n,$$

като последното е означение за скока.

Дискретното приближение $U = (U_1, U_2)^T$, апроксимиращо точното решение $u = (u, \dot{u})^T$ на (1.71) се намира, като се реши следната задача: Търсим функция $U \in W_D, U_0^- = (u_0, v_0)^T$ такава, че

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \Big\{ (\dot{U}_1, v_1) - (U_2, v_1) + \rho(\dot{U}_2, v_2) \\
&+ a(U_1, v_2) - \int_0^t \gamma\beta(t-s) a(U_1(s), v_2(t))\, ds \Big\}\, dt \\
&+ \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ ([U_1]_n, v_{1,n}^+) + \rho([U_2]_n, v_{2,n}^+) \right\} + (U_{1,0}^+, v_{1,0}^+) + \rho(U_{2,0}^+, v_{2,0}^+) \\
&= \int_0^T (f, v_2)\, dt + (u_0, v_{1,0}^+) + \rho(v_0, v_{2,0}^+).
\end{aligned} \tag{1.87}$$

За да получим оценка за устойчивост, по аналогия с полудискретния модел, ще използваме представянето

$$\begin{aligned}
&a(U_1, v_2) - \int_0^t \gamma\beta(t-s) a(U_1(s), v_2(t))\, ds \\
&= \xi(t) a(U_1, v_2) + \int_0^t \gamma\beta(t-s) a(U_1(t) - U_1(s), v_2(t))\, ds,
\end{aligned}$$

и ще положим в него $v = U$.

Тогава (1.87) добива следната смесена формулировка:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \Big\{ (\dot{U}_1, U_1) - (U_2, U_1) + \rho(\dot{U}_2, U_2) + \xi(t) a(U_1, U_2) \\
&\qquad + \int_0^t \gamma\beta(t-s) a(U_1(t) - U_1(s), U_2(t))\, ds \Big\}\, dt \\
&\sum_{n=1}^{N-1} \big\{ ([U_1]_n, U_{1,n}^+) + \rho([U_2]_n, U_{2,n}^+) \big\} + (U_{1,0}^+, U_{1,0}^+) + \rho(U_{2,0}^+, U_{2,0}^+) \\
&\qquad = \int_0^T (f, U_2)\, dt + (u_0, U_{1,0}^+) + \rho(v_0, U_{2,0}^+).
\end{aligned}
\tag{1.88}
$$

Тук е мястото да споменем, че за разлика от непрекъснатия (и полудискретния) случай, в който въведохме в употреба функцията $w(t,s) = u(t) - u(t-s)$, в ролята на неин дискретен аналог ще използваме функцията $U_1(t) - U_1(s)$.

Сега ще преработим всички членове, участващи в (1.88).
Първоначално да отбележим, че (виж [4]):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \rho(\dot{U}_2, U_2)\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} \rho([U_2]_n, U_{2,n}^+) + \rho(U_{2,0}^+, U_{2,0}^+) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\rho\|U_{2,N}^-\|^2 + \frac{1}{2}\rho\|U_{2,0}^+\|^2 + \frac{1}{2}\rho \sum_{n=1}^{N-1} \|[U_2]_n\|^2.
\end{aligned}
\tag{1.89}
$$

За следващите разглеждания е необходимо да изразим U_2 посредством U_1. За тази цел полагаме в (1.87) $v_2 = 0$, откъдето получаваме

$$
\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \big\{ (\dot{U}_1, v_1) - (U_2, v_1) \big\}\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} ([U_1]_n, v_{1,n}^+) + (U_{1,0}^+, v_{1,0}^+) = (u_0, v_{1,0}^+),
$$

но $\dot{U}_1 = 0$ (по части константна функция относно t), следователно

$$
-\sum_{n=1}^{N} k_n (U_{2,n}, v_{1,n}) + \sum_{n=2}^{N} ([U_1]_{n-1}, v_{1,n-1}^+) + (U_{1,0}^+, v_{1,0}^+) = (u_0, v_{1,0}^+).
$$

Избираме функцията v_1 по следния начин: $v_1 \neq 0$ в някой подинтервал I_n (т.е. $v_{1,n} \neq 0$ за някое $n \in \{1, \ldots, N\}$), а $v_1 = 0$ върху всички останали подинтервали от разделянето.

Тогава:

$$
-k_n (U_{2,n}, v_{1,n}) + (U_{1,n} - U_{1,n-1}, v_{1,n}) = 0,
$$

така че получаваме

$$U_{2,n} = \frac{U_{1,n} - U_{1,n-1}}{k_n} = \partial_n U_{1,n}, \tag{1.90}$$

където ∂_n означава "производна" относно времевата променлива.

Като използваме (1.90), лесно се проверява, че

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \left\{ (\dot{U}_1, U_1) - (U_2, U_1) \right\} \, dt + \sum_{n=1}^{N-1} ([U_1]_n, U_{1,n}^+) \\ +(U_{1,0}^+, U_{1,0}^+) = (u_0, U_{1,0}^+). \tag{1.91}$$

Сега да разгледаме $\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \xi(t) a(U_1, U_2) \, dt$ от (1.88).

За удобство означаваме

$$\xi_n = \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \xi(t) \, dt = 1 - \frac{\gamma}{k_n} \int_{I_n} \int_0^t \beta(s) \, ds \, dt,$$

като дефинираме, че $\xi_0 = 1$.

Тогава

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \xi(t) a(U_1(t), U_2(t)) \, dt = \sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \xi(t) \, dt \; a(U_{1,n}, U_{2,n})$$

$$= \sum_{n=1}^{N} k_n \xi_n \; a(U_{1,n}, \partial_n U_{1,n})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} k_n \xi_n \left(\partial_n \|U_{1,n}\|_1^2 + k_n \|\partial_n U_{1,n}\|_1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left\{ k_n \partial_n \left(\xi_n \|U_{1,n}\|_1^2 \right) - k_n \|U_{1,n-1}\|_1^2 \partial_n \xi_n \right\} \tag{1.92}$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} k_n^2 \xi_n \|\partial_n U_{1,n}\|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \xi_N \|U_{1,N}\|_1^2 - \frac{1}{2} \|U_{1,0}\|_1^2$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} k_n \|U_{1,n-1}\|_1^2 \partial_n \xi_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} k_n^2 \xi_n \|\partial_n U_{1,n}\|_1^2,$$

като тук използвахме, че

$$\begin{aligned} k_n\partial_n(W_nV_n) &= W_nV_n - W_{n-1}V_{n-1} \\ &= W_nV_n - W_{n-1}V_n + W_{n-1}V_n - W_{n-1}V_{n-1} \\ &= k_n\partial_n W_nV_n + k_nW_{n-1}\partial_n V_n. \end{aligned} \tag{1.93}$$

Ще проведем по-прецизни разглеждания, за да определим знака на третото събираемо в (1.92), като разгледаме $\partial_n\xi_n$.

Първоначално, след смяна на променливата $t = t_{n-1} + k_ns,\ t \in I_n, n \geq 2$, получаваме

$$\xi_n = \frac{1}{k_n}\int_{I_n}\xi(t)\,dt = \int_0^1 \xi(t_{n-1} + sk_n)\,ds$$

и тогава

$$\partial_n\xi_n = \frac{1}{k_n}\int_0^1 \left(\xi(t_{n-1}+sk_n) - \xi(t_{n-2}+sk_{n-1})\right)\,ds < 0,$$

тъй като $t_{n-1} + sk_n > t_{n-2} + sk_{n-1}$ за всяко $s \in [0, 1]$, а функцията $\xi(\cdot)$ е намаляваща.

Що се отнася до случая $n = 1$, то

$$\partial_1\xi_1 = \frac{1}{k_1}(\xi_1 - \xi_0) = -\frac{\gamma}{k_1^2}\int_{I_1}\int_0^t \beta(s)\,ds\,dt < 0.$$

И така,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N}\int_{I_n}\xi(t)a(U_1(t),U_2(t))\,dt &= \frac{1}{2}\xi_N\|U_{1,N}\|_1^2 - \frac{1}{2}\|U_{1,0}\|_1^2 \\ -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}k_n\|U_{1,n-1}\|_1^2\partial_n\xi_n &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}k_n^2\xi_n\|\partial_nU_{1,n}\|_1^2, \end{aligned} \tag{1.94}$$

като стойността на третото събираемо в дясната страна на горното равенство, пред което стои знак минус, е отрицателна.

Най-сетне, остава да разгледаме конволюционния член от (1.88). В следващите преобразования ще използваме означението

$$W_{1,n,j} = U_{1,n} - U_{1,j} \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq n \leq N,$$

както и тъждеството:

$$a(W_{1,n,j}, \partial_nW_{1,n,j}) = \frac{1}{2}\partial_n\|W_{1,n,j}\|_1^2 + \frac{1}{2}k_n\|\partial_nW_{1,n,j}\|_1^2.$$

Тогава

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{I_n}\int_0^t \gamma\beta(t-s)a(U_1(t)-U_1(s),U_2(t))\,ds\,dt$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{t_{j-1}}^{t_j\wedge t}\gamma\beta(t-s)\,ds\,dt\ a(U_{1,n}-U_{1,j},\partial_n U_{1,n})$$

$$=\sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{I_n}\int_{I_j}\gamma\beta(t-s)\,ds\,dt\ a\left(U_{1,n}-U_{1,j},\frac{U_{1,n}-U_{1,n-1}}{k_n}\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{I_n}\int_{I_j}\gamma\beta(t-s)\,ds\,dt\ a\left(U_{1,n}-U_{1,j},\frac{W_{1,n,j}-W_{1,n-1,j}}{k_n}\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{I_n}\int_{I_j}\gamma\beta(t-s)\,ds\,dt\ a(W_{1,n,j},\partial_n W_{1,n,j}),$$

така, че

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{I_n}\int_0^t \gamma\beta(t-s)a(U_1(t)-U_1(s),U_2(t))\,ds\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{I_n}\int_{I_j}\gamma\beta(t-s)\,ds\,dt\ \partial_n\|W_{1,n,j}\|_1^2 \tag{1.95}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}k_n\sum_{j=1}^{n-1}\int_{I_n}\int_{I_j}\gamma\beta(t-s)\,ds\,dt\ \|\partial_n W_{1,n,j}\|_1^2.$$

Стойността на втория член в последното равенство е положителна, тъй като стойностите на функцията $\beta(\cdot)$ са положителни.

Сега да се спрем на първия член, като ще използваме означението

$$\omega_{nj}=\frac{1}{k_n k_j}\int_{I_n}\int_{I_j}\gamma\beta(t-s)\,ds\,dt.$$

Тогава

$$\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{I_n}\int_{I_j}\gamma\beta(t-s)\,ds\,dt\ \partial_n\|W_{1,n,j}\|_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}k_n\sum_{j=1}^{n-1}k_j\omega_{nj}\ \partial_n\|W_{1,n,j}\|_1^2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}k_j\sum_{n=j+1}^{N}k_n\omega_{nj}\ \partial_n\|W_{1,n,j}\|_1^2,$$

а като използваме (1.93), лесно получаваме

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} k_j \sum_{n=j+1}^{N} k_n \omega_{nj} \partial_n \|W_{1,n,j}\|_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} k_j \sum_{n=j+1}^{N} k_n \partial_n \left(\omega_{nj} \|W_{1,n,j}\|_1^2\right) \qquad (1.96)\\
&-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} k_j \sum_{n=j+1}^{N} k_n \|W_{1,n-1,j}\|_1^2 \partial_n \omega_{nj}.
\end{aligned}
$$

Двата члена в дясната страна на (1.96) е необходимо да бъдат разгледани по-прецизно, за да определим техните знаци.

За първия от тях получаваме

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} k_j \sum_{n=j+1}^{N} k_n \partial_n \left(\omega_{nj} \|W_{1,n,j}\|_1^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} k_j \sum_{n=j+1}^{N} \omega_{nj} \|W_{1,n,j}\|_1^2 \\
&-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} k_j \sum_{n=j+1}^{N} \omega_{n-1,j} \|W_{1,n-1,j}\|_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} k_j \Big\{\omega_{Nj} \|W_{1,N,j}\|_1^2 - \omega_{j,j} \|W_{1,j,j}\|_1^2\Big\} \qquad (1.97)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} k_j \omega_{Nj} \|W_{1,N,j}\|_1^2,
\end{aligned}
$$

тъй като $W_{1,j,j} \equiv 0$ и следователно разгледаният член е неотрицателен.

За да определим знака на втория член, използваме следното представяне за ω_{nj}:

$$
\omega_{nj} = \frac{1}{k_n k_j} \int_{I_n} \int_{I_j} \gamma\beta(t-s)\, ds\, dt = \frac{1}{k_j} \int_{I_j} \int_0^1 \gamma\beta(t_{n-1} + tk_n - s)\, dt\, ds,
$$

откъдето

$$
\partial_n \omega_{nj} = \frac{1}{k_j} \int_{I_j} \int_0^1 \gamma \left(\beta(t_{n-1} + tk_n - s) - \beta(t_{n-2} + tk_{n-1} - s)\right)\, dt\, ds < 0,
$$

защото $t_{n-1} + tk_n - s > t_{n-2} + tk_{n-1} - s$ за всяко $t \in [0,1], s \in I_j$, а $\beta(\cdot)$ е намаляваща функция.

И така, предвид (1.95), (1.96) и (1.97), за конволюционния член от (1.88) можем да запишем, че:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \int_0^t \gamma\beta(t-s) a(U_1(t) - U_1(s), U_2(t))\, ds\, dt \\
= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} k_j \omega_{Nj} \|W_{1,N,j}\|_1^2 \\
-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} k_j \sum_{n=j+1}^{N} k_n \|W_{1,n-1,j}\|_1^2 \partial_n \omega_{nj} \\
+\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N} k_n \sum_{j=1}^{n-1} \int_{I_n} \int_{I_j} \gamma\beta(t-s)\, ds\, dt \|\partial_n W_{1,n,j}\|_1^2,
\end{aligned} \tag{1.98}$$

като първият и третият член в дясната страна са съответно положителен и неотрицателен, а вторият (пред който стои знак минус) е отрицателен.

Най-сетне, след като сме разгледали всички участващи в (1.88) членове, използвайки (1.89), (1.91), (1.94) и (1.98), получаваме:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\rho\|U_{2,N}^-\|^2 + \frac{1}{2}\rho\|U_{2,0}^+\|^2 + \frac{1}{2}\rho \sum_{n=1}^{N-1} \|[U_2]_n\|^2 \\
+\frac{1}{2}\xi_N \|U_{1,N}\|_1^2 - \frac{1}{2}\|U_{1,0}\|_1^2 \\
-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} k_n \|U_{1,n-1}\|_1^2 \partial_n \xi_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} k_n^2 \xi_n \|\partial_n U_{1,n}\|_1^2 \\
+\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} k_j \omega_{Nj} \|W_{1,N,j}\|_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} k_j \sum_{n=j+1}^{N} k_n \|W_{1,n-1,j}\|_1^2 \partial_n \omega_{nj} \\
+\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N} k_n \sum_{j=1}^{n-1} \int_{I_n} \int_{I_j} \gamma\beta(t-s)\, ds\, dt \|\partial_n W_{1,n,j}\|_1^2 \\
= \int_0^T (f, U_2)\, dt + \rho(v_0, U_{2,0}^+),
\end{aligned}$$

откъдето

$$\begin{aligned}
&\rho\|U_{2,N}\|^2+\rho\sum_{n=1}^{N-1}\|[U_2]_n\|^2+\xi_N\|U_{1,N}\|_1^2\\
&\quad-\sum_{n=1}^{N}k_n\|U_{1,n-1}\|_1^2\partial_n\xi_n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}k_n^2\xi_n\|\partial_nU_{1,n}\|_1^2\\
&\quad+\sum_{j=1}^{N-1}k_j\omega_{Nj}\|W_{1,N,j}\|_1^2-\sum_{j=1}^{N-1}k_j\sum_{n=j+1}^{N}k_n\|W_{1,n-1,j}\|_1^2\partial_n\omega_{nj}\\
&\quad+\sum_{n=2}^{N}k_n\sum_{j=1}^{n-1}\int_{I_n}\int_{I_j}\gamma\beta(t-s)\,ds\,dt\|\partial_nW_{1,n,j}\|_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le 2\sum_{n=1}^{N}\int_{I_n}\|f\|\|U_{2,n}\|\,dt+\rho\|v_0\|^2+\|u_0\|_1^2\\
&\le 2\int_0^T\|f\|\,dt\max_{1\le n\le N}\|U_{2,n}\|+\rho\|v_0\|^2+\|u_0\|_1^2\\
&\le \frac{2}{\rho}\Big(\int_0^T\|f\|\,dt\Big)^2+\frac{\rho}{2}\max_{1\le n\le N}\|U_{2,n}\|^2+\rho\|v_0\|^2+\|u_0\|_1^2.
\end{aligned}$$

И така, може вече да формулираме следната оценка:

$$\frac{\rho}{2}\|U_{2,N}\|^2+(1-\gamma)\|U_{1,N}\|_1^2\le\frac{2}{\rho}\Big(\int_0^T\|f\|\,dt\Big)^2+\rho\|v_0\|^2+\|u_0\|_1^2.$$

1.7 Примери и числови резултати

Пример 1.1

Ще илюстрираме резултатите, получени в § 1.2 и § 1.5. Разглеждаме следната едномерна спектрална задача от четвърти ред: Търсим $(\lambda,u)\in\mathbf{R}\times H^2(0,\pi)$ такива, че

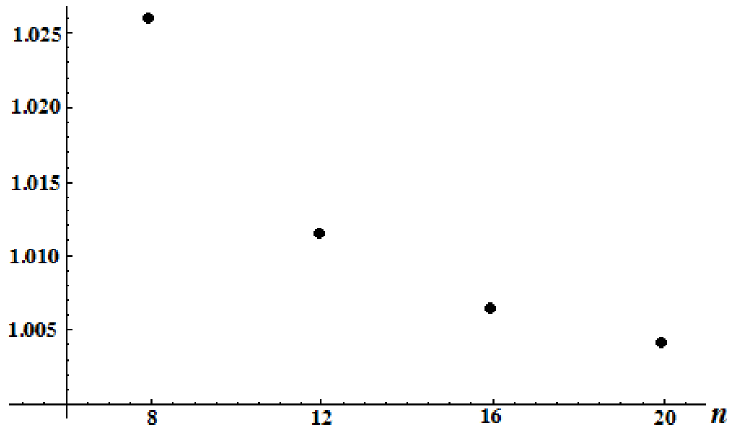
$$\begin{gathered}
u^{IV}=\lambda u \quad \text{в } (0,\pi),\\
u(0)=u(\pi)=u''(0)=u''(\pi)=0.
\end{gathered}$$

Съответната смесена задача е: Търсим $(\lambda,u,\sigma)\in\mathbf{R}\times[H^2(0,\pi)]^2$ такива, че

$$\begin{matrix}-u''=\sigma\\ -\sigma=\lambda u\end{matrix}\quad,\quad \text{в } (0,\pi),$$

Таблица 1.1: Пресмятане на собствени стойности по смесен метод с линейни крайни елементи

n	$\lambda_{1,h}$	$\lambda_{2,h}$	$\lambda_{3,h}$
8	1.0259989	17.720289	101.61226
12	1.0114818	16.746067	89.708966
16	1.0064440	16.415982	85.805587
20	1.0041199	16.265135	84.047704



Фигура 1.1: Приближени стойности за λ_1 върху последователност от разделяния, като $n = 8; 12; 16; 20$ е броят на крайните елементи

където

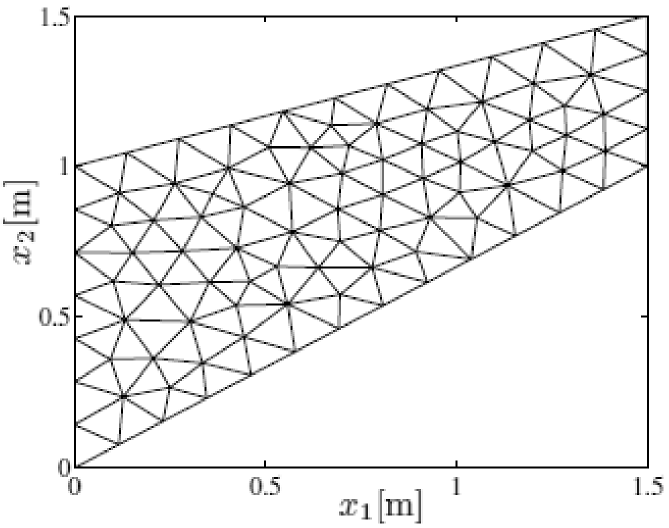
$$u(0) = u(l) = \sigma(0) = \sigma(l) = 0.$$

Точните собствени стойности са известни, което е и част от мотивацията за избор на разглежданата моделна задача:

$$\lambda_j = j^4, \quad u_j(x) = C \sin jx, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Числовите пресмятания за първите три собствени стойности са извършени по смесен метод, при използване на линейни крайни елементи. Резултатите, представени в Таблица 1.1, са върху четири различни мрежи - интервала $(0, \pi)$ разделяме съответно на $8, 12, 16, 20$ подинтервала (крайни елементи). Мрежовият параметър е равен на π/n, $n = 8; 12; 16; 20$.

На Фиг. 1.1 нагледно е представена асимптотиката на приближените стойности, апроксимиращи основната собствена честота.



Фигура 1.2: Дискретизация по (x_1, x_2)

Пример 1.2

Тук ще демонстрираме предложения в § 1.6 метод за решаване на задача от вискоеластичността, описана с динамичния модел (1.87). Разглеждаме двумерна структура, подложена на равнинен опън, при зададени следните начални условия, гранични условия и параметри на модела:

$$u(x,0) = 0\text{m}, \quad \dot{\mathrm{u}}(x,0) = 0\text{m/s}, \quad f(x,t) = 0\text{N/m}^3,$$

$$u(x,t) = 0\text{m} \ \text{ при } x_1 = 0\text{m},$$

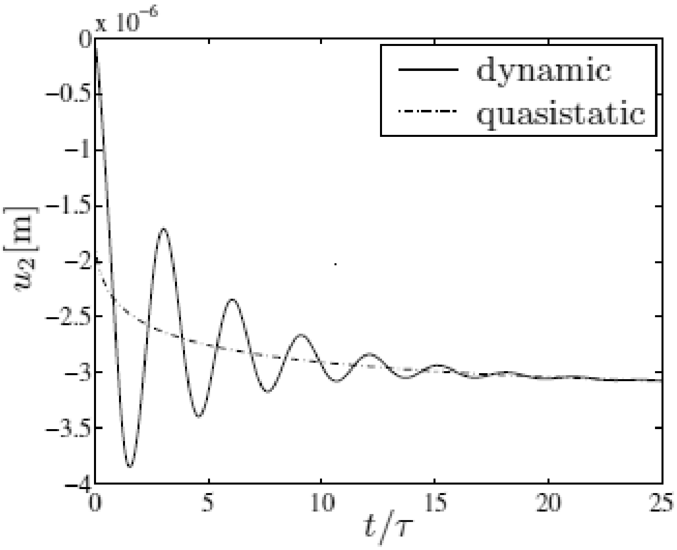
$$g(x,t) = (0,-1)\eta(t)\text{Pa} \ \text{ при } x_1 = 1.5\text{m},$$

$$\gamma = 0.5, \quad E_0 = 10\text{MPa}, \quad \alpha = 0.5, \quad \nu = 0.3, \quad \rho = 40\text{kg/m}^3,$$

където $\eta(t)$ е единичната функция на Heaviside.

На Фиг. 1.2 е показана геометрията и дискретизацията по пространствените променливи $x = (x_1, x_2)$.

На Фиг. 1.3 е илюстриранно вертикалното преместване в зависимост от времевата променлива (в безразмерни единици) в точката $(1.5, 1.5)$. За сравнение на същата фигура е дадено и решението в квазистатичния случай при безразмерната величина t/τ , т.е. когато, пренебрегвайки инерцията, приемаме $\rho\ddot{\mathrm{u}} \approx 0$. Както и трябва да се очаква, решенията на динамичния и квазистатичния модел съвпадат при достатъчно голямо отдалечаване от началния момент.



Фигура 1.3: Графика на приближено пресметнатото вертикално преместване за динамичен и квазистатичен модел

Пример 1.3

Нека да разгледаме следната спектрална задача от четвърти ред

$$\begin{aligned} &\Delta^2 u = \lambda u \qquad \text{в } \Omega, \\ &u = \Delta u = 0 \quad \text{върху} \quad \Gamma, \end{aligned} \tag{1.99}$$

където Ω е единичният квадрат, а $\Gamma \equiv \partial\Omega$.

Тази задача е свързана със Забележка 1.5 и илюстрира разглежданията от § 1.4. За нея е в сила смесена формулировка (1.32).

Точните собствени стойности за разглежданата задача се пресмятат по формулата $\lambda = (l^2 + m^2)^2\pi^4, \quad l, m \in \mathbf{N}$, а съответстващите им нормирани точни собствени функции ($b(u, u) = 1$) са

$$u(x_1, x_2) = 4 \sin l\pi x_1 \sin m\pi x_2.$$

Таблица 1.2 и Таблица 1.3 съдържат резултати за първите четири собствени стойности, пресметнати съответно посредством смесен метод върху равномерна правоъгълна мрежа с биквадратични крайни елементи и посредством апостериорна процедура, предложена в Алгоритъм 1.1 при използване на бикубични крайни елементи за решаване на допълнителната елиптична задача.

Очевидно е, че ефектът на Алгоритъм 1.1 се вижда при прилагането му върху по-груба мрежа. Също така, достатъчно е първоначалното изчисляване на собствените вектори по смесен МКЕ да се извърши при не много на брой итерации. Нека отбележим, че апостериорната процедура намалява вече получените приближени стойности на собствените стойности, което е потвърждение на теоретичните оценки от § 1.4.

Таблица 1.2: Пресмятане на собствени стойности по смесен метод с биквадратични крайни елементи

n	$\lambda_{1,h}$	$\lambda_{2,h}$	$\lambda_{3,h}$	$\lambda_{4,h}$
9	391.6563	2522.890	2522.890	6510.286
16	390.8524	2465.127	2465.127	6416.349
25	390.0355	2447.942	2447.942	6324.614
exact	389.6364	2435.227	2435.227	6234.182

Таблица 1.3: Пресмятане на приближения за собствени стойности с бикубични крайни елементи съгласно Алгоритъм 1.1

n	$\widetilde{\lambda}_{1,h}$	$\widetilde{\lambda}_{2,h}$	$\widetilde{\lambda}_{3,h}$	$\widetilde{\lambda}_{4,h}$
9	390.1023	2450.109	2464.251	6412.786
16	389.8916	2441.264	2444.357	6328.817
25	389.6961	2434.270	2435.012	6244.637
exact	389.6364	2435.227	2435.227	6234.182

Глава 2

МКЕ за спектрални задачи с нелокални условия

2.1 Въведение

Моделните задачи, дефинирани върху различни области, възникват по естествен начин, когато се изследват и моделират процеси при биологични, химични, топлинни и други подобни взаимодействия [66]. Съществуват голям брой интересни задачи от практиката, за които обединението от области представлява една свързана (и изпъкнала) област. Тази ситуация може да бъде лесно илюстрирана с тяло, което е по части хомогенно. Именно на такива класове от задачи е посветена настоящата Глава 2, т.е. не се разглеждат взаимодействия от решения на задачи, дефинирани върху несвързани (disjoint) области. Нещо повече, общите точки между съседните области биха могли да образуват геометрична структура със същата размерност (застъпващи се области).

Важността от изследване на задачите, определени върху многокомпонентни области, определя едно сравнително ново и бързо развиващо се направление в диференциалните уравнения и числовия анализ, наречено *задачи с вътрешни граници*, или *интерфейсни задачи* (виж напр. [62]). Но преди да направим класификация на цитираните проблеми, нека да отговорим на въпроса защо е важно и се налага изследване и апроксимация именно на спектралните задачи, дефинирани върху многокомпонентни области.

Не само при оразмеряване на композитни конструктивни материали, но преди всичко при динамични процеси, познаването на спектъра на моделния елиптичен оператор е абсолютно необходимо. Така например, при пренос на топлина между контактуващи тела, за да приложим известния експоненциален закон за определяне на температурното поле, трябва да знаем поне първите няколко собствени двойки на основния диференциален оператор. Подобна е и ситуацията при изследване на акустичните свойства на комплексна и свързана област (музикален инструмент). В този случай първите основни (обер-) честоти на диференциалния оператор от хиперболичното моделно уравнение играят определяща роля в изследването.

Главната особеност в интерфейсните задачи се съдържа в граничните условия и най-вече в условията върху вътрешните граници. Там решенията върху съседни област не съвпадат локално (обща функция върху границата), а сумарно като една и съща стойност на интеграл върху обща страна. Друга ситуация настъпва, когато динамичната моделна задача има променливи във времето гранични условия [73].

Тогава за съответната спектрална задача спектралният параметър ще се съдържа и в граничните условия (задача на Стеклов) [42].

Съществуват основно три типа гранични задачи, дефинирани върху многокомпонентна област. Тяхната крайноелементна апроксимация за съответните спектрални задачи е обект на изследване в тази глава.

Те са следните:

(i) Интерфейсни задачи с преходни гранични условия (transition conditions)

Такива задачи възникват, когато познаваме поведението на неизвестната функция върху вътрешната граница в съвкупност (в интегрален смисъл) и тогава имаме нелокални преходни условия. Такива модели са характерни за колоидалната химия, електрохимията, както и в теорията на електромагнитните полета [120, 122].

(ii) Задачи, дефинирани върху застъпващи (припокриващи) се области (over- lapping domains)

Нелокалните условия в този случай са наложени върху общата част на областите. Задачите са от теорията на топлопроводимостта, механика на флуидите и в полупроводниковата техника. Този тип нестандартни задачи са изучени предимно за едномерна област или за правоъгълна застъпваща се част (виж [67, 83]).

(iii) Контактни задачи

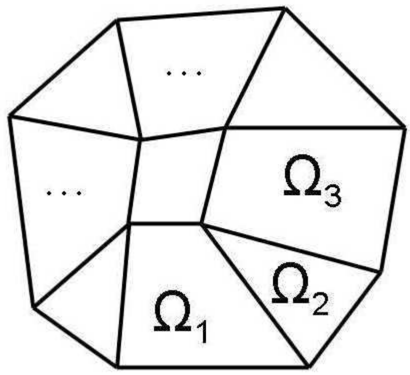
Обикновено това са задачи, дефинирани върху двукомпонентни области. Върху общата им част (граница) е дефинирано нелокално (интегрално) преходно условие. Съществува голямо разнообразие от моделни контактни задачи, свързани с топлообмен [127], триене на материалните тела [76], контактни термоеластични задачи [60] и много други.

В тази глава са разгледани въпроси, касаещи и трите вида задачи върху многокомпонентни области от гледна точка на крайноелементните приближения. Разгледани са също и задачи с нелокални условия върху част от границата. Получени са два основни приноса в теорията на МКЕ за по-горе цитираните задачи:

(а) Предложен е общ подход за крайноелементен анализ на задачите с вътрешни граници и на такива със застъпващи се области. Използвани са нови крайни елементи с интегрални степени на свобода.

(б) За така споменатия подход са доказани оценки от оптимален ред на сходимост, а където е възможно – и оценки от тип суперсходимост, получени чрез подходяща апостериорна техника.

Резултатите от тази глава са публикувани в статии [17, 18, 19, 20, 21, 28].



Фигура 2.1: Многокомпонентна (съставна) полигонална област

2.2 Нов подход в МКЕ за спектрални задачи с вътрешни граници

Целта в този параграф е да покажем един нов подход при задачи с преходни нелокални условия върху вътрешните граници на областта. По-специално, ще покажем ролята на крайните елементи с интегрални степени на свобода.

Нека $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ е изпъкнала многоъгълна област с граница

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}}.$$

В разглеждания случай $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$ са частите, на които се разделя $\partial\Omega$, като те нямат сечение върху границата. Всяка от тези части се състои от краен брой отсечки от $\partial\Omega$. Нека също Ω да е разделена на M отворени подобласти, които са изпъкнали незастъпващи се многоъгълници Ω_i, $i = 1, \dots, M$ (виж Фиг. 2.1). При $j = 1, 2$ и $i, k = 1, \dots, M$ въвеждаме следните означения:

$$\Gamma_i^{(j)} = \Gamma^{(j)} \cap \partial\Omega_i, \text{ ако } \operatorname{meas}(\Gamma^{(j)} \cap \partial\Omega_i) > 0,$$

$$\Gamma_{i,k} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_k, \text{ ако } \operatorname{meas}(\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_k) > 0.$$

Моделната задача, която разглеждаме, е следната: Да се намери числото $\lambda \in \mathbf{R}$ и M на брой функции u_i, $i = 1, \dots, M$, които удовлетворяват диференциалната система:

$$-\sum_{l,m=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{lm}^{(i)} \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right) + a_0^{(i)} u_i = \lambda u_i, \quad \text{в } \Omega_i, \ i = 1, \dots, M, \tag{2.1}$$

а също така и класическите гранични условия на Robin и Dirichlet

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu^{(i)}} + \sigma^{(i)} u_i = 0 \ \text{ върху } \Gamma_i^{(1)}, \tag{2.2}$$

$$u_i = 0 \ \text{ върху } \Gamma_i^{(2)}, \ i = 1, \dots, M, \tag{2.3}$$

както и следните нелокални условия на Dirichlet:

$$\int_{\Gamma_{i,k}} [u_i(s) - u_k(s)]\, ds = 0, \quad i,k \in \{1,2,\ldots,M\}, \tag{2.4}$$

заедно с равенствата

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu^{(i)}} = -\frac{\partial u_k}{\partial \nu^{(k)}} = \text{const} \;\; \text{върху } \Gamma_{i,k}. \tag{2.5}$$

В последната зависимост $\partial u_i/\partial \nu^{(i)}$ е нормалната производна на u_i, дефинирана посредством

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu^{(i)}} \equiv \sum_{l,m=1}^{2} a_{lm}^{(i)} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \nu_l^{(i)},$$

където $\nu_l^{(i)}$ означава $l-$тата компонента на външния единичен нормален вектор.

Забележка 2.1 *Числовата стойност на нормалната производна върху $\Gamma_{i,k}$ в (2.5) не е дадена по условие и трябва да бъде намерена, което е част от решението на задачата.*

Функциите-коефициенти в уравненията (2.1) удовлетворяват стандартните условия за регулярност (гладкост), симетричност и елиптичност, т.е. за $i = 1,\ldots,M$ имаме:

$$a_{lm}^{(i)} \in L_\infty(\Omega_i),\; a_{12}^{(i)} = a_{21}^{(i)} \text{ почти навсякъде в } \Omega_i,\; l,m = 1,2;$$

$$a_0^{(i)} \in L_\infty(\Omega_i),\; a_0^{(i)} \geq 0 \text{ почти навсякъде в } \Omega_i;$$

$$\sigma^{(i)}(x) \in L_\infty(\Gamma_i^{(1)}),\; \sigma^{(i)} > 0 \text{ почти навсякъде в } \Gamma_i^{(1)};$$

$$\exists\, \alpha > 0 : \sum_{l,m=1}^{2} a_{lm}^{(i)} \xi_l \xi_m \geq \alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2),\; \forall (\xi_1,\xi_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ почти навсякъде в } \Omega_i.$$

Задачата (2.1)-(2.5) е изследвана от De Shepper и Van Keer [69, 70]. Те свеждат проблема до абстрактните вариационни задачи за собствени стойности и функции в Хилбертови пространства. Анализът за оценка на грешката в [70] и [69] се основава на модифициран Лагранжев интерполант (така наречената *несъвършена интерполация*).

Ще предложим нов подход, който да избегне използването на несъвършения Лагранжев интерполант и да се справи по-успешно с преходните условия (2.4). Методът ще даде възможност за по-естествено доказателство на реда на сходимост. Използването на интегрални степени на свобода позволява да се конструира подходяща възстановяваща апостериорна процедура (виж напр. [16, 96]).

Да въведем пространствата

$$V_i = \left\{ v_i \in H^1(\Omega_i) : \ v_i = 0 \text{ върху } \Gamma_i^{(2)} \right\}, \ i = 1, \ldots, M$$

и нека $\widetilde{V} = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_M$.

Пространството, което отчита преходното условие (2.4), се дефинира като:

$$V = \left\{ v \in \widetilde{V} : \ \int_{\Gamma_{i,k}} [v_i(x) - v_k(x)] \, ds = 0, \quad i, k \in \{1, 2, \ldots, M\} \right\}.$$

Очевидно V е затворено подпространство на $\widetilde{V}$.

Като използваме V за пространство от пробни функции, задачата (2.1)-(2.5) може да бъде преформулирана като задача във вариационна форма по следния начин (виж [69]): Да се намери двойката $(\lambda, u) \in \mathbf{R} \times V$ така, че

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in V, \tag{2.6}$$

където

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{M} \left[\int_{\Omega_i} \left(\sum_{l,m=1}^{2} a_{lm}^{(i)} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + a_0^{(i)} u_i v_i \right) dx + \int_{\Gamma_i^{(1)}} \sigma^{(i)} u_i v_i \, ds \right]$$

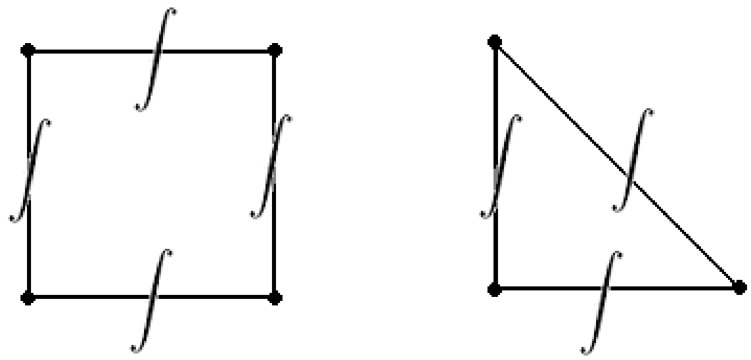
и скаларното произведение в Лебеговото пространство $H \equiv L_2(\Omega_1) \times \ldots \times L_2(\Omega_M)$ е дефинирано като

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{M} \int_{\Omega_i} u_i v_i \, dx.$$

Формалната еквивалентност между вариационната задача (2.6) и задача (2.1)-(2.5) е доказана в [70] (виж Теорема 2.1).

Ясно се вижда, че $a(\cdot, \cdot)$ е ограничена, симетрична и строго коерцитивна билинейна форма във $\widetilde{V} \times \widetilde{V}$, стига V да е гъсто и компактно подпространство на $L_2(\Omega)$. Следващата теорема доказва съществуването на точни собствени двойки на уравнение (2.6).

Теорема 2.1 *([70], Теорема 2.1) Задачата (2.6) притежава безброй много собствени стойности λ_l, като всичките са строго положителни, с крайна кратност и редицата от собствени стойности няма крайна точка на сгъстяване. Можем да ги подредим във възходящ ред $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to +\infty$. Съответните собствени функции u_l могат да бъдат ортогонализирани и нормирани в $L_2(\Omega)$ и тогава редицата $\left\{u_l/\sqrt{\lambda_l}\right\}$ е ортонормална относно билинейната форма $a(\cdot, \cdot)$. Тези функции образуват Хилбертов базис както за V, така и за $L_2(\Omega)$.*



Фигура 2.2: Правоъгълен и триъгълен елемент с интегрални степени на свобода

Да разгледаме фамилиите $\tau_{h_i}^{(i)}$ от регулярни крайноелементни триангулации на областите $\Omega_i,\ i = 1, \ldots, M$, които удовлетворяват стандартните предположения (виж [56]). С $h_i,\ i = 1, \ldots, M$ са означени мрежовите параметри и $h = \max_i h_i$. Важно е да се подчертае, че възлите на всеки два съседни елемента съвпадат върху тяхната обща страна или общ връх.

На дадена триангулация $\tau_{h_i}^{(i)}$ и фиксирано естествено число n съпоставяме следните функционални пространства:

$$X_{h_i}^{(i)} = \left\{ v_i \in C(\overline{\Omega}_i) :\ v_i|_{K^{(i)}} \in P(K^{(i)})\ \forall K^{(i)} \in \tau_{h_i}^{(i)} \right\},\ i = 1, \ldots, M,$$

$$X_{h_i,0}^{(i)} = \left\{ v_i \in X_{h_i}^{(i)} :\ v_i|_{\Gamma_i^{(2)}} = 0 \right\},\ i = 1, \ldots, M,$$

където $P(K^{(i)})$ е или $\mathcal{Q}_n(K^{(i)})$, или $\mathcal{P}_n(K^{(i)})$ в случай съответно за четириъгълни или триъгълни крайни елементи и n е цяло положително число.

Да въведем произведението от пространства:

$$X_{h,0} = X_{h_1,0}^{(1)} \times X_{h_2,0}^{(2)} \times \ldots \times X_{h_M,0}^{(M)}.$$

Тогава крайноелементното пространство V_h, дефинирано чрез

$$V_h = \left\{ v \in X_{h,0} :\ \int_{\Gamma_{i,k}} [u_i(x) - u_k(x)]\ ds = 0,\ i,k \in \{1, 2, \ldots, M\} \right\}$$

е едно крайномерно подпространство на V.

Нека $v \in V \cap H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$. Тогава, ако $\Pi_h v \in X_{h,0}$ е по части Лагранжев интерполант на v върху цялата триангулация, то $\Pi_h v \notin V_h$. Ако допуснем, че задачата ще бъде решавана посредством стандартен МКЕ, то тогава се налага да се конструира модифициран несъвършен интерполант $\widetilde{\Pi}_h v$ чрез подходяща корекция на стойностите в подбрано множество от възли върху подобластите Ω_i така, че $\widetilde{\Pi}_h v \in V_h$ (виж [69, 70]).

За да избегнем използването на несъвършен интерполант, ще приложим подхода, който се използва при така наречените интерполирани крайни елементи (виж [16, 96]). Нека да означим върховете и страните на произволен триъгълен елемент $K^{(i)}$ съответно с $a_k^{(i)}$ и $l_k^{(i)}$, $k = 1, 2, 3$, $i = 1, \dots, M$. За този елемент избираме степени на свобода такива, че всеки полином $p(x) \in \mathcal{P}_2(K^{(i)})$ е определен чрез: стойностите в $a_k^{(i)}$ и стойностите на интегралите върху страните $\displaystyle\int_{l_k^{(i)}} p(s)\,ds$, (виж Фиг. 2.2). Условията "върхове - страни" за произволен правоъгълен елемент са: стойностите във върховете $a_k^{(i)}$, $k = 1, 2, 3, 4$; стойностите на интегралите върху страните $\displaystyle\int_{l_k^{(i)}} p(s)\,ds$, $k = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, \dots, M$, където $p(x) \in \mathcal{Q}_2(K^{(i)})$ и може евентуално да се добави стойността на тестовата функция в центъра на елемента или това условие да се замени с интегралната стойност $\displaystyle\int_{K^{(i)}} p(x)\,dx$ (Фиг. 2.2).

Забележка 2.2 *Нашите разглеждания се илюстрират с полиноми от $\mathcal{P}_2$ (съответно $\mathcal{Q}_2$). Методът обаче би могъл да се приложи и за полиноми от степен, по-висока от втора. Линейният случай води до неконформност и е обект на изследване в следващата Глава 3.*

Нека сега по аналогия със стандартния Лагранжев интерполационен оператор $\Pi_h : C(\Omega_1) \times \ldots \times C(\Omega_M) \to X_{h,0}$, $\Pi_h = (\Pi_{h_1}, \dots, \Pi_{h_M})$, да дефинираме и интерполационния оператор от интегрален тип: $\pi_h : C(\Omega_1) \times \ldots \times C(\Omega_M) \to X_{h,0}$, където $\pi_h = (\pi_{h_1}, \dots, \pi_{h_M})$.

Поради нелокалните преходни условия, очевидно в общия случай ако $v \in V$, то $\Pi_h v \notin V_h$. От друга страна, при избора на интегрални степени на свобода лесно се вижда, че $\pi_h v \in V_h$.

Резултатите, които ще получим, е когато $\tau_{h_i}^{(i)}$ се състоят от триъгълни крайни елементи. Изследванията за случая на четириъгълни крайни елементи са аналогични. И така, най-напред ще оценим разликата между двата интерполанта Π_h и π_h.

Теорема 2.2 *Нека функцията $v = (v_1, v_2, \dots, v_M)$ принадлежи на $V \cap H^3(\Omega)$, $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \cup \ldots \cup \overline{\Omega}_M$.*

Тогава съществува константа $C = C(\Omega) > 0$, независеща от мрежовия параметър h така, че

$$\|v - \pi_h v\|_{m,\Omega} \le C h^{3-m} \|v\|_{3,\Omega}, \quad m = 0, 1, \tag{2.7}$$

където $\displaystyle\|v\|_{k,\Omega} = \sum_{i=1}^{M} \|v_i\|_{k,\Omega_i}$ за $k \ge 0$.

Доказателство. Ще пресметнем разликата $\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i$ върху всеки краен елемент $K_j^{(i)}$, $j = 1, \cdots, k_i$, $i = 1, \dots, M$. Да въведем един *основен* елемент

$$T : \{(t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2 : \ t_1 \ge 0, \ t_2 \ge 0, \ t_1 + t_2 \le 1\}.$$

Означаваме с a_k върховете на T, а с $a_{3+k},\ k=1,2,3$ – средите на неговите страни. Тези страни ще означим с l_k, като l_k е срещулежаща на върха $a_k,\ k=1,2,3$.

Всеки триъгълник $K_j^{(i)}$ ще трансформираме в основния T посредством линейни функции, т.е.

$$t_1 = L_{1,j}^{(i)}(x_1,x_2); \quad t_2 = L_{2,j}^{(i)}(x_1,x_2),$$
$$j=1,\dots,k_i;\ i=1,\dots,M.$$

Очевидно, $|L_{s,j}^{(i)}(x_1,x_2)| = \mathcal{O}(1/h_j^{(i)})$, където $h_j^{(i)}$ е диаметърът на $K_j^{(i)}$ и $s=1,2$.

Базисните функции на Лагранжевия интерполант Π_h върху T са:

$$\psi_1(t_1,t_2) = 2t_1^2+2t_2^2+4t_1t_2-3t_1-3t_2+1;$$

$$\psi_2(t_1,t_2) = 2t_1^2-t_1; \quad \psi_3(t_1,t_2)=2t_2^2-t_2; \quad \psi_4(t_1,t_2)=4t_1t_2;$$

$$\psi_5(t_1,t_2) = -4t_2^2-4t_1t_2+4t_2; \quad \psi_6(t_1,t_2) = -4t_1^2-4t_1t_2+4t_1.$$

Съответно, базисните функции за интерполанта π_h са:

$$\varphi_1(t_1,t_2) = 3t_1^2+3t_2^2+6t_1t_2-4t_1-4t_2+1;$$

$$\varphi_2(t_1,t_2) = 3t_1^2-2t_1; \quad \varphi_3(t_1,t_2)=3t_2^2-2t_2; \quad \varphi_4(t_1,t_2)=6t_1t_2;$$

$$\varphi_5 = -6t_2^2-6t_1t_2+6t_2; \quad \varphi_6(t_1,t_2) = -6t_1^2-6t_1t_2+6t_1.$$

Тогава за $i=1,\dots,M$ се получава:

$$(\Pi_{h_i}v_i - \pi_{h_i}v_i)_{|T} = \sum_{k=1}^{3} v_i(a_k)\left[\psi_k(t_1,t_2)-\varphi_k(t_1,t_2)\right]$$
$$+\sum_{k=1}^{3} v_i(a_{3+k})\psi_{3+k}(t_1,t_2) - \sum_{k=1}^{3}\int_{l_k} v_i(s)\,ds.\varphi_{3+k}(t_1,t_2)$$
$$= \varphi_4(t_1,t_2)\left[\frac{1}{6}v_i(a_2)+\frac{4}{6}v_i(a_4)+\frac{1}{6}v_i(a_3)-\int_{l_1} v_i(s)\,ds\right]$$
$$+\varphi_5(t_1,t_2)\left[\frac{1}{6}v_i(a_1)+\frac{4}{6}v_i(a_5)+\frac{1}{6}v_i(a_3)-\int_{l_2} v_i(s)\,ds\right]$$
$$+\varphi_6(t_1,t_2)\left[\frac{1}{6}v_i(a_1)+\frac{4}{6}v_i(a_6)+\frac{1}{6}v_i(a_2)-\int_{l_3} v_i(s)\,ds\right].$$

Изразите в скобите биха могли да се представят чрез функционали на грешката от квадратурна формула [56]. Получаваме

$$(\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i)_{|T} = \sum_{k=1}^{3} \varphi_{3+k}(t_1, t_2) E_T^k(v_i), \tag{2.8}$$

където функционалът на грешката $E_T^k,\ k = 1, 2, 3$ представя грешката от квадратурната формула на Simpson върху страните на основния елемент T.

Лесно се проверява, че $E_T^k(v_i) = 0,\ k = 1, 2, 3$ за всяко $v_i \in \mathcal{P}_2(T)$. От друга страна $|\varphi_{3+k}(t_1, t_2)| \leq 3/2,\ (t_1, t_2) \in T$.

От (2.8), като използваме стандартните трансформации и лемата на Bramble-Hilbert [46], за произволен елемент $K_j^{(i)},\ j = 1, \ldots, k_i;\ \ i = 1, \ldots, M$ получаваме

$$|\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i|_{|_{K_j^{(i)}}} \leq C h_i^3 |v_i|_{3, K_j^{(i)}},$$

като $|\cdot|_{3,K_j^{(i)}}$ е Соболевата полунорма от трети ред върху елемента $K_j^{(i)}$.

На база на последното неравенство оценката в L_2-норма е:

$$\begin{aligned} \|\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i\|_{0,\Omega} &= \left(\sum_{i=1}^{M} \sum_{K_j^{(i)} \in \tau_{h_i}^{(i)}} \int_{K_j^{(i)}} |\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq C h^3 \|v\|_{3,\Omega}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

След като пресметнем първите частни производни от разликата на двата интерполанта и използваме обратното неравенство [56], ще достигнем до

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_s} (\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i) \right|_{|_{K_j^{(i)}}} \leq C h_i^2 |v_i|_{3, K_j^{(i)}},\ s = 1, 2.$$

Следователно, оценката в H^1-норма е

$$\|\Pi_h v - \pi_h v\|_{1,\Omega} \leq C h^2 \|v\|_{3,\Omega}.$$

Последното неравенство и (2.9) дават:

$$\|\Pi_h v - \pi_h v\|_{m,\Omega} \leq C h^{3-m} \|v\|_{3,\Omega},\ m = 0, 1. \tag{2.10}$$

Лагранжевият интерполант дава познатия оптимален ред на точност (виж [57]). Тогава оценката (2.7) следва от (2.10) като вземем предвид, че

$$\|v - \pi_h v\|_{m,\Omega} \leq \|v - \Pi_h v\|_{m,\Omega} + \|\Pi_h v - \pi_h v\|_{m,\Omega},\ m = 0, 1.$$

■

Нека сега да дефинираме елиптичния проектор $R_h : V \to V_h$, удовлетворяващ равенството

$$a(u - R_h u, v_h) = 0, \quad \forall u \in V,\ v_h \in V_h.$$

Като следствие от Теорема 2.2 са в сила следните апроксимационни свойства на крайноелементното пространство $V_h \subset V$:

$$\begin{aligned} &\inf_{v_h \in V_h} \{\|v - v_h\|_{0,\Omega} + h|v - v_h|_{1,\Omega}\} \le Ch^3\|v\|_{3,\Omega}, \\ &\|v - R_h v\|_{1,\Omega} \le Ch^2\|v\|_{3,\Omega}, \quad \forall v \in V \cap H^3(\Omega). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Крайноелементното приближение на задача (2.6) е: Да се определи двойката $(\lambda_h, u_h) \in \mathbf{R} \times V_h$ така, че

$$a(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.12}$$

Тук може да приложим анализ на грешката в МКЕ, като следствие от оценките (2.11) (виж напр. [69, 70]). Ако (λ, u) е едно решение на (2.6) и (λ_h, u_h) е съответното приближено решение, получено от (2.12), то

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \le Ch^2\|u\|_{3,\Omega},$$

$$|\lambda - \lambda_h| \le Ch^4\|u\|_{3,\Omega}.$$

2.3 Ускоряване на сходимостта при спектрални задачи с нелокални условия

Ще представим метод за ускоряване на сходимостта на определения по МКЕ спектър, когато върху част от границата са поставени нелокални гранични условия. Тогава за многоъгълната област $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ границата се състои от две непресичащи се части, като $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, всяка от които се състои от краен брой страни от многоъгълника.

Ще разгледаме две моделни задачи:

(Z_1): Търсим $u(x) \in H^2(\Omega),\ u(x) \neq 0$ и $\lambda \in \mathbf{R}$, удовлетворяващи диференциалното уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0 u = \lambda u, \quad x \in \Omega, \tag{2.13}$$

при следните нелокални гранични условия на Dirichlet

$$\int_{\Gamma_1} u\, ds = 0, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i = K = \text{const}, \quad x \in \Gamma_1, \tag{2.15}$$

а върху Γ_2 е зададено условие на Robin ($\sigma = \text{const} \geq 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = 0, \quad x \in \Gamma_2. \tag{2.16}$$

(Z_2): Търсим $u(x) \in H^2(\Omega),\ u(x) \neq 0$ и $\lambda \in \mathbf{R}$, които удовлетворяват уравнението (2.13), както и нелокалното гранични условие на Newmann

$$\int_{\Gamma_1} \sum_{i,j=1}^{2} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i \right) ds = 0, \tag{2.17}$$

$$u = K = \text{const}, \quad x \in \Gamma_1, \tag{2.18}$$

а върху Γ_2 отново е зададено условието на Robin (2.16).

Константата K в (2.15) и (2.18) е неизвестна и може да бъде определена като част от решението на съответната задача.

Функциите-коефициенти в (2.13)-(2.17) удовлетворяват стандартните условия за регулярност (гладкост), симетричност и елиптичност. Тези условия са аналогични със съответните, представени в предходния § 2.2. Освен това тук ν_i означава i-тата компонента на външния нормален вектор $\overline{\nu}$ на границата $\partial\Omega$.

Задачите (Z_1) и (Z_2) могат да бъдат отнесени към така наречените уравнения на Helmholtz, които имат широко приложение в теорията на електромагнитните полета (виж напр. [120, 122, 151]). Този тип задачи, както и техните крайноелементни апроксимации са изучавани от De Shepper и Van Keer [68, 133].

Важно е да отбележим, че уравнението (2.13) и граничното условие върху Γ_2 (2.16) са едни и същи и за двете задачи (2.13)-(2.16) и (2.13), (2.16)-(2.18). По такъв начин ще получим едно и също представяне за вариационната $a-$форма:

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right) dx + \int_{\Gamma_2} \sigma uv\, ds \quad \forall u, v \in V, \tag{2.19}$$

където V е подпространство на $H^1(\Omega)$.

Нашият подход ще бъде представен за задачата с нелокални условия на Newmann (2.17). Тогава пространството от пробни функции се определя посредством

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \ v \text{ е постоянна върху } \Gamma_1 \right\}.$$

Вариационната задача, която съответства на (Z_2) е: Търсим $(\lambda, u) \in \mathbf{R} \times V$ така, че

$$a(u, v) = \lambda(u, v) \quad \forall v \in V. \tag{2.20}$$

Според дефиницията на V, от (2.19) е очевидно, че:

- $a(\cdot, \cdot)$ е ограничена, симетрична и строго коерцитивна билинейна форма върху $V \times V$;
- V е затворено подпространство на $H^1(\Omega)$. Също така, V е плътно и компактно вложено в $L_2(\Omega)$.

Очевидно е, че (виж напр. [133] и [119]) задачата (2.20) притежава изброимо множество от собствени стойности λ_i, които са строго положителни и с крайна кратност. Съответните собствени функции u_i могат да бъдат ортогонализирани и нормирани в $L_2(\Omega)$. Те формират един Хилбертов базис във V.

За произволна функция $f \in L_2(\Omega)$ нека да разгледаме елиптичната задача във вариационна постановка

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V.$$

Така операторът $\mathcal{T} : \ L_2(\Omega) \to V$, дефиниран посредством $u = \mathcal{T} f, \ u \in V$, е разрешаващ оператор за граничната (изходна) задача. Очевидно:

$$a(\mathcal{T} u, v) = a(u, \mathcal{T} v) \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

$$(\mathcal{T} u, v) = (u, \mathcal{T} v) \quad \forall u, v \in L_2(\Omega).$$

Също така е ясно, че $\mathcal{T}$ е ограничен. Тогава [119] λ е собствена стойност и u е собствена функция тогава и само тогава, когато $u - \lambda \mathcal{T} u = 0, \ u \neq 0$.

Ще апроксимираме (2.20) по МКЕ. Затова τ_h ще е съвкупност от регулярни триангулации на Ω, която удовлетворява стандартни изисквания [56]. На τ_h съпоставяме крайноелементни подпространства V_h на $V \cap C(\overline{\Omega})$ така, че рестрикцията на всяка функция върху тези пространства и върху всеки краен елемент $K \in \tau_h$ е полином от $\mathcal{P}_k(K)$ или $\mathcal{Q}_k(K)$, ако съответно K е триъгълник или четириъгълник от τ_h, а k е цяло положително число.

Да въведем крайноелементното пространство, свързано с разделянето τ_h:

$$X_h = \left\{ v \in C_0(\overline{\Omega}) : \ v_{|K} \in \mathcal{P}_k(K) \ (\text{или } \mathcal{Q}_k(K)), \ \forall K \in \tau_h \right\} \subset H^1(\Omega).$$

Да разгледаме също така пространството

$$X_{0,h} = \left\{ v \in X_h : v = 0 \text{ върху } \Gamma_1 \right\}.$$

Множеството от възли $\{a_i\}_{i=1}^N$ и техният брой N зависят от параметъра h. Те са свързани с X_h, а $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ е каноничен базис на X_h. Номерацията на възлите е такава, че първите N_0 от тях са върху "специалната" граница Γ_1.

Да дефинираме следната функция:

$$\psi = \sum_{i=1}^{N_0} \varphi_i.$$

За нея

$$\begin{aligned} \psi(a_i) &= 1,\ i = 1, \ldots, N_0; \\ \psi(a_i) &= 0,\ i = N_0 + 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Тогава крайноелементното пространство V_h може да се представи като:

$$V_h = X_{0,h} \oplus \operatorname{span} \psi.$$

Очевидно, $\dim X_{0,h} = N - N_0$. Също така, при получаването на матриците на маса и коравина първите N_0 възела са особени, а функциите ψ и $\{\varphi\}_{i=N_0+1}^N$ образуват базис на V_h.

Приближената собствена двойка (λ_h, u_h), получена по МКЕ, приближаваща задача (2.20), е: Търсим $\lambda_h \in \mathbf{R}$ и функция $u_h \in V_h,\ u_h \neq 0$ така, че

$$a(u_h, v_h) = \lambda_h (u_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.21}$$

Решаващ момент в крайноелементния анализ е конструирането на подходящо V_h. Видът на V_h, предложен от De Shepper и Van Keer, дава оптимална апроксимационна оценка (виж [133], Лема 3.1 и Лема 3.2):

$$\inf_{v_h \in V_h} \{\|v - v_h\|_{0,\Omega} + h\|v - v_h\|_{1,\Omega}\} \leq Ch^{r+1}\|v\|_{r+1,\Omega}, \tag{2.22}$$
$$\forall v \in V \cap H^{r+1}(\Omega),$$

където $1 \leq r \leq k$.

Като използваме изследванията в предходния параграф, чрез подходящи крайни елементи с интегрални степени на свобода можем да осигурим оптимален ред на сходимост, както и удовлетворяване на нелокалните гранични условия.

Основавайки се на резултата (2.22), се получават оценките за собствени функции и собствени стойности [119]:

$$\|u - u_h\|_{m,\Omega} \leq Ch^{k+1-m}\|u\|_{k+1,\Omega}, \quad m = 0, 1, \tag{2.23}$$

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^{2k}\|u\|^2_{k+1,\Omega}. \tag{2.24}$$

Сега ще изложим един метод, който ускорява сходимостта, т.е. ще получим по-висок порядък от този в (2.23) и (2.24) за задачи с нелокални гранични условия.

Забележка 2.3 *Методът, който ще изложим, е приложим и за широк клас "стандартни" задачи за собствени стойности, апроксимирани по МКЕ (виж [14] и [116]). Вариантът за смесения МКЕ беше представен в Глава 1. Идеята тук е да докажем приложимостта му за някои "нестандартни" спектрални задачи.*

Нека u_h е някоя намерена чрез (2.21) приближена собствена функция, като $(u_h, u_h) = 1$. Като използваме това решение, да разгледаме следната елиптична задача:

$$a(\widetilde{u}, v) = (u_h, v) \quad \forall v \in V. \tag{2.25}$$

Нека сега да определим числото

$$\widetilde{\lambda} = \frac{1}{(\widetilde{u}, u_h)},$$

където $\widetilde{u}$ и u_h са съответно решенията на (2.25) и (2.21).

Нуждаем се също от приближената задача, съответстваща на (2.25), която ще решим по МКЕ.

За целта, върху τ_h ще дефинираме ново крайноелементно пространство $\widetilde{V}_h \subset V \cap C(\overline{\Omega})$ така, че рестрикцията върху всеки краен елемент K да бъде полином от по-висока степен. По-конкретно, ако за V_h си служим с полиноми от $\mathcal{P}_k(K)$ $(\mathcal{Q}_k(K))$, то е достатъчно за $\widetilde{V}_h$ да изберем по части полиномиално пространство от $\mathcal{P}_{k+1}(K)$ $(\mathcal{Q}_{k+1}(K))$.

И така, на решението $\widetilde{u}$ съпоставяме неговото приближение по МКЕ $\widetilde{u}_h$, получено от

$$a(\widetilde{u}_h, v_h) = (u_h, v_h) \quad \forall v_h \in \widetilde{V}_h. \tag{2.26}$$

Това ни позволява да определим числото

$$\widetilde{\lambda}_h = \frac{1}{(\widetilde{u}_h, u_h)},$$

където u_h и $\widetilde{u}_h$ са съответно решение на (2.21) и (2.26).

Теорема 2.3 *Нека крайноелементните пространства V_h и $\widetilde{V}_h$ се състоят от по части полиномиални функции съответно от степен k и $k+1$. Ако (λ, u) е някое решение на (2.20), удовлетворяващо нелокални гранични условия и $u \in H^{k+2}(\Omega)$, а (λ_h, u_h) е съответното му приближено решение, получено от (2.21), като точните и приближени собствени функции са ортонормирани, то валидна е следната оценка от тип суперсходимост:*

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq Ch^{2k+2} \|u\|^2_{k+2,\Omega}. \tag{2.27}$$

Доказателство. Най-напред да използваме свойствата на елиптичния разрешаващ оператор T. В нашия случай той е симетричен и ограничен. Тогава $a(Tu,v) = (u,v),\ \forall v \in V$.

В сила са още и равенствата $a(Tu,u) = 1$ и $a(u,Tu) = \lambda(u,Tu)$.

Следователно

$$\lambda = \frac{1}{(Tu,u)}.$$

Така получаваме

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\widetilde{\widetilde{\lambda}}} &= (Tu,u) - (Tu_h,u_h) + (T(u-u_h),u-u_h) \\
&\quad -(T(u-u_h),u-u_h) \\
&= 2(Tu,u) - 2(Tu,u_h) - (T(u-u_h),u-u_h) \\
&= 2(Tu,u-u_h) - (T(u-u_h),u-u_h)\,.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Ограничеността на T ни дава

$$|(T(u-u_h),u-u_h)| \leq C\|u-u_h\|^2_{0,\Omega}.$$

Ще оценим първото събираемо в дясната страна на (2.28) по следния начин:

$$\begin{aligned}
2(Tu,u-u_h) &= \frac{2}{\lambda}\left(1-(u,u_h)\right) = \frac{1}{\lambda}\left((u,u) - 2(u,u_h) + (u_h,u_h)\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}(u-u_h,u-u_h) \leq \frac{1}{\lambda}\|u-u_h\|^2_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

От (2.28) получаваме

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}| \leq C\|u-u_h\|^2_{0,\Omega}. \tag{2.29}$$

От друга страна, като използваме, че V_h и $\widetilde{V}_h$ са подпространства на V, имаме:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\widetilde{\widetilde{\lambda}}} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_h} &= (\widetilde{u},u_h) - (\widetilde{u}_h,u_h) = a(\widetilde{u}-\widetilde{u}_h,\widetilde{u}) + a(\widetilde{u}_h,\widetilde{u}) - a(\widetilde{u}_h,\widetilde{u}_h) \\
&= a(\widetilde{u}-\widetilde{u}_h,\widetilde{u}) - a(\widetilde{u}-\widetilde{u}_h,\widetilde{u}_h) = a(\widetilde{u}-\widetilde{u}_h,\widetilde{u}-\widetilde{u}_h).
\end{aligned}$$

Непрекъснатостта на $a-$формата ни позволява да заключим, че

$$|\widetilde{\lambda} - \widetilde{\lambda}_h| \leq C\|\widetilde{u}-\widetilde{u}_h\|^2_{1,\Omega}. \tag{2.30}$$

Като комбинираме неравенствата (2.29) и (2.30), ще получим:

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq C \left(\|u - u_h\|^2_{0,\Omega} + \|\widetilde{u} - \widetilde{u}_h\|^2_{1,\Omega} \right).$$

Окончателната оценка (2.27) следва от (2.23), както и от (2.22) при $r = k + 1$. ∎

Резултатът от теоремата показва, че предложената апостериорна процедура дава оценка с два порядъка по-висока, отколкото оптималната (2.24). Такива оценки се наричат още *оценки от тип ултрасходимост* [148].

Следващата стъпка е да подобрим резултата от (2.23), като приложим аналогична апостериорна процедура. За целта да въведем елиптичен проектор

$$\widetilde{R}_h : V \to \widetilde{V}_h,$$

дефиниран посредством (виж [133], Лема 3.2):

$$\forall u \in V,\ \forall v_h \in \widetilde{V}_h, \quad a(u - \widetilde{R}_h u, v_h) = 0.$$

За всяко точно решение u и неговото крайноелементно приближение u_h ще дефинираме следните функции :

$$\widetilde{w} = \widetilde{\lambda}_h \widetilde{u} = \widetilde{\lambda}_h T u_h, \quad \text{а също така}$$

$$\widetilde{w}_h = \widetilde{R}_h \widetilde{w} = \widetilde{\lambda}_h \widetilde{R}_h \circ T u_h = \widetilde{\lambda}_h \widetilde{u}_h.$$

Теорема 2.4 *Нека условията на Теорема 2.3 са изпълнени. Тогава е в сила следната оценка от тип суперсходимост:*

$$\|u - \widetilde{w}_h\|_{1,\Omega} \leq C h^{k+1} \|u\|_{k+2,\Omega}. \tag{2.31}$$

Доказателство. За да докажем теоремата, ще ни бъдат необходими следните три равенства:

$$a(u, u) = \lambda^2 a(Tu, Tu),$$

$$a(u, \widetilde{w}) = \lambda \widetilde{\lambda}_h a(Tu, Tu_h),$$

$$a(\widetilde{w}, \widetilde{w}) = \widetilde{\lambda}_h^2 a(Tu_h, Tu_h).$$

Тогава, тъй като u и u_h са ортонормирани в $L_2(\Omega)$, ще получим:

$$a(u-\widetilde{w},u-\widetilde{w}) = \lambda^2(Tu,u) - 2\lambda\widetilde{\lambda}_h(u,Tu_h) + \widetilde{\lambda}_h^2 a(Tu_h,Tu_h)$$

$$= \lambda a(Tu,u) - 2\widetilde{\lambda}_h a(Tu_h,u) + \widetilde{\lambda}_h^2 a(Tu_h,Tu_h)$$

$$= \lambda - 2\widetilde{\lambda}_h(u_h,u) + \frac{\widetilde{\lambda}_h^2}{\widetilde{\lambda}} = 2\widetilde{\lambda}_h - 2\widetilde{\lambda}_h(u,u_h) + \lambda - \widetilde{\lambda}_h + \frac{\widetilde{\lambda}_h^2}{\widetilde{\lambda}} - \widetilde{\lambda}_h$$

$$= \widetilde{\lambda}_h\left[(u,u) - 2(u,u_h) + (u_h,u_h)\right] + \lambda - \widetilde{\lambda}_h + \frac{\widetilde{\lambda}_h}{\widetilde{\lambda}}(\widetilde{\lambda}_h - \widetilde{\lambda})$$

$$= \widetilde{\lambda}_h\|u-u_h\|_{0,\Omega}^2 + (\lambda - \widetilde{\lambda}_h) + \frac{\widetilde{\lambda}_h}{\widetilde{\lambda}}(\widetilde{\lambda}_h - \widetilde{\lambda}).$$

Билинейната форма $a(\cdot,\cdot)$, определена от (2.19), е $V-$елиптична. Освен това, за да оценим $\|u-u_h\|_{0,\Omega}^2$ с по-висок порядък от $H^1(\Omega)-$нормата, се използва регулярност на $a(\cdot,\cdot)$ върху $V\times V$.

Така от (2.23) и (2.27) окончателно достигаме до

$$\|u-\widetilde{w}\|_{1,\Omega}^2 \le Ch^{2(k+1)}\|u\|_{k+2,\Omega}^2. \tag{2.32}$$

Апроксимационните свойства на $\widetilde{R}_h$ и стандартните изисквания за гладкост на решението $\widetilde{w}$ дават оптимална оценка при положение, че използваме пространство от по части полиномиални функции от степен $k+1$, т.е.

$$\|\widetilde{w}-\widetilde{w}_h\|_{1,\Omega}^2 \le C(\lambda)h^{2(k+1)}.$$

Последното неравенство и (2.32) доказват основната оценка (2.31).

■

Това, което доказахме дотук в настоящия параграф, може да систематизираме като следния практически подход:

- Решаваме спектралната задача с използване на линейни триъгълни или билинейни четириъгълни крайни елементи (виж напр. [133]);

- Допълнителната елиптична задача решаваме с използване на триъгълни квадратични или четириъгълни сирендипови елементи от интегрален тип (Фиг. 2.2).

Забележка 2.4 *Използването на апроксимиращи полиноми в МКЕ от степен, по-висока от втора, е практически неоправдано. От една страна, регулярността на решението не може да е много висока, тъй като дясната страна в елиптичната задача има гладкост най-много $H^1(\Omega)$. От друга страна, полиноми от степен, по-голяма или равна на три, са тежки при компютърна реализация за задачи от втори ред. Нека също да отбележим, че споменатите елементи осигуряват конформност на разглежданите задачи в този параграф. Случаят на неконформност е обект на разглеждане в следващата глава.*

Когато става дума за ускоряване на сходимостта, не може да остане неизследван един много ефикасен подход, който работи в случай на по-голяма гладкост на точното решение. Такава висока гладкост е характерна за спектралните задачи, които тук са обект на разглеждане. Става дума за апостериорна техника, която се осъществява със специални *макроелементи* (интерполирани крайни елементи [16, 96]). Окрупнен елемент от такъв тип ни позволява да "изгладим" приближеното решение, както и да получим значително подобряване на точността [148]. Елементите от Фиг. 2.2 са удобни за прилагане на тази възстановяваща техника поради техните интегрални степени на свобода. Ще илюстрираме подхода именно с използването на четириъгълни елементи от сирендипов тип.

Ускоряването на сходимостта се извършва в две стъпки:

(а) Конструиране на интерполационен оператор ("малък интерполант") $i_h : C^o \to V_h$. Той дава оценка от тип суперсходимост на $a_h(i_h u - u, v_h)$ за всяко $v_h \in V_h$, когато функцията u е достатъчно гладка [16, 96]. За нашия случай, ако $u \in H^4(\Omega)$, то

$$a(i_h u - u, v_h) \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega}.$$

Тази първа стъпка на метода може да се резюмира с факта, че интерполантът $i_h u$ на точното решение на дадена елиптична задача и елиптичната проекция (Ритцовото решение) на същото решение са суперблизки, т.е. отново при $u \in H^4(\Omega)$ и ако u е решение на елиптичната задача за $f \in L_2(\Omega)$

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V,$$

то тогава

$$\|i_h u - R_h u\|_{1,\Omega} \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega}.$$

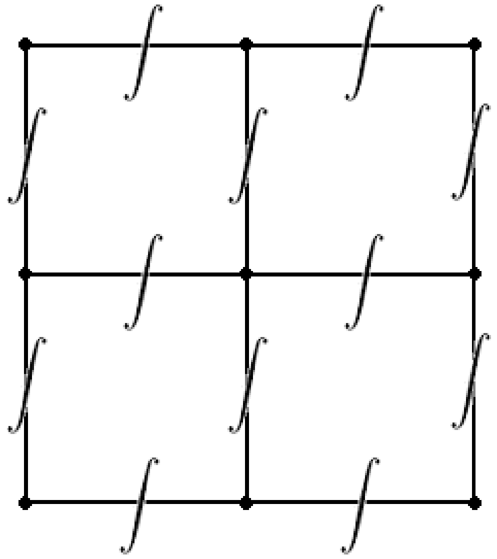
(б) Конструиране на интерполационен оператор ("голям интерполант") I_{2h} върху разделяне, обединяващо елементите от τ_h в групи (макроелементи) (Фиг. 2.3). За конструирането на малък и голям интерполант е изпълнено

$$I_{2h} \circ i_h = I_{2h}.$$

Всъщност, интерполационният оператор I_{2h}, приложен към полученото крайноелементно решение, осъществява суперсходящ апостериорен алгоритъм.

За нашия случай, обединяваме квадратични крайни елементи в четворка (Фиг. 2.3). Тогава, ако $u \in H^5(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, за елиптичния проектор на елиптичната задача от втори ред ще следва

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{1,\Omega} \leq Ch^3 \|u\|_{5,\Omega}. \tag{2.33}$$



Фигура 2.3: Обединение на квадратични крайни елементи с интегрални условия в макроелемент

Нека да подчертаем, че задължително условие при тази апостериорна възстановяваща техника е да се използват елементи с интегрални степени на свобода. Но този мотив е вложен и при задачите за намиране на спектъра на елиптичен оператор с нелокални (или преходни) гранични условия. Ето защо, да се върнем отново на спектралната задача (2.20) и нейното крайноелементно приближение (2.21). За него ще приложим описания апостериорен метод с интерполирани четириъгълни крайни елементи от втора степен.

Най-напред да отбележим, че елиптичният проектор на точната собствена функция и крайноелементното решение на съответното ѝ приближение са суперблизки [6]. Този реултат е по-общ и не зависи от вида на елемента. И така, за нашия случай при $u \in H^3(\Omega) \cap V$ имаме

$$\|u_h - R_h u\|_{1,\Omega} \leq Ch^3 \|u\|_{3,\Omega}. \tag{2.34}$$

За да приложим метода с обединяване на елементи в макроелементи, се нуждаем и от следния резултат за спектралните задачи (виж [6]): За всяка функция $w \in V,\ w \neq 0$ е в сила неравенството:

$$\left| \frac{a(w,w)}{(w,w)} - \lambda \right| \leq C \frac{\|w-u\|^2_{1,\Omega}}{(w,w)}, \tag{2.35}$$

където (λ, u) е точно решение, получено от (2.20).

Ще докажем следната теорема:

Теорема 2.5 *Нека (λ, u) е собствена двойка, получена от (2.20), като $u \in H^5(\Omega) \cap V$ и нека (λ_h, u_h) е нейното крайноелементно приближение от задача (2.21). Ако използваме квадратични крайни елементи и апостериорно приложим възстановяваща процедура, описана по-горе, то е валидна следната оценка от суперсходящ тип:*

$$\|I_{2h}u_h - u\|_{1,\Omega} \le Ch^3\|u\|_{5,\Omega}. \tag{2.36}$$

За собствените стойности резултатът е от тип ултрасходимост (два поръдъка по-висок от оптималния):

$$\left|\frac{a(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)}{(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)} - \lambda\right| \le Ch^6\|u\|_{5,\Omega}.$$

Доказателство. Първо ще докажем неравенство (2.36). Като използваме ограничеността на оператора I_{2h}, както и оценките (2.33) и (2.34), ще получим:

$$\begin{aligned}
\|I_{2h}u_h - u\|_{1,\Omega} &\le \|I_{2h}u_h - I_{2h}\circ R_h u\|_{1,\Omega} + \|I_{2h}\circ R_h u - u\|_{1,\Omega} \\
&\le \|I_{2h}\|\ \|u_h - R_h u\|_{1,\Omega} + \|I_{2h}\circ R_h u - u\|_{1,\Omega} \\
&\le Ch^3\|u\|_{5,\Omega}.
\end{aligned}$$

За да докажем оценката, отнасяща се за собствените стойности, ще използваме (2.35) и току-що доказаното неравенство (2.36):

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)}{(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)} - \lambda\right| &\le C\frac{\|I_{2h}u_h - u\|^2_{1,\Omega}}{\|I_{2h}u_h\|^2_{0,\Omega}} \\
&\le Ch^6\|u\|^2_{5,\Omega}.
\end{aligned}$$

■

2.4 Задачи върху застъпващи се области. Получаване на оптимален ред на сходимост

Разглеждаме спектрални задачи, които са дефинирани върху едно- или двумерни застъпващи се (припокриващи се) области. Всяка собствена функция е определена върху съответната ѝ област, а върху общата част те удовлетворяват нелокални (от интегрален тип) условия.

Определянето на спектъра на елиптичен оператор от втори ред, при което дефиниционните области се застъпват, намира приложение в теорията на топло- и масообмена, както и в полупроводниковата техника [52, 66].

Основната цел в този параграф е да покажем, че подходът от предишните два параграфа е приложим. Нещо повече, МКЕ за този тип задачи обикновено дава субоптимална оценка на сходимост [67]. Ще докажем, че при подходящи крайни елементи се получава оптимален ред на сходимост както за собствените стойности, така и за собствените функции. Освен това, нашият подход не налага изискването за по-висока гладкост на точното решение.

Ще представим метода, като използваме апроксимиращо пространство от по части полиномиални функции от втора степен, но този подход е валиден и когато използваме крайни елементи от трета и по-висока степен. Друго, само илюстративно ограничение е, че разглеждаме случай на две застъпващи се области.

И така, нека Ω_1 и Ω_2 са два припокриващи се интервала (a_1, b_1) и (b_2, a_2), като $a_1 < b_2 < b_1 < a_2$ или двукомпонентна област от два застъпващи се правоъгълника Ω_1 и Ω_2 с граници съответно $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. Тогава $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ (Fig. 2.4).

Ще използваме следните двойки елиптични оператори от втори ред, съответно в едномерния и двумерния случай:

$$L^{(i)} = -\frac{d}{dx}\left(\alpha^{(i)}(x)\frac{d}{dx}\right) + \alpha_0^{(i)}(x),$$

където $\alpha^{(i)}(x) > 0$ и $\alpha_0^{(i)}(x) \geq 0$ са ограничени в $\Omega_i,\ i = 1, 2$, като често за удобство ще пропускаме аргумента x.

За двумерния случай имаме

$$L^{(i)} \equiv -\sum_{k,m=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{km}^{(i)}\frac{\partial}{\partial x_m}\right) + a_0^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

където $a_{km}^{(i)}(x) > 0,\ a_{km}^{(i)} = a_{mk}^{(i)},\ k, m = 1, 2$ и $a_0^{(i)} \geq 0$ са ограничени функции в $\Omega_i,\ i = 1, 2$.

Задачата, която разглеждаме, е следната: да се определи $(\lambda, u_1, u_2) \in \mathbf{R} \times H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$ така, че

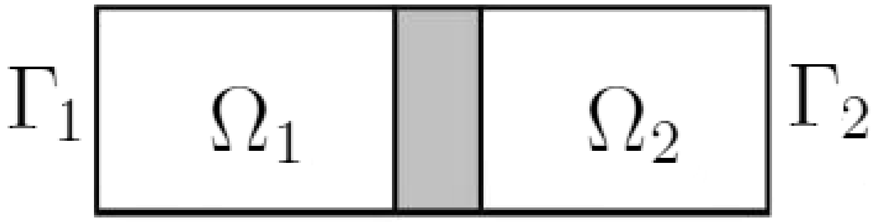
$$L^{(i)}u_i + (-1)^i \chi_{\Omega_1\cap\Omega_2}.K = \lambda u_i \quad \text{в} \ \ \Omega_i,\ i = 1, 2. \tag{2.37}$$

Граничните условия за това уравнение са от типа съответно на Robin/Newmann и на Dirichlet. Така в едномерния случай имаме:

$$\begin{aligned} &\alpha^{(i)}u_i'(b_i) - (-1)^i\sigma^{(i)}u_i(b_i) = 0, \\ &u_i(a_i) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

За двумерния случай тези две условия изглеждат по следния начин:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_i}{\partial \nu_{a^i}} + \sigma^{(i)}u_i = 0 \quad \text{върху} \ \ \Gamma_i', \\ &u_i = 0 \quad \text{върху} \ \ \Gamma_i,\ i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.39}$$



Фигура 2.4: Застъпващи се правоъгълни области

В граничните условия (2.38) и (2.39) $\sigma^{(i)} \geq 0$, а $\chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$ означава характеристичната функция на $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

Също така, $\dfrac{\partial u_i}{\partial \nu_{a^i}}$ е конормалната производна на u_i по отношение на матрицата от коефициенти $a_{km}^{(i)}$, $k, m, i = 1, 2$. Границите Γ_i' са определени от

$$\Gamma_i' = \partial\Omega_i \setminus \Gamma_i.$$

За спектралната задача е поставено и следното нелокално свързващо условие:

$$\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} [u_1(x) - u_2(x)] \, dx = 0. \tag{2.40}$$

Забележка 2.5 *Неизвестното реално число K зависи от двойката функции $u = (u_1, u_2)$.*

Тази зависимост върху застъпващи се интервали лесно се определя:

$$K = \frac{1}{2meas(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \big\{ \big[\alpha^{(i)}(b_1) u_i'(b_1) - \alpha^{(i)}(b_2) u_i'(b_2)\big]$$

$$- \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \alpha_0^{(i)}(x) u_i(x) \, dx \big\},$$

като в този случай $\Omega_1 \cap \Omega_2 = (b_1, b_2)$.

За да получим експлицитния израз за K в двумерния случай, трябва да интегрираме (2.37) и да използваме формулата на Green:

$$K = \frac{1}{2meas(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \left\{ \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} (a_0^{(1)} u_1 - a_0^{(2)} u_2) \, dx \right.$$

$$\left. - \int_{\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu_{a^1}} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu_{a^2}} \right) ds \right\}.$$

Да въведем функционалните пространства

$$V_i = \left\{ v_i \in H^1(\Omega_i) : \ v_i = 0 \text{ върху } \Gamma_i \right\}, \ i = 1, 2,$$

като, очевидно за едномерния случай $v_i = 0$ върху Γ_i означава, че $v_i(a_i) = 0, i = 1, 2$.

Тогава, нека да означим

$$\widetilde{V} = V_1 \times V_2.$$

Пространството, отчитащо нелокалното (интегрално) гранично условие (2.40), се определя посредством:

$$V = \left\{ v \in \widetilde{V} : \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} [v_1(x) - v_2(x)] \, dx = 0 \right\}.$$

Очевидно V е затворено подпространство на $\widetilde{V}$. Това ни позволява да представим разглежданата задача в слаба (вариационна) формулировка: Търсим $(\lambda, u) \in \mathbf{R} \times V$ така, че за всяко $v \in V$

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \tag{2.41}$$

където за едномерния случай

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{2} \left[\int_{\Omega_i} \left(\alpha^{(i)}(x) u_i'(x) v_i'(x) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \alpha_0^{(i)}(x) u_i(x) v_i(x) \right) \, dx + \sigma^{(i)} u_i(b_i) v_i(b_i) \right],$$

докато в равнината $a-$формата има вида

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{2} \left[\int_{\Omega_i} \left(\sum_{k,m=1}^{2} a_{km}^{(i)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} . \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + a_0^{(i)} u_i v_i \right) \, dx + \int_{\Gamma_i'} \sigma^{(i)} u_i v_i \, ds \right].$$

И за двата случая L_2-скаларното произведение е:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} u_i(x) v_i(x) \, dx.$$

Като се използват свойствата на функциите-коефициенти, лесно се установява, че:

- $a(\cdot,\cdot)$ е ограничена, симетрична и строго коерцитивна билинейна форма във $V \times V$;
- V е едно затворено подпространство на $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$.

Тези два факта ни позволяват да отнесем (2.41) към теорията на абстрактните елиптични спектрални задачи в Хилбертово пространство (виж напр. [119]). Този резултат е прецизиран от De Shepper ([67], Теорема 6) в следното твърдение: *Задачата (2.37), (2.38) (или (2.39)) с нелокалното условие (2.40) и вариационната задача (2.41) са формално еквивалентни. Двете задачи притежават изброимо множество от безброй много собствени стойности λ_l, всички те са строго положителни и с крайна кратност. Съответните собствени функции u_l могат да образуват Хилбертов базис във V, ортонормиран по отношение на скаларното произведение $(\cdot,\cdot)$.*

Сега ще приближим задачата (2.41) чрез МКЕ, който използва интегрални степени на свобода. Ето защо крайноелементните разделяния $\tau_{h_i}^{(i)}$ на $\Omega_i,\ i=1,2$ играят ключова роля в нашите изследвания. Най-напред да споменем, че тези разделяния удовлетворяват стандартните предположения за регулярност [56]. Мрежовите параметри h_i на $\tau_{h_i}^{(i)}$ определят $h = \max_{i=1,2} h_i$. Така например, в едномерния случай възлите на интервалите $\Omega_i,\ i=1,2$ са избрани по такъв начин, че

$$a_1 = s_0^{(1)} < s_1^{(1)} < \ldots < s_{k_1}^{(1)} = b_1,$$
$$a_2 = s_0^{(2)} > s_1^{(2)} > \ldots > s_{k_2}^{(2)} = b_2.$$

Тогава $h_j^{(i)} = |s_j^{(i)} - s_{j-1}^{(i)}|,\quad h_i = \max_j h_j^{(i)},\ j=1,\ldots,k_i,\ i=1,2.$
Така разделянето $\tau_{h_i}^{(i)}$ се състои от интервали $K_j^{(i)}$ с крайни точки $s_{j-1}^{(i)}$ и $s_j^{(i)}$, като

$$\tau_{h_i}^{(i)} = \bigcup_{j=1}^{k_i} K_j^{(i)}.$$

Важно е да отбележим, че точките b_1 и b_2 са възли в двете разделяния $\tau_{h_1}^{(1)}$ и $\tau_{h_2}^{(2)}$, т.е. $K_j^{(i)} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ или $K_j^{(i)} \in \Omega_i \setminus \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Крайноелементното (конформно) пространство, свързано с $\tau_{h_i}^{(i)}$, е:

$$X_{h_i}^i = \left\{ v_i \in C(\overline{\Omega}_i) :\ v_{i|_{K^i}} \in \mathcal{P}_2(K^{(i)})\ \forall K^{(i)} \in \tau_{h_i}^{(i)} \right\},\quad i=1,2.$$

Аналогични са разглежданията в двумерния случай, когато $\tau_{h_i}^{(i)}$ се състои от правоъгълни крайни елементи $K_j^{(i)},\ j=1,\ldots,k_i,\ i=1,2$:

$$X_{h_i}^i = \left\{ v_i \in C(\overline{\Omega}_i) :\ v_{i|_{K^i}} \in \mathcal{Q}_2(K^{(i)})\ \forall K^{(i)} \in \tau_{h_i}^{(i)} \right\},\quad i=1,2.$$

На база на функционалните пространства $X_{h_i}^i,\ i=1,2$ дефинираме $X_h = X_{h_1}^1 \times X_{h_2}^2$, а също и

$$X_{h,0} = \{v = (v_1, v_2) \in X_h : \ v(a_i) = 0\}\,, \ i = 1, 2;$$

съответно

$$X_{h,0} = \left\{v = (v_1, v_2) \in X_h : \ v_{i|_{\Gamma_i}} = 0\right\}, \ i = 1, 2,$$

Следователно, крайноелементното пространство, в което е изпълнено нелокалното свързващо условие (2.40) върху общата част, се задава с:

$$V_h = \left\{v = (v_1, v_2) \in X_{h,0} : \ \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} [v_1(x) - v_2(x)]\, dx = 0\right\}.$$

Очевидно, $V_h \subset V$.

За да получим оптимален ред на сходимост, ще променим по подходящ начин степените на свобода в крайните елементи и върху тази основа ще дефинираме съответния интерполационен оператор.

Забележка 2.6 *Въпреки, че нашите резултати са получени при елементи, за които полиномите са от втора степен, то резултатът може да се обобщи и за полиноми от степен, по-висока от втора. Случаят за линейни крайни елементи* $(n = 1)$ *е неприложим за получаване на оптимален ред на сходимост.*

За едномерния елемент $K_j^{(i)}$ степените на свобода са такива, че полиномът $p(x) \in \mathcal{P}_2(K_j^{(i)})$ е еднозначно определен от стойностите в крайните точки на интервала $K_j^{(i)}$ и от интегралната стойност $\int_{K_j^{(i)}} p(x)\, dx, \ j = 1, \ldots, k_i, \ i = 1, 2$.

За правоъгълния краен елемент $K^{(i)}$ нека да означим върховете и страните му съответно с $M_k^{(i)}$ и $l_k^{(i)}$, $k = 1, \ldots, 4, \ i = 1, 2$. Степените му на свобода са такива, че всеки полином $p(x) \in \mathcal{Q}_2(K^{(i)})$ се определя еднозначно от стойностите му в четирите върха $p(M_k), \ k = 1, \ldots, 4$, стойността на интеграла $\int\int_{K^{(i)}} p(x)\, dx$, както и една измежду следните две възможности: (а) стойностите на интегралите $\int_{l_k^{(i)}} p(s)\, ds, \ k = 1, \ldots, 4$ (Фиг. 2.5(а)); (б) стойностите на полинома в средите на страните (Фиг. 2.5(б)).

Да дефинираме интерполационния оператор

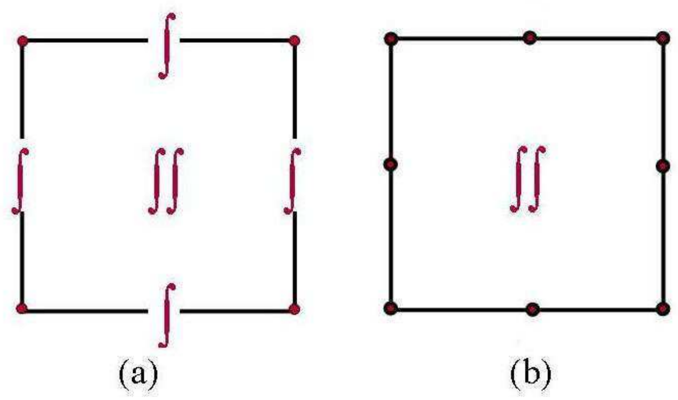
$$\pi_h : \ C(\Omega_1) \times C(\Omega_2) \to X_{h,0},$$

където

$$\pi_h = (\pi_{h_1}, \pi_{h_2}).$$

Класическият Лагранжев оператор за $\mathcal{P}_2(K_j^{(i)})$ (или $\mathcal{Q}_2(K_j^{(i)})$) означаваме с $\Pi_h = (\Pi_{h_1}, \Pi_{h_2}), \ \Pi_{h_i} \in X_{h,0}, \ j = 1, 2, \ldots, k_i, \ i = 1, 2$.

Според избраните степени на свобода за всяко $v \in V, \ \pi_h v \in V_h$, докато, очевидно, $\Pi_h v \notin V_h$.



Фигура 2.5: (а) елемент с интегрални условия върху страните; (б) елемент с условия – стойности в средите на страните

Основен момент в нашите разглеждания е да оценим разликата между двата интерполанта $\Pi_h v$ и $\pi_h v$ за $v \in V \cap H^3(\Omega)$. Това ще направим въз основа на резултата от следната теорема:

Теорема 2.6 *Нека функцията $v = (v_1, v_2)$ принадлежи на $V \cap H^3(\Omega)$, $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$. Тогава съществува константа $C = C(\Omega) > 0$ такава, че*

$$\|v - \pi_h v\|_{m,\Omega} \le C h^{3-m} \|v\|_{3,\Omega}, \quad m = 0, 1. \tag{2.42}$$

Доказателство. Най-напред ще оценим разликата между двата интерполанта $\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i$ върху всеки краен елемент $K_j^{(i)}$, $j = 1, \cdots, k_i$, $i = 1, 2$.

За целта, ще извършим линейна трансформация $t = x - s_{j-1}^{(i)}$, $x \in K_j^{(i)}$. Тогава $t \in [0, h_j^{(i)}]$.

Така в едномерния случай базисните функции на Лагранжевия интерполант, които са валидни за този краен елемент са:

$$\psi_1(t) = \frac{2t^2}{h_j^{(i)2}} - \frac{3t}{h_j^{(i)}} + 1;$$

$$\psi_2(t) = -\frac{4t^2}{h_j^{(i)2}} + \frac{4t}{h_j^{(i)}};$$

$$\psi_3(t) = \frac{2t^2}{h_j^{(i)2}} - \frac{t}{h_j^{(i)}}.$$

Аналогично, за избраните степени на свобода от интегрален тип базисните функции на π_{h_i} са:

$$\varphi_1(t) = \frac{3t^2}{h_j^{(i)2}} - \frac{4t}{h_j^{(i)}} t + 1;$$

$$\varphi_2(t) = -\frac{6t^2}{{h_j^{(i)}}^3} + \frac{6t}{{h_j^{(i)}}^2};$$

$$\varphi_3(t) = \frac{3t^2}{{h_j^{(i)}}^2} - \frac{2t}{h_j^{(i)}}.$$

В случая на правоъгълни крайни елементи се налага да трансформираме всеки краен елемент в основния единичен квадрат $T = \{0 \leq t_i \leq 1,\ i = 1,2\}$. Ако $(a_{j,1}^{(i)}, a_{j,2}^{(i)})$ е долният ляв ъгъл на елемента $K_j^{(i)},\ j = 1,\ldots,k_i,\ i = 1,2$, то линейната трансформация е:

$$\left| \begin{array}{lcl} t_1 & = & \dfrac{x_1 - a_{j,1}^{(i)}}{h_1^{(i)}}, \\ \\ t_2 & = & \dfrac{x_2 - a_{j,2}^{(i)}}{h_2^{(i)}}. \end{array} \right.$$

Базисните функции за Лагранжевия интерполант Π_h са от вида $\{\psi_i(t_1)\psi_j(t_2)\}_{i,j=1}^3$, където:

$$\psi_1(t) = 2t^2 - 3t + 1;$$

$$\psi_2(t) = -4t^2 + 4t;$$

$$\psi_3(t) = 2t^2 - t, \quad t \in [0,1].$$

Същевременно, базисните функции на интерполанта с интегрални степени на свобода π_h са също от вида $\{\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)\}_{i,j=1}^3$, където:

$$\varphi_1(t) = 3t^2 - 4t + 1;$$

$$\varphi_2(t) = -6t^2 + 6t;$$

$$\varphi_3(t) = 3t^2 - 2t, \quad t \in [0,1].$$

Първо ще пресметнем разликата на двата интерполанта върху произволен интервал от крайноелементното разделяне в едномерния случай. Получаваме:

$$(\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i)_{|_{K_j^{(i)}}}$$

$$= \left[\psi_1(t) v_i(s_{j-1}^{(i)}) + \psi_2(t) v_i(\frac{s_{j-1}^{(i)} + s_j^{(i)}}{2}) + \psi_3(t) v_i(s_j^{(i)}) \right]$$

$$-\left[\varphi_1(t)v_i(s_{j-1}^{(i)})+\varphi_2(t)\int_{K_j^{(i)}} v_i(x)\,dx+\varphi_3(t)v_i(s_j^{(i)})\right]$$

$$=\left(-\frac{t^2}{{h_j^{(i)}}^2}+\frac{t}{h_j^{(i)}}\right)\left[v_i(s_{j-1}^{(i)})+4v_i(\frac{s_{j-1}^{(i)}+s_j^{(i)}}{2})+v_i(s_j^{(i)})-\frac{6}{h_j^{(i)}}\int_{K_j^{(i)}} v_i(x)\,dx\right]$$

$$=6\left(-\frac{t^2}{{h_j^{(i)}}^2}+\frac{t}{h_j^{(i)}}\right)\left[\left(\frac{1}{6}v_i(s_{j-1}^{(i)})+\frac{4}{6}v_i(\frac{s_{j-1}^{(i)}+s_j^{(i)}}{2})\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{6}v_i(s_j^{(i)})\right)-\frac{1}{h_j^{(i)}}\int_{K_j^{(i)}} v_i(x)\,dx\right],$$

$$j=1,\dots,k_i,\quad i=1,2.$$

Изразът в средните скоби представлява функционал на грешката при използване на квадратурна формула, т.е.

$$E_{K_j^{(i)}}(v_i)=\left(\frac{1}{6}v_i(s_{j-1}^{(i)})+\frac{4}{6}v_i(\frac{s_{j-1}^{(i)}+s_j^{(i)}}{2})+\frac{1}{6}v_i(s_j^{(i)})\right)-\frac{1}{h_j^{(i)}}\int_{K_j^{(i)}} v_i(x)\,dx.$$

Лесно се проверява, че $E_{K_j^{(i)}}(v_i)=0$, когато $v_i\in\mathcal{P}_2(K_j^{(i)})$. Впрочем, тази квадратурна формула (на Simpson) е по-точна, т.е. $E_{K_j^{(i)}}(v_i)=0$ при $v_i\in\mathcal{P}_3(K_j^{(i)})$, но този факт не ни ползва, както ще стане ясно по-късно, а и тогава би трябвало да се изиска по-голяма гладкост на точното решение.

Като приложим лемата на Bramble-Hilbert [46], ще получим оценката

$$|E_{K_j^{(i)}}(v_i)|\le C{h_j^{(i)}}^3|v|_{3,K_j^{(i)}}. \tag{2.43}$$

От друга страна,

$$\left|6\left(-\frac{t^2}{{h_j^{(i)}}^2}+\frac{t}{h_j^{(i)}}\right)\right|\le\frac{3}{2},\quad t\in[0,h_j^{(i)}].$$

От това неравенство и (2.43) следва, че

$$|\Pi_{h_i}v_i-\pi_{h_i}v_i|_{K_j^{(i)}}\le C{h_j^{(i)}}^3|v_i|_{3,K_j^{(i)}},\ j=1,\dots,k_i,\ i=1,2.$$

Тогава за оценката в L_2-норма имаме

$$\begin{aligned} \|\Pi_h v - \pi_h v\|_{0,\Omega} &= \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{K_j^{(i)} \in \tau_{h_i}^{(i)}} \int_{K_j^{(i)}} |\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq Ch^3 \|v\|_{3,\Omega}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

За производната на същата разлика пресмятаме, че

$$(\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i)'_{|_{K_j^{(i)}}} = \left(-\frac{2t}{{h_j^{(i)}}^2} + \frac{1}{h_j^{(i)}} \right) \left[v_i(s_{j-1}^{(i)}) + 4 v_i \left(\frac{s_{j-1}^{(i)} + s_j^{(i)}}{2} \right) + v_i(s_j^{(i)}) \right.$$

$$\left. - \frac{6}{h_j^{(i)}} \int_{K_j^{(i)}} v_i(x) \, dx \right] = 6 \left(-\frac{2t}{{h_j^{(i)}}^2} + \frac{1}{h_j^{(i)}} \right) E_{K_j^{(i)}}(v_i).$$

От неравенството

$$\left| 6 \left(-\frac{2t}{{h_j^{(i)}}^2} + \frac{1}{h_j^{(i)}} \right) \right| \leq 6 {h_j^{(i)}}^{-1}, \quad t \in [0, h_j^{(i)}]$$

и от (2.43) ще получим

$$|\,(\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i)'\,|_{K_j^{(i)}} \leq C {h_j^{(i)}}^2 |v_i|_{3,K_j^{(i)}}.$$

Така за H^1-нормата в едномерния случай получаваме

$$\|\Pi_h v - \pi_h v\|_{1,\Omega} \leq Ch^2 \|v\|_{3,\Omega}.$$

Тази оценка заедно с (2.44) дават

$$\|\Pi_h v - \pi_h v\|_{m,\Omega} \leq Ch^{3-m} \|v\|_{3,\Omega}, \quad m = 0, 1. \tag{2.45}$$

Ще извършим аналогични разсъждения в двумерния случай. Нека a_i, $i = 1, \ldots, 9$ са класическите възли в биквадратичния елемент, определен за единичния квадрат T.

Тогава $(i = 1, 2)$

$$(\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i)_{|_T} = v_i(a_1) \left[\psi_1(t_1) \psi_1(t_2) - \varphi_1(t_1) \varphi_1(t_2) \right]$$

$$+v_i(a_2)\left[\psi_3(t_1)\psi_1(t_2)-\varphi_3(t_1)\varphi_1(t_2)\right]+v_i(a_3)\left[\psi_3(t_1)\psi_3(t_2)-\varphi_3(t_1)\varphi_3(t_2)\right]$$

$$+v_i(a_4)\left[\psi_1(t_1)\psi_3(t_2)-\varphi_1(t_1)\varphi_3(t_2)\right]+v_i(a_5)\psi_2(t_1)\psi_1(t_2)+v_i(a_6)\psi_3(t_1)\psi_2(t_2)$$

$$+v_i(a_7)\psi_2(t_1)\psi_3(t_2)+v_i(a_8)\psi_1(t_1)\psi_2(t_2)+v_i(a_9)\psi_2(t_1)\psi_2(t_2)$$

$$-\int_{l_1} v_i(s)\,ds\ \varphi_2(t_1)\varphi_1(t_2)-\int_{l_2} v_i(s)\,ds\ \varphi_3(t_1)\varphi_2(t_2)-\int_{l_3} v_i(s)\,ds\ \varphi_2(t_1)\varphi_3(t_2)$$

$$-\int_{l_4} v_i(s)\,ds\ \varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2)-\int_T v_i(t)\,dt\ \varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2)$$

$$=\varphi_2(t_1)\varphi_1(t_2)\left[\frac{1}{6}v_i(a_1)+\frac{4}{6}v_i(a_5)+\frac{1}{6}v_i(a_2)-\int_{l_1} v_i(s)\,ds\right]$$

$$+\varphi_3(t_1)\varphi_2(t_2)\left[\frac{1}{6}v_i(a_2)+\frac{4}{6}v_i(a_6)+\frac{1}{6}v_i(a_3)-\int_{l_2} v_i(s)\,ds\right]$$

$$+\varphi_2(t_1)\varphi_3(t_2)\left[\frac{1}{6}v_i(a_4)+\frac{4}{6}v_i(a_7)+\frac{1}{6}v_i(a_3)-\int_{l_3} v_i(s)\,ds\right]$$

$$+\varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2)\left[\frac{1}{6}v_i(a_1)+\frac{4}{6}v_i(a_8)+\frac{1}{6}v_i(a_4)-\int_{l_4} v_i(s)\,ds\right]$$

$$+\varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2)\left[\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{4} v_i(a_k)+\frac{4}{36}\sum_{k=5}^{8} v_i(a_k)+\frac{16}{36}v_i(a_9)-\int_T v_i(t)\,dt\right].$$

Изразите в скоби могат да се представят чрез функционал на грешката от съответните квадратурни формули:

$$(\Pi_{h_i}v_i-\pi_{h_i}v_i)_{|T}=\varphi_2(t_1)\varphi_1(t_2)E_T^{(1)}(v_i)+\varphi_3(t_1)\varphi_2(t_2)E_T^{(2)}(v_i)$$

$$+\varphi_2(t_1)\varphi_3(t_2)E_T^{(3)}(v_i)+\varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2)E_T^{(4)}(v_i)+\varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2)E_T(v_i),$$

където едномерните функционали на грешката $E_T^{(k)}(v_i),\ k=1,\ldots,4$ и двумерния $E_T(v_i)$ имат един и същи ред на точност.

Впрочем, $E_T^{(k)}(v_i)=E_T(v_i)=0,\ k=1,\ldots,4$ за всяко $v_i\in\mathcal{Q}_2(T)$.

За квадратурната формула на Simpson е валидно същото твърдение, както преди малко отчетохме, т.е. $E_T(v_i)=0$ за $v_i\in\mathcal{Q}_3(T)$. За случая, при който използваме интеграл само върху елемента (Фиг. 2.5(б)) няма да фигурират функционалите, отчитащи грешката от квадратурата върху четирите страни.

Да отбележим още, че базисните функции $\varphi_i,\ i=1,2,3$ са ограничени в интервала $[0,1]$.

Ще приложим лемата на Bramble-Hilbert [46] след линейна трансформация от T към произволен елемент $K_j^{(i)} \in \tau_{h_i}^{(i)}$.

Получаваме
$$|\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i|_{|_{K_j^{(i)}}}|| \leq C h_i^3 |v_i|_{3,K_j^{(i)}}.$$

Чрез повдигане в квадрат и сумиране по всички $K_j^{(i)} \in \tau_{h_i}^{(i)}$ ще получим оценка в L_2-норма:

$$\|\Pi_h v - \pi_h v\|_{0,\Omega} \leq C h^3 \|v\|_{3,\Omega}.$$

Както в едномерния случай, чрез пресмятане на частните производни от първи ред стигаме до:

$$|\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Pi_{h_i} v_i - \pi_{h_i} v_i\right)|_{|_{K_j^{(i)}}} \leq C h_i^2 |v_i|_{3,\Omega}, \quad i, k = 1, 2$$

и това ни позволява да получим оценка в H^1-норма

$$\|\Pi_h v - \pi_h v\|_{1,\Omega} \leq C h^2 \|v\|_{3,\Omega}.$$

Ето защо и в двумерния случай е в сила (2.45).

Най-накрая, от класическата интерполационна теория [56], от (2.45) и прилагайки

$$\|v - \pi_h v\|_{m,\Omega} \leq \|v - \Pi_h v\|_{m,\Omega} + \|\Pi_h v - \pi_h v\|_{m,\Omega}, \ m = 0, 1,$$
завършваме доказателството на теоремата.

∎

Като пряко следствие от доказаната теорема получаваме:

Твърдение 2.1 *Крайноелементното пространство $V_h \subset V$ удовлетворява следното апроксимационно свойство:*

$$\inf_{v_h \in V_h} \{\|v - v_h\|_{0,\Omega} + h|v - v_h|_{1,\Omega}\} \leq C h^3 \|v\|_{3,\Omega},$$
$$\|v - R_h v\|_{1,\Omega} \leq C h^2 \|v\|_{3,\Omega}, \quad \forall v \in V \cap H^3(\Omega), \tag{2.46}$$
където $R_h : \ V \to V_h$ е елиптичният проектор, дефиниран чрез

$$a(u - R_h u, v_h) = 0, \quad \forall u \in V, \ v_h \in V_h.$$

Нека да формулираме крайноелементното приближение на нашата основна задача (2.41): да се определи $(\lambda_h, u_h) \in \mathbf{R} \times V_h$ така, че

$$a(u_h, v_h) = \lambda_h (u_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.47}$$

Оценките (2.46) ни позволяват да използваме класическата теория за анализ на грешката [119] към едномерната и двумерната спектрална задача върху припокриващи се области. Именно, като използваме квадратични крайни елементи с интегрални степени на свобода при решаване на задача (2.47), ще получим оптимален ред на сходимост. Ако (λ, u) е точно решение на (2.41), $u \in V \cap H^3(\Omega)$ и (λ_h, u_h) е съответната приближена собствена двойка, определена от (2.47), то

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{3,\Omega},$$

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^4 \|u\|^2_{3,\Omega},$$

където $C = C(\Omega) > 0$ е константа, независима от мрежовите параметри.

2.5 Спектрална контактна задача

Задачата за пренос на маса и енергия през две допиращи се тела, по-известна като контактна задача, има важни приложения, особено в инженерната практика. Съществуват методи за отслабване или неотчитане на някои фактори, които слабо влияят на моделните задачи при осъществяване на контакт между две тела. Тези подходи са характерни в трибологията и триботехниката [76]. Спектралните контактни задачи са характерни при топлообмен [60, 127].

В този параграф ще изучим крайноелементната апроксимация на векторна контактна задача между две едномерни тела. Тя налага едно нелокално (от интегрален тип) условие в контактната точка.

И така, двете разглеждани области са интервалите $\Omega_1 = (-1, 1)$ и $\Omega_2 = (0, 1)$, а $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Въвеждаме малкия параметър $\varepsilon \in (0, 1)$, който по-нататък ще фиксираме така, че интервалът $\Omega_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ да е подинтервал на Ω_1 (виж Фиг. 2.6).

Ще дефинираме векторното пространство

$$L_2(\Omega) = L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2),$$

със скаларно произведение

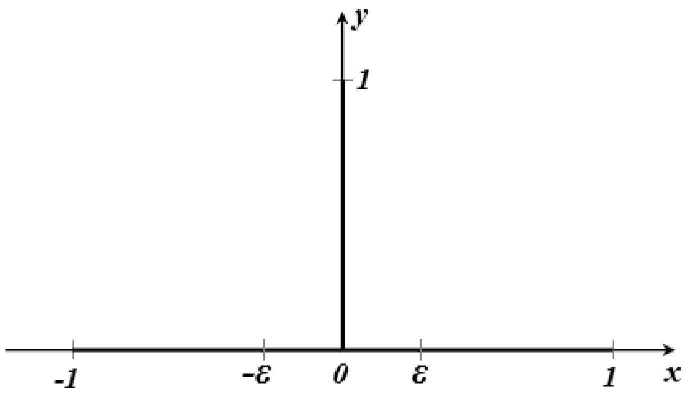
$$(u, v) = (u_1, v_1)_{L_2(\Omega_1)} + (u_2, v_2)_{L_2(\Omega_2)}$$

за векторно-значните функции $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, v_2)$.

Аналогично се дефинират и Соболевите пространства

$$H^m(\Omega) = H^m(\Omega_1) \times H^m(\Omega_2)$$

за цяло положително m.



Фигура 2.6: Областите на контактния проблем $\Omega_1 = (-1,1)$, $\Omega_2 = (0,1)$ и $\Omega_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$

Сега ще формулираме спектралната контактна задача от втори ред: Търсим $(\lambda, u_1, u_2) \in \mathbf{R} \times H^3(\Omega)$ така, че

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(p_1 \frac{du_1}{dx}\right) + q_1 u_1 &= \lambda u_1 + \frac{1}{2\varepsilon} p_2(0) u_2'(0) \chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}, \quad && x \in \Omega_1, \\ -\frac{d}{dy}\left(p_2 \frac{du_2}{dy}\right) + q_2 u_2 &= \lambda u_2, && y \in \Omega_2, \end{aligned} \tag{2.48}$$

с класически условия на Dirichlet

$$u_1(-1) = u_1(1) = 0, \; u_2(1) = 0, \tag{2.49}$$

както и с нелокалното свързващо условие

$$u_2(0) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_1(x)\, dx. \tag{2.50}$$

Функциите p_i, q_i са ограничени почти навсякъде в Ω_i и съществуват константи $\overline{p}_i > 0$ такива, че $p_i \geq \overline{p}_i$, а също така $q_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

Нека сега да определим вариационната задача, която съответства на (2.48)-(2.50). За целта, при фиксирано $\varepsilon \in (0,1)$ пространството от пробни функции е:

$$V = \left\{ v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 : \; v_2(0) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v_1(x)\, dx \right\},$$

където

$$V_1 = H_0^1(\Omega_1), \quad V_2 = \left\{ v_2 \in H^1(\Omega_2) : \; v_2(1) = 0 \right\}.$$

Тогава може да въведем следната вариационна задача: Търсим $(\lambda, u_1, u_2) \in \mathbf{R} \times V,\ u \neq 0$ така, че

$$a(u,v) = \lambda(u,v), \quad \forall v \in V, \tag{2.51}$$

където

$$a(u,v) = \int_{-1}^{1} (p_1 u_1' v_1' + q_1 u_1 v_1)\, dx + \int_0^1 (p_2 u_2' v_2' + q_2 u_2 v_2)\, dy.$$

Задачата (2.48)-(2.50) е изследвана от De Shepper и Van Keer в [71]. Те я свеждат до изучаване на абстрактната задача за собствени стойности в Хилбертови пространства и доказват, че (2.51) и (2.48)-(2.50) са формално еквивалентни.

Очевидно, дефинираната по-горе a-форма е ограничена, симетрична и строго коерцитивна във $V \times V$, когато V е гъсто в $L_2(\Omega)$ [71].

Съществуването на решение на (2.51) е доказано в [71] (виж Теорема 1.1). Собствените стойности са строго положителни и могат да бъдат наредени

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to +\infty.$$

Собствените функции могат да бъдат ортонормирани в $L_2(\Omega)$. Тези функции формират Хилбертов базис за пространството V.

За апроксимиране на разглежданата спектрална задача ще си послужим с крайни елементи от по части полиномиални функции от втора степен (виж Забележка 2.6).

Нека регулярното разделяне на $\overline{\Omega}_1$ да е извършено посредством множеството от точки $\{x_i\}_{i=0}^{2n_1+2n_2}$, където

$$-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n_1+2n_2} = 1,$$

$$x_{n_1} = -\varepsilon \quad \text{и} \quad x_{n_1+2n_2} = \varepsilon.$$

Въвеждаме функционалните пространства

$$X_{1,h_1} = \left\{ v_1 \in C(\overline{\Omega}_1) : \ v_1|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathcal{P}_2([x_{i-1},x_i]),\ i = 1,2,\ldots,2n_1+2n_2 \right\},$$

$$V_{1,h_1} = \left\{ v_1 \in X_{1,h_1} : \ v_1(-1) = v_1(1) = 0 \right\},$$

където h_1 е мрежовият параметър на разделянето.

Аналогично, нека $\{y_i\}_{i=0}^{m}$ е множество от точки от $\overline{\Omega}_2$, като $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = 1$.

Тогава

$$X_{2,h_2} = \left\{ v_2 \in C(\overline{\Omega}_2) : \ v_2|_{[y_{i-1},y_i]} \in \mathcal{P}_2([y_{i-1},y_i]),\ i = 1,2,\ldots,m \right\},$$

$$V_{2,h_2} = \left\{ v_2 \in X_{2,h_2} : \ v_2(1) = 0 \right\},$$

с мрежов параметър h_2.

Двете разделяния на подинтервали по x и по y ще предполагаме, че са регулярни и още, че съществуват числа $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$ такива, че $\alpha_1 \leq h_1/h_2 \leq \alpha_2$. Най-сетне, нека $h = \max\{h_1, h_2\}$. Тогава крайноелементното функционално пространство може да дефинираме по следния начин:

$$V_h = \left\{ v_h = [v_{1h}, v_{2h}] \in V_{1,h_1} \times V_{2,h_2} : \; v_{2h}(0) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v_{1h}(x)\, dx \right\}.$$

Крайноелементната апроксимация на (2.51) е: Търсим $(\lambda, u_{1h}, u_{2h}) \in \mathbf{R} \times V_h, \; u_h \neq 0$ такива, че

$$a(u_h, v_h) = \lambda_h (u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.52}$$

Ако размерността на V_h е $N = N(h)$, то задачата (2.52) притежава N положителни собствени стойности (виж [71, 119])

$$0 < \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq \ldots \leq \lambda_{N,h}.$$

В [71] се използват линейни крайни елементи и там анализът на грешката се основава на модифициран Лагранжев интерполант, наричан *несъвършен* (imperfect) интерполант. Този похват е предизвикан от интерфейсното условие (2.50) между Ω_1 и Ω_2, което не позволява използването на стандартната интерполационна теория за оценка на грешката. Модификацията на интерполиращата функция предизвиква и усложнена компютърна реализация.

Тук предлагаме по-естествен подход, а именно чрез интегрален тип квадратични крайни елементи успяваме да избегнем прилагането на модифициран интерполант.

Забележка 2.7 *Освен основната цел, която посочихме по-горе, този тип крайни елементи могат да бъдат групирани в макроелементи с цел ускоряване на сходимостта [16, 96]. Тази апостериорна процедура може да бъде реализирана едновременно с получаване на крайноелементното решение.*

Нека с π_h да означим квадратичния интерполант, който отговаря на едномерните крайни елементи с интегрална степен на свобода. Тогава за произволно $v \in V$: $\pi_h \equiv (\pi_{1h_1} v_1, \pi_{2h_2} v_2) \in V_{1h_1} \times V_{2h_2}$ е определен посредством

$$\pi_{1h_1} v_1(x_i) = v_1(x_i), \; i = 0, 1, \ldots, 2n_1 + 2n_2;$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \pi_{1h_1} v_1(x)\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_1(x)\, dx, \; i = 1, \ldots, 2n_1 + 2n_2;$$

$$\pi_{2h_2} v_2(y_i) = v_2(y_i), \; i = 0, 1, \ldots, m;$$

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} \pi_{2h_2} v_2(y)\, dy = \int_{y_{i-1}}^{y_i} v_2(y)\, dy, \; i = 1, \ldots, m.$$

По този начин интерполантът π_h удовлетворява условието $\pi_h v \in V_h$.

От друга страна, 3-точковият Лагранжев интерполант върху разглежданите разделяния на областите е определен по следния начин:

$$\Pi_h \equiv (\Pi_{1h_1} v_1, \Pi_{2h_2} v_2) \in V_{1h_1} \times V_{2h_2},$$

като

$$\Pi_{1h_1} v_1(x_i) = v_1(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, 2n_1 + 2n_2;$$

$$\Pi_{1h_1} v_1 \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) = v_1 \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right),\ i = 1, \ldots, 2n_1 + 2n_2;$$

$$\Pi_{2h_2} v_2(y_i) = v_2(y_i),\ i = 0, 1, \ldots, m;$$

$$\Pi_{2h_2} v_2 \left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2} \right) = v_2 \left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2} \right),\ i = 1, \ldots, m.$$

Поради нелокалното интерфейсно условие, включено в дефиницията на функционалното пространство V_h, очевидно $\Pi_h v \notin V_h$.

Теорема 2.7 *Нека (λ, u) е едно точно решение на (2.51) и $u = (u_1, u_2) \in V \cap H^3(\Omega)$. Ако (λ_h, u_h) е съответната приближена собствена двойка, получена от (2.52), то съществува константа $C = C(\Omega) > 0$, независеща от h и такава, че*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega} &\leq Ch^2 \|u\|_{3,\Omega}, \\ |\lambda - \lambda_h| &\leq Ch^4 \|u\|^2_{3,\Omega}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Доказателство. Най-напред ще оценим разликата между двата интерполанта Π_h и π_h. Нека $v \in V \cap H^3(\Omega)$.

Да означим с T основния елемент, който в случая съвпада с интервала $[0, 1]$.

Базисните функции на Лагранжевия интерполант Π_h относно аргумента $t \in T$ са:

$$\psi_1(t) = 2t^2 - 3t + 1;\quad \psi_2(t) = -4t^2 + 4t;\quad \psi_3(t) = 2t^2 - t.$$

За интерполанта от интегрален тип π_h при $t \in T$ за базисните функции можем да запишем:

$$\varphi_1(t) = 3t^2 - 4t + 1;\quad \varphi_2(t) = -6t^2 + 6t;\quad \varphi_3(t) = 3t^2 - 2t.$$

Произволен елемент $K_i^{(1)} = [x_{i-1}, x_i]$ от Ω_1 може да бъде трансформиран в T посредством линейна функция $L_i^{(1)}(x)$.

Очевидно $|L_i^{(1)}(x)| = \mathcal{O}(\frac{1}{h}),\ i = 1, 2, \ldots, 2n_1 + 2n_2$. За елементите от Ω_2 $K_i^{(2)} = [y_{i-1}, y_i]$ прилагаме аналогични разглеждания $i = 1, 2, \ldots, m$.

Тогава лесно пресмятаме

$$
\begin{aligned}
(\Pi_{1h_1}v_1 - \pi_{1h_1}v_1)_{|T} &= v_1(0)\,(\psi_1(t) - \varphi_1(t)) \\
&+ \left(v_1(\frac{1}{2})\psi_2(t) - \varphi_2(t)\int_0^1 v_1(t)\,dt\right) + v_1(1)\,(\psi_3(t) - \varphi_3(t)) \\
&= \varphi_2(t)\left(\frac{1}{6}v_1(0) + \frac{4}{6}v_1(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}v_1(1) - \int_0^1 v_1(t)\,dt\right).
\end{aligned}
$$

Изразът в скобите би могъл да се интерпретира като функционал на грешката от квадратурната формула на Simpson. Следователно

$$
(\Pi_{1h_1}v_1 - \pi_{1h_1}v_1)_{|T} = \varphi_2(t)E_T(v_1), \tag{2.54}
$$

където с E_T сме означили функционала на грешката от квадратурната формула върху T. Лесно се проверява, че $E_T(v_1) = 0$ за всяко $v_1 \in \mathcal{P}_2(t)$, а също така $|\varphi_2(t)| \leq 3/2,\ t \in T$.

От равенството (2.54), след прилагане на лемата на Bramble-Hilbert [46], за произволен елемент $K_i^{(1)},\ i = 1, 2, \ldots, 2n_1 + 2n_2$ получаваме

$$
|\Pi_{1h_1}v_1 - \pi_{1h_1}v_1|_{|_{K_i^{(1)}}} \leq Ch^3|v_1|_{3,K_i^{(1)}}.
$$

Оттук следва оценката в L_2-норма

$$
\begin{aligned}
\|\Pi_{1h_1}v_1 - \pi_{1h_1}v_1\|_{0,\Omega_1} &= \left(\sum_{i=1}^{2n_1+2n_2}\int_{K_i^{(1)}}|\Pi_{1h_1}v_1 - \pi_{1h_1}v_1|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\leq Ch^3\|v_1\|_{3,\Omega_1}.
\end{aligned} \tag{2.55}
$$

След диференциране и прилагане на обратното неравенство [56] достигаме до неравенството

$$
\left|\frac{d}{dx}\left(\Pi_{1h_1}v_1 - \pi_{1h_1}v_1\right)\right|_{|_{K_i^{(1)}}} \leq Ch^2|v_1|_{3,K_i^{(1)}},\ i = 1, 2, \ldots, 2n_1 + 2n_2.
$$

Така оценката в H^1-норма е:

$$
\|\Pi_{1h_1}v_1 - \pi_{1h_1}v_1\|_{1,\Omega_1} \leq Ch^2\|v_1\|_{3,\Omega_1}.
$$

Горното неравенство и (2.55) дават

$$\|\Pi_{1h_1}v_1 - \pi_{1h_1}v_1\|_{s,\Omega_1} \le Ch^{3-s}\|v_1\|_{3,\Omega_1}, \quad s = 0, 1. \tag{2.56}$$

По същия начин, ако $v_2 \in V_2 \cap H^3(\Omega_2)$, то

$$\|\Pi_{2h_2}v_2 - \pi_{2h_2}v_2\|_{s,\Omega_2} \le Ch^{3-s}\|v_2\|_{3,\Omega_2}, \quad s = 0, 1. \tag{2.57}$$

Окончателно, от (2.56) и (2.57) ще получим

$$\|\Pi_h v - \pi_h v\|_{s,\Omega} \le Ch^{3-s}\|v\|_{3,\Omega}, \quad s = 0, 1. \tag{2.58}$$

Лагранжевият интерполант дава "класическа" оценка на сходимост за апроксимиращи полиноми от втора степен [57]. Като отчетем, че

$$\|v - \pi_h v\|_{s,\Omega} \le \|v - \Pi_h v\|_{s,\Omega} + \|\Pi_h v - \pi_h v\|_{s,\Omega}, \quad s = 0, 1,$$

от (2.58) ще следва оценката

$$\|v - \pi_h v\|_{s,\Omega} \le Ch^{3-s}\|v\|_{3,\Omega}, \quad s = 0, 1. \tag{2.59}$$

Елиптичният проектор $R_h : \ V \to V_h$ е определен с равенството

$$a(v - R_h v, v_h) = 0, \quad \forall v \in V, \ v_h \in V_h.$$

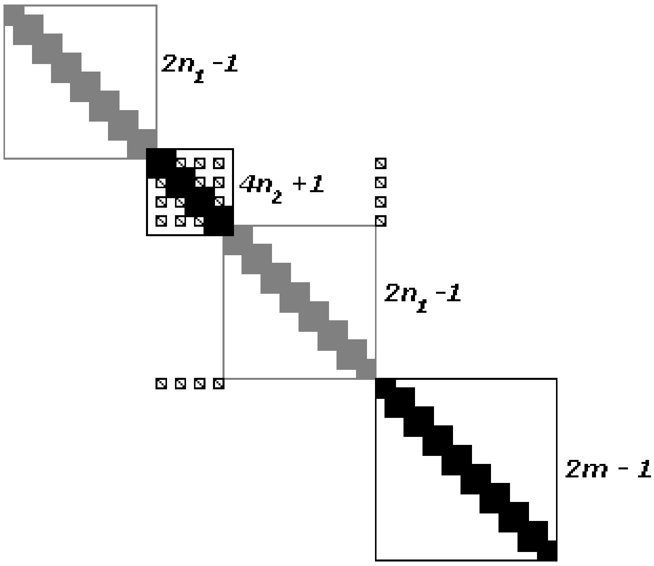
Оценката (2.59) показва, че крайноелементното пространство $V_h \subset V$ притежава следните апроксимационни свойства:

$$\begin{aligned} &\inf_{v_h \in V_h} \{\|v - v_h\|_{0,\Omega} + h|v - v_h|_{1,\Omega}\} \le Ch^3\|v\|_{3,\Omega}, \\ &\|v - R_h v\|_{1,\Omega} \le Ch^2\|v\|_{3,\Omega}, \quad \forall v \in V \cap H^3(\Omega). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Теорията за интерполационния анализ в МКЕ може да се адаптира за разглежданата спектрална контактна задача (2.51) и нейното приближение (2.52) на базата на оценка (2.60). Именно, редът на сходимост в (2.53) се определя от (2.60), което е следствие от оценката (2.59).

$\blacksquare$

Ще завършим този параграф с някои изчислителни аспекти, тъй като контактната спектрална задача провокира интересни структури в резултиращите матрици поради условието за спрягане в контактната точка.



Фигура 2.7: Профил на матриците на маса и коравина

Тогава

$$u_{2h}(0) = \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+2n_2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{1h}(x)\, dx.$$

Това равенство определя и базисните функции за V_h и оттам получаваме матриците на маса и коравина.

Нека $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{4n_1+4n_2+1}$ е каноничният базис в X_{1h_1}, където

$$\widetilde{\varphi}_{2i}(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{и} \quad \int_{x_{j-1}}^{x_j} \widetilde{\varphi}_{2i-1}(x)\, dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, 2n_1 + 2n_2,$$

а δ_{ij} е символът на Cronecker.

По подобен начин, за променливата y ще имаме базисни функции $\{\overline{\varphi}_j\}_{j=0}^{2m}$, които образуват базис за пространството X_{2h_2}. Условията са

$$\overline{\varphi}_{2i}(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{и} \quad \int_{y_{j-1}}^{y_j} \overline{\varphi}_{2i-1}(y)\, dy = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Базисът на V_h съдържа $4n_1 + 4n_2 + 2m - 2$ функции, които можем да запишем по следния начин:

$$\Phi_j(x,y) = [\widetilde{\varphi}_j(x), 0], \qquad j = 1, \ldots, 2n_1;$$

$$\Phi_j(x,y) = [\widetilde{\varphi}_j(x), \frac{1}{2\varepsilon}\overline{\varphi}_0(y)], \qquad j = 2k-1, k = n_1+1, \ldots, n_1+2n_2;$$

$$\Phi_j(x,y) = [\widetilde{\varphi}_j(x), 0], \qquad j = 2k, k = n_1+1, \ldots, n_1+2n_2-1;$$

$$\Phi_j(x,y) = [\widetilde{\varphi}_j(x), 0], \qquad j = 2n_1+4n_2, \ldots, 4n_1+4n_2-1;$$

$$\Phi_j(x,y) = [0, \overline{\varphi}_j(y)], \qquad j = 4n_1+4n_2, \ldots, 4n_1+4n_2+2m-2.$$

На Фиг. 2.7 е представена структурата на матриците на маса и коравина за разглежданата контактна задача.

2.6 Числови примери

Ще представим числови примери за всяка от трите задачи в тази глава.

Пример 2.1

Нека единичният квадрат е разделен на два еднакви правоъгълни триъгълника (Фиг. 2.8). Ще илюстрираме теорията, разгледана в § 2.2.

Решаваме задачата:

$$-\Delta u_i = \lambda u_i \ \text{ в } \ \Omega_i, \ i = 1, 2,$$

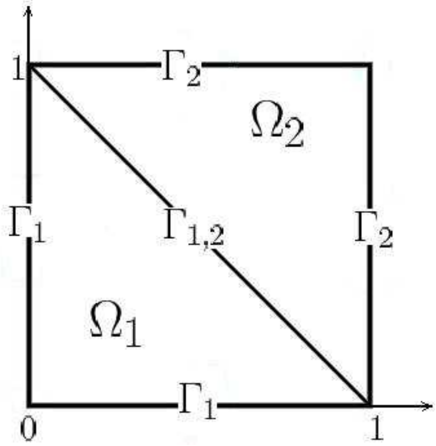
като

$$u_i = 0 \ \text{ върху } \Gamma_i, \ i = 1, 2,$$

$$\int_{\Gamma_{1,2}} [u_1(x) - u_2(x)] \, ds = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu^{(1)}} = -\frac{\partial u_2}{\partial \nu^{(2)}} = \text{const} \ \text{ върху } \ \Gamma_{1,2}.$$

В Таблица 2.1 са представени първите четири приближени собствени стойности, както и са дадени съответните точни собствени стойности. Двете подобласти Ω_1 и



Фигура 2.8: Областта Ω, разделена на подобласти Ω_1 и Ω_2, при нелокално условие върху $\Gamma_{1,2}$

Таблица 2.1: Собствените стойности, пресметнати чрез квадратични крайни елементи

λ_h / N	8	32	128	exact
$\lambda_{1,h}$	21.082	19.814	19.739	19.739
$\lambda_{2,h}$	51.692	41.617	40.382	40.381
$\lambda_{3,h}$	70.565	49.454	49.350	49.348
$\lambda_{4,h}$	71.217	50.612	49.356	49.348

Ω_2 са разделени на N триъгълни крайни елементи от интегрален тип (виж Фиг. 2.2). Използването на интегралните степени на свобода се отразява благоприятно при конструиране на матриците на маса и коравина.

Пример 2.2

В този пример се прилага апостериорна процедура за задача с нелокални гранични условия.

Нека

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : \ 0 < x_i < 1, \ i = 1, 2\},$$

$$\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) : \ 0 < x_1 < 1, \ x_2 = 1\}$$

$$\text{и} \ \ \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1.$$

Таблица 2.2: Собствени стойности, получени по МКЕ с използване на билинейни елементи

N	$\lambda_{1,h}$	$\lambda_{2,h}$	$\lambda_{3,h}$	$\lambda_{4,h}$
16	0.808932859	11.63731126	14.21535688	36.70151076
64	0.804947034	11.21636601	13.72260280	35.34580736
256	0.797117258	11.12108553	13.60201416	33.52161620
1024	0.781913261	11.10150221	13.57203629	33.36752919

Таблица 2.3: Собствени стойности, получени след използване на апостериорна процедура, описана в § 2.3

N	$\widetilde{\lambda}_{1,h}$	$\widetilde{\lambda}_{2,h}$	$\widetilde{\lambda}_{3,h}$	$\widetilde{\lambda}_{4,h}$
16	0.796993204	11.11973533	13.60842419	33.50785135
64	0.780697718	11.10580126	13.58073619	33.30999380
256	0.780111186	11.10090389	13.56982857	33.28591706

Решаваме следната моделна задача: търсим $(\lambda, u) \in \mathbf{R} \times H^2(\Omega)$, за които е удовлетворено диференциалното уравнение

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{в} \;\; \Omega,$$

при нелокално гранично условие на Newmann

$$\int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \nu_2 \right) ds = 0,$$

като $u = \text{const.}$ върху Γ_1 и същевременно удовлетворява гранично условие на Robin:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \nu_2 + 0.21 u = 0 \quad \text{върху} \;\; \Gamma_2.$$

В Таблица 2.2 са дадени приближенията на първите четири собствени стойности, получени с използване на N стандартни четириточкови билинейни крайни елементи. След това в Таблица 2.3 са отразени резултатите за същите собствени стойности, но след прилагане на апостериорна процедура. Тези пресмятания са извършени с биквадратични четириъгълни крайни елементи от Сирендипов тип.

Точните собствени стойности на поставената задача не са известни. Могат да се направят сравнения на получените резултати в двете таблици, като се има предвид, че конформният МКЕ апроксимира точните стойности отгоре. Така например приближението след апостериорна процедура с 16 елемента е приблизително такова, каквото е с 256 билинейни елемента, представени в Таблица 2.2.

На базата на теоретичните резултати в § 2.3 и предложените тук числови резултати е видно, че глобалната апостериорна процедура е ефективна за задачи с нелокални условия. Използването на най-ниската степен (билинейна) е практически оправдано и много ефективно при положение, че след това се прилага подходът, който чувствително ускорява сходимостта.

Пример 2.3

Този пример е посветен на едномерна спектрална задача, в която два дефиниционни интервала се застъпват. Те са $\Omega_1 = [0, 2\pi]$ и $\Omega_2 = [\pi, 3\pi]$.

Моделната задача е:

$$-u_1'' - K\chi_{(\pi,2\pi)} = \lambda u_1 \quad \text{в интервала} \ \ (0, 2\pi),$$

$$-u_2'' + K\chi_{(\pi,2\pi)} = \lambda u_2 \quad \text{в интервала} \ \ (\pi, 3\pi),$$

$$u_1(0) = 0, \ \ u_2(3\pi) = 0,$$

$$u_1'(2\pi) = 0, \ \ u_2'(\pi) = 0,$$

заедно с нелокалното условие

$$\int_{\pi}^{2\pi} [u_1(x) - u_2(x)] \, dx = 0.$$

Точните собствени стойности (двукратни) са:

$$\lambda_{2j+1} = \lambda_{2j+2} = \left(\frac{2j+1}{4}\right)^2, \ j = 0, 1, \ldots .$$

За константата K лесно се получава $K = \dfrac{u_1'(\pi) + u_2'(2\pi)}{2\pi}$.

Пресмятанията са извършени върху равномерна мрежа, т.е. чрез равни по дължина интервали. Така $\Omega_i, \ i = 1, 2$ се покриват от квадратични крайни елементи с интегрална степен на свобода. Броят на подинтервалите е равен на N и тогава стъпката е $h = 2\pi/N$.

В Таблица 2.4 са представени резултатите за първите пет приближени собствени стойности, като ясно се вижда, че методът дава оптимален ред на сходимост. Това може да се провери посредством относителната грешка $R_{i,h} = (\lambda_{i,h} - \lambda_i)/\lambda_i$, като резултатите за нея са дадени в Таблица 2.5.

Таблица 2.4: Собствени стойности, пресметнати с квадратични крайни елементи за задача със застъпващи се интервали

λ_h / N	4	8	16	32
$\lambda_{1,h}$	0.0625001288	0.0625000081	0.0625000005	0.0625000000
$\lambda_{2,h}$	0.0625001288	0.0625000081	0.0625000005	0.0625000000
$\lambda_{3,h}$	0.5625923908	0.5625058521	0.5625003670	0.5625000230
$\lambda_{4,h}$	0.5926287762	0.5625058568	0.5625003670	0.5625000230
$\lambda_{5,h}$	1.5644208630	1.56262443651	1.5625078502	1.5625004918

Таблица 2.5: Относителни грешки на резултатите от Таблица 2.4

$R_{i,h}$ / N	4	8	16	32
$R_{1,h}$	2.06×10^{-6}	1.29×10^{-7}	8×10^{-9}	0
$R_{2,h}$	2.06×10^{-6}	1.29×10^{-7}	8×10^{-9}	0
$R_{3,h}$	1.64×10^{-4}	1.04×10^{-5}	6.52×10^{-7}	4.09×10^{-8}
$R_{4,h}$	5.36×10^{-2}	1.04×10^{-5}	6.52×10^{-7}	4.09×10^{-8}
$R_{5,h}$	1.23×10^{-3}	7.96×10^{-5}	5.02×10^{-6}	3.15×10^{-7}

Таблица 2.6: Резултати от числов експеримент с използване на елементи с интегрална степен на свобода и по части полиноми от втора степен

n_2	$\lambda_{1,h}$	$\lambda_{2,h}$	$\lambda_{3,h}$	$\lambda_{4,h}$
1	2.46743431052	9.87169789914	10.7661731788	22.2299433588
2	2.46740318393	9.86973727943	10.7636545285	22.2082951278
4	2.46740123063	9.86961280498	10.7634938313	22.2070103253
8	2.46740110842	9.86960493939	10.7634830108	22.2067105097

Пример 2.4

Накрая, да разгледаме контактна задача с две едномерни области, показани на Фиг. 2.6. Решаваме задача (2.48)-(2.50) със следните данни: $p_i = 1,\ q_i = 0,\ i = 1, 2$ и $\varepsilon = 0.2$.

Пресметнати са първите четири собствени стойности, като точните стойности се определят явно при различни ε (виж напр. [71]).

В конкретния разглеждан случай

$$\lambda_1 = 2.46740110027; \quad \lambda_2 = 9.869604401089;$$

$$\lambda_3 = 10.7634821083; \quad \lambda_4 = 22.2066099025.$$

Използвани са равномерни мрежи за областите $\Omega_1 \backslash \Omega_\varepsilon,\ \Omega_\varepsilon$ и Ω_2. Те са разделени съответно на $2n_1, 2n_2$ и m равни части. Като фиксираме цялото положително число n_2, то за мрежовия параметър h_1 получаваме $h_1 = h_2 = 0.2/n_2$ при положение, че $n_1 = 4n_2$ и $m = n_1 + n_2$.

В Таблица 2.6 са представени първите четири приближени собствени стойности с използване на квадратични крайни елементи при $n_2 = 1, 2, 4, 8$.

Глава 3

Анализ и приложения на неконформни крайни елементи

3.1 Въведение

Принципът на конформност в МКЕ налага следните три изисквания:

(1) Апроксимиращото крайноелементно функционално пространство V_h да притежава необходимата гладкост, която се изисква от решаваната задача [48, 56]. Освен това то трябва да се съдържа във вариационното функционално пространство V, т.е. $V_h \subset V$.

(2) Интегралите във вариационното равенство да се изчисляват точно, а не да се вземат техни приближени представяния.

(3) Дефиниционната област на граничната задача Ω и тази на съответната приближена задача Ω_h да съвпадат, т.е. $\Omega_h \equiv \Omega$.

Да бъдат удовлетворени тези изисквания не представлява особена трудност, така че конформният случай на прилагане на МКЕ е добре изучен. Въпреки това, на практика много често горните условия се нарушават. Ще представим някои типични примери за това.

Съществуват достатъчно точни и удобни квадратурни формули за числено пресмятане на интеграли. Анализът и изчисленията се извършват в един основен елемент, след което се прави трансформация в произволен краен елемент от разделянето. Този подход нарушава условието (2). Чрез използване на подходящи квадратури, приложени за параболични или спектрални задачи, може да се получи диагонална матрица на маса (lumped mass) (виж напр. [7]).

Ако областта Ω е с криволинейни граници, удобно е трансформацията от основния в произволен краен елемент да се извърши с полиноми от същата степен, от която са полиномите, апроксимиращи граничната задача. Целта е да се получи добро приближение на границата, но очевидно е, че условието (3) е нарушено.

Нека да отбележим интересния факт, че в научната литература методите, свързани с горните примери за (2) и (3) не се наричат неконформни методи. Те са познати съответно като *МКЕ с числено интегриране* и *изопараметричен МКЕ* [56]. Ако трансформационните полиноми са от по-ниска или по-висока степен, то последният метод е съответно *субпараметричен* или *суперпараметричен*.

Що се отнася до нарушаване на условието (1), то тук имаме много по-разнообразни и дълбоки мотиви това да се случва. Крайните елементи, при които $\Omega_h \equiv \Omega$, но $V_h \not\subset V$, носят наименованието *неконформни елементи*, а методът – *неконформен МКЕ*. Именно на анализа на такива елементи и тяхното приложение е посветена настоящата Глава 3.

В това въведение ще се опитаме да отговорим на въпроса защо понякога се налага да се откажем от изискуемата гладкост на крайноелементното пространство V_h. Това донякъде ще обясни интереса на специалистите и приложниците към неконформните методи през последните години.

В разрез с традицията, нека най-напред да изтъкнем **недостатъците** на неконформните методи. Анализът за качеството на неконформните подходи е затруднен, тъй като не може директно да се приложи интерполационната теория, както това се прави при Лагранжеви и Ермитови конформни крайни елементи. В някои случаи може да се докаже само сходимост на метода, без да се установи точният порядък (скорост на сходимост). Основни инструменти за математически анализ на метода са частичният тест върху макроелемент от неконформни крайни елементи (*patch test*) [84] и Втората лема на Strang [56, 128]. В сравнение с конформните методи, неконформните МКЕ имат очевидно по-ограничено приложение.

Предимствата на неконформния подход се проявяват в следните важни случаи:

- При дадена (доказана) скорост на сходимост неконформните крайни елементи по-често водят до разредени матрици с по-добра структура за изчисления, отколкото съответният по точност конформен метод. Предимствата на неконформните крайни елементи са добре изразени в случай на мрежова анизотропия (виж [88, 134]).

- Неконформните методи имат сериозно предимство при моделиране на флуидни течения в хетерогенни порести среди [35]. Те много по-лесно апроксимират изискването за нулева дивергенция на скоростта в уравненията на Stokes и Navier-Stokes.

- Някои неконформни методи дават възможност за приближаване отдолу на собствените стойности на елиптичните оператори, докато известно е (виж напр. [38, 129]), че всеки конформен МКЕ дава оценки отгоре.

Отказът от конформност позволява по-голяма свобода за конструиране и изследване относно геометрията и базисните функции на неконформни крайни елементи [48]. Така се получават нови неконформни елементи, които са насочени към по-специални приложения, например за моделни задачи от динамика на флуидите или при прилагане на прекъснат метод на Гальоркин.

След всичко казано дотук се налага отново да повторим вече известния извод, че МКЕ е един от най-гъвкавите методи за решаване на гранични задачи. Неговите проявления са много разнообразни, а някои от резултатите биха могли да бъдат дори неочаквани.

В тази глава се прави анализ на сходимост при използване на някои неконформни крайни елементи. Като се дава акцент върху елементи с интегрални степени на свобода, се доказват теореми и на тяхната база се предлагат алгоритми за ускоряване на сходимостта на приближеното към точното решение за елиптични гранични задачи.

Значително място е отделено на въпроса за получаване на долни граници на точните собствени стойности за елиптични оператори от втори и четвърти ред. Направен е задълбочен обзор на световните постижения и тенденции в този важен аспект на неконформния МКЕ. Представен е и оригинален алгоритъм за получаване на двустранни оценки на точните собствени стойности.

Основните резултати от Глава 3 са публикувани в статиите [22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 115, 150].

3.2 Някои най-прости неконформни крайни елементи

Ще започнем с линейния триъгълен краен елемент на Crouzeix-Raviart и четириъгълния ротиран билинеен краен елемент [118], както и техните разширения. Обединяващото звено и акцентът в нашите разглеждания е фактът, че тези четири най-прости крайни елемента използват интегрални степени на свобода.

Ще изложим някои основни свойства на тези елементи. За тази цел ще си послужим със следната моделна задача: Върху многоъгълната област $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ с граница $\partial\Omega$, при дясна част $f \in L_2(\Omega)$, решаваме елиптичната задача от втори ред

$$\begin{aligned} -\Delta u + a_0 u = f \qquad &\text{в} \;\; \Omega, \\ u = 0 \qquad &\text{върху} \;\; \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

където $a_0(x)$ е неотрицателна ограничена функция в Ω.

Слабата формулировка на задачата (3.1) е: Да се намери функция $u \in H_0^1(\Omega)$ такава, че

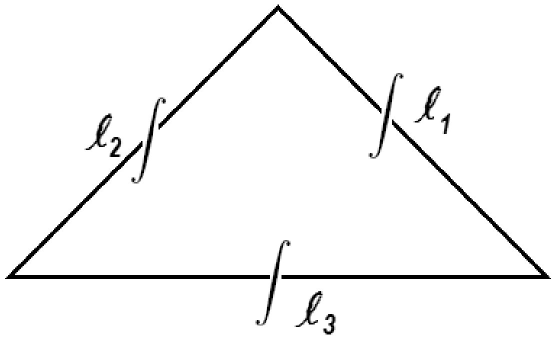
$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall\, v \in V \equiv H_0^1(\Omega), \tag{3.2}$$

където

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv)\; dx \quad \forall u,v \in V.$$

Нека с τ_h да означим регулярна триангулация на Ω с мрежов параметър h, която да удовлетворява стандартните предположения [56].

Предполагаме също, че съществува число $\sigma > 0$ такова, че $h_K/\rho_K \le \sigma$, където ρ_K е диаметърът на вписаната в триъгълника $K \in \tau_h$ окръжност, а h_K е неговият диаметър. При това $h = \max_{K\in\tau_h} h_K$.



Фигура 3.1: Елемент на Crouzeix-Raviart

Линейният триъгълен краен елемент на Crouzeix-Raviart е безспорно най-често използваният в практиката неконформен елемент. Неговите възли са средите на страните на триъгълника [65]. Той е лесен за приложение и притежава редица добри свойства, особено при итерационните методи за пресмятане на резултантните линейни системи [88]. Друг важен факт е, че неконформният МКЕ чрез елемента на Crouzeix-Raviart е предпочитан при решаване на уравнението на Стокс [48, 65].

Предвид по-нататъшните разглеждания ние ще използваме степените на свобода на елемента на Crouzeix-Raviart (C-R) в интегрален вид, което значително ще облекчи изложението и преди всичко доказателствата.

Да означим страните на триъгълника K с $l_j,\ j = 1, 2, 3$.

Ще дефинираме неконформното крайноелементно пространство V_h на Crouzeix-Raviart (Фиг. 3.1):

$$\begin{aligned} V_h = \Big\{ & v : v_{|K} \in \mathcal{P}_1 \text{ е интегрално непрекъсната функция} \\ & \text{върху страните на } K, \text{за всяко } K \in \tau_h \\ \text{и } & \int_l v\, dl = 0 \ \text{ за страна } l, \text{ лежаща на границата } \partial\Omega \Big\}. \end{aligned}$$

За всеки два съседни елемента от τ_h с обща страна l, интегралната стойност $\displaystyle\int_l v_h\, dl,\ v_h \in V_h$ е една и съща, разглеждайки двата елемента.

Нека да дефинираме върху функционалното пространство $V_h + H_0^1(\Omega)$ следната билинейна форма :

$$a_h(u, v) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv)\, dx.$$

Билинейната форма $(f, \cdot)$ не се нуждае от подобна апроксимация, тъй като $f \in L_2(\Omega)$.

По този начин, неконформното приближение на задачата (3.2) е: Да се намери функция $u_h \in V_h$ така, че

$$a_h(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall\ v_h \in V_h. \tag{3.3}$$

В неконформния крайноелементен анализ е необходимо да се въведат **зависещи от мрежата** норми и полунорми

$$\|v\|_{m,h} = \left\{ \sum_{K\in\tau_h} \|v\|^2_{m,K} \right\}^{1/2}, \quad |v|_{m,h} = \left\{ \sum_{K\in\tau_h} |v|^2_{m,K} \right\}^{1/2}, \; m = 0, 1.$$

В основния елемент $T = \{(t_1, t_2) : \; t_1, t_2 \geq 0, \; t_1 + t_2 \leq 1\}$ дефинираме трите функции на формата (базисни функции):

$$\varphi_1(t_1, t_2) = -1 + 2t_1 + 2t_2; \quad \varphi_2(t_1, t_2) = 1 - 2t_1; \quad \varphi_3(t_1, t_2) = 1 - 2t_2.$$

За произволно разделяне τ_h ще въведем интерполационен оператор i_h, който е свързан с линейния неконформен елемент на Crouzeix-Raviart:

$$i_h : \; L_2(\Omega) \to V_h.$$

Операторът i_h използва интегралните условия по страните, т.е. за произволно $v \in L_2(\Omega)$ и за всяко $K \in \tau_h$,

$$\int_{l_j} i_h v \, dl = \int_{l_j} v \, dl,$$

където $l_j, \; j = 1, 2, 3$ са страните на K (Фиг. 3.1).

Очевидно е, че $i_h v \in V_h$ за всяко $v \in L_2(\Omega)$ и също така $i_h v \equiv v$ за всяко $v \in V_h$.

При използване на неконформния елемент на Crouzeix-Raviart, ако u и u_h са решения съответно на задача (3.2) и (3.3) и при това $u \in H^2(\Omega) \cap V$, то (виж напр. [55])

$$\|u - u_h\|_{s,h} \leq Ch^{2-s} \|u\|_{2,\Omega}, \; s = 0, 1. \tag{3.4}$$

Този резултат може да се докаже и чрез сравняване на свойствата на интерполанта $i_h u$ и на Лагранжевия интерполант за конформния линеен краен елемент [150].

Следващото свойство е за суперблизост на интерполационния оператор i_h на C-R елемента относно билинейната форма $a_h(\cdot, \cdot)$.

Теорема 3.1 *Нека $v \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ и $i_h v$ да е интерполантът, конструиран посредством C-R елемент.*

Тогава

$$|a_h(v - i_h v, v_h)| \leq Ch^2 |v|_{2,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h.$$

Ако освен това $a_0(x) \equiv 0$, то

$$a_h(v - i_h v, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.5}$$

Доказателство. Най-напред да отбележим, че върху страните $l_j,\ j = 1, 2, 3$ на произволен елемент $K \in \tau_h$

$$\int_{l_j} (v - i_h v)\, dl = 0. \tag{3.6}$$

Тогава от формулата на Green получаваме

$$\int_K \nabla(v - i_h v) \cdot \nabla v_h\, dx = \sum_{i=1}^{2} \int_K \partial_i (v - i_h v) \partial_i v_h\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left[\int_{l_1} (v - i_h v) \partial_i v_h\, dl + \int_{l_{i+1}} (v - i_h v) \partial_i v_h\, dl \right] = 0$$

поради факта, че $\partial_i v_h = \text{const},\ i = 1, 2$ и от равенство (3.6).

Сега ще оценим $a_0(x)(v - i_h v) v_{h|_K}$, когато $a_0(x) \neq 0$. Да приложим афинна трансформация от основния елемент T към елемента $K \in \tau_h$. Без да ограничаваме общността на разсъжденията, да приемем, че (константният) Якобиан на трансформацията F_K е положителен. Тогава

$$\det B_K = 2\ \text{meas}(K) = \mathcal{O}(h^2).$$

Поради афинността $v(t)_{|_T} = v(x)_{|_K},\ x = F_K(t),\ \forall t \in T$. Тогава (ще пропускаме аргументите):

$$\begin{aligned} \left| \int_K a_0 (v - i_h v) v_h\, dx \right| &= \det(B_K) \left| \int_T a_0 (v - i_h v) v_h\, dt \right| \\ &\leq C h_K^2 \|a_0\|_{\infty,T} \left| \int_T (v - i_h v) v_h\, dt \right| \\ &= C h_K^2 \|a_0\|_{\infty,T} L(v)_{|_T}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

където $L(v)_{|_T}$ е линеен функционал, ограничен от израза $C\|v\|_{2,T}\|v_h\|_{0,T}$. $L(v)$ става равен на нула за всяко $v_{|_T} \in \mathcal{P}_1(T)$.

Следователно

$$L(v)_{|_T} \leq C |v|_{2,T} \|v_h\|_{0,T}.$$

Като отчетем, че

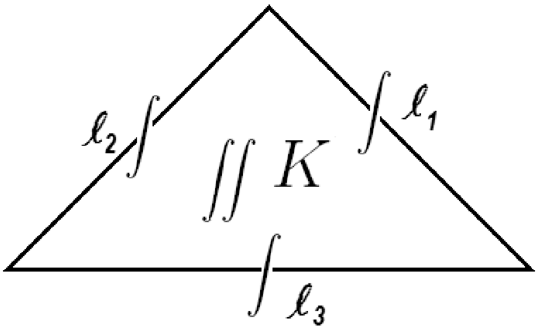
$$|v|_{2,T} \leq C h_K^2 \left(\det B_K\right)^{-1/2} |v|_{2,K},$$

от (3.7) ще получим

$$\left| \int_K a_0 (v - i_h v) v_h\, dx \right| \leq C h^2 \|a_0(x)\|_{\infty,K} \|v_h\|_{0,K}.$$

Окончателно, от последното неравенство и от факта, че $v_h \in V_h \subset L_2(\Omega)$, следва твърдението на теоремата.

■



Фигура 3.2: Непълен квадратичен неконформен елемент

Нека сега да разширим множеството на неконформните крайни елементи, които притежават свойства, сходни с тези на C-R елемента. Впоследствие тези свойства ще ни позволят да конструираме покриващи (възстановяващи) апостериорни процедури, които значително ускоряват сходимостта на приближеното решение. Важен ефект ще имат изследванията и върху приближените собствени стойности на Лапласиана, които ще бъдат разгледани в следващите параграфи.

За по-голяма яснота на изложението, отново моделната задача е (3.1) и съответното вариационно представяне е (3.2).

Най-напред ще въведем един "екзотичен" неконформен краен елемент, който надгражда елемента на Crouzeix-Raviart. Ето защо ще го наричаме *разширен елемент на Crouzeix-Raviart* (extended C-R; EC-R) [26]. Да отбележим, че този елемент е въведен също и в [97], като там той е наречен *enriched Crouzeix-Raviart element*.

В редица практически приложения на МКЕ се добавя неотрицателна базисна функция с локален носител – самият краен елемент. Тази функция (*bubble function*) има стабилизиращ и изглаждащ ефект върху крайноелементното решение [32]. В нашия случай ще добавим степен на свобода, която е стойността на двойния интеграл от пробна функция върху елемента K. Така се получават четири базисни функции, които са интегрални стойности (Фиг. 3.2). Очевидно е, че елементът ще е непълен квадратичен.

Неконформното крайноелементно пространство се дефинира по следния начин:

$$V_h = \Big\{ v : v_{|_K} \in P_K \text{ е интегрално непрекъсната функция}$$

$$\text{върху страните на } K, \text{за всяко } K \in \tau_h$$

$$\text{и } \int_l v\, dl = 0 \;\text{ за страна } l, \text{ лежаща на границата } \partial\Omega \Big\}.$$

В тази дефиниция $\mathcal{P}_1 \subseteq P_K \subseteq \mathcal{P}_2$, а също така всеки два съседни елемента от τ_h имат една и съща интегрална стойност $\displaystyle\int_l v_h\, dl$, $v_h \in V_h$ върху тяхната обща страна l.

В основния краен елемент T четирите функции на формата са:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t_1,t_2) = -1 + 3(t_1^2 + t_2^2);\\
&\varphi_2(t_1,t_2) = 1 - 4t_1 - 2t_2 + 3(t_1^2 + t_2^2);\\
&\varphi_3(t_1,t_2) = 1 - 2t_1 - 4t_2 + 3(t_1^2 + t_2^2);\\
&\varphi_4(t_1,t_2) = 12t_1 + 12t_2 - 18(t_1^2 + t_2^2).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Функциите $\varphi_j,\ j = 1,2,3,4$ са подбрани така, че да удовлетворяват условията

$$\int_{l_i} \varphi_j \, dl = \delta_{ij},\ i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4,$$

$$\int\int_T \varphi_j \, dt_1 \, dt_2 = \delta_{4j},\ j = 1,2,3,4.$$

Ще решаваме задачата (3.3), но с крайни елементи EC-R. Очевидно е, че тези елементи осъществяват P_K-унисолвентност [56].

От (3.8) ясно следва, че

$$\mathcal{P}_1 \subseteq P_K \subseteq \mathcal{P}_2.$$

Също така лесно се вижда, че ако решението u на (3.2) принадлежи на $H^2(\Omega) \cap V$, то в сила е оценката (3.4).

Както и при C-R елемента, и тук ще въведем интерполационния оператор i_h:

$$i_h :\ L_2(\Omega) \to V_h,$$

като за всяко $v \in L_2(\Omega)$ и за произволен елемент $K \in \tau_h$ ще имаме

$$\int_{l_j} i_h v \, dl = \int_{l_j} v \, dl,$$

а също така и

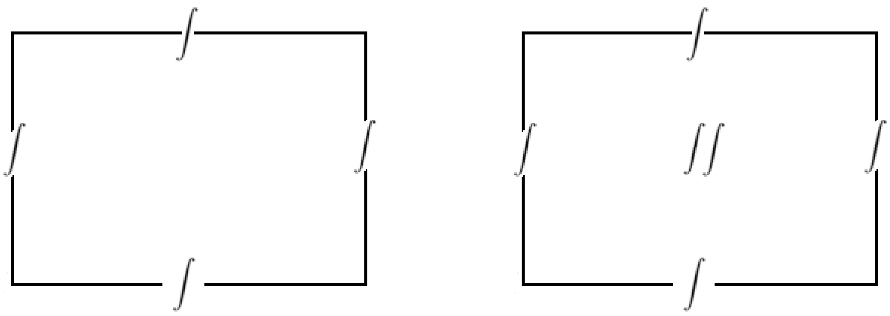
$$\int_K i_h v \, dx = \int_K v \, dx,$$

където $l_j,\ j = 1,2,3$ са страните на K (Фиг. 3.2).

Очевидно $i_h v \in V_h$ за всяко $v \in L_2(\Omega)$ и $i_h v \equiv v$ за всяко $v \in V_h$.

Следващата ни цел е да докажем резултат, аналогичен на този от Теорема 3.1. Преди това обаче ще въведем други два неконформни елемента с интегрални степени на свобода, които са четириъгълни аналози на елементите C-R и EC-R.

За възли на четириъгълните неконформни елементи на Rannacher-Turek [48, 117, 118] се използват средите на страните, а когато се добави центърът на елемента



Фигура 3.3: Q_1^{rot} и EQ_1^{rot} елементи

(пресечната точка на диагоналите) се получава неговият разширен (extended) вариант. Тези елементи в последните години се обозначават като Q_1^{rot} и EQ_1^{rot} (виж напр. [82, 92]). Вместо стойности в точка ще използваме стойности на интегралите върху страните (Фиг. 3.3). Интерполантът i_h на елементът Q_1^{rot} използва мономите $\{1, x, y, x^2 - y^2\}$.

Тогава

$$\int_{l_j} i_h v \, dl = \int_{l_j} v \, dl, \;\; j = 1, 2, 3, 4,$$

където l_j са страните на правоъгълника $K \in \tau_h$.

Що се отнася до EQ_1^{rot}, то за него [92]

$$i_h v \in \operatorname{span}\{1, x, y, x^2, y^2\}$$

и освен последното равенство е изпълнена и зависимостта

$$\int_K i_h v \, dx \, dy = \int_K v \, dx \, dy.$$

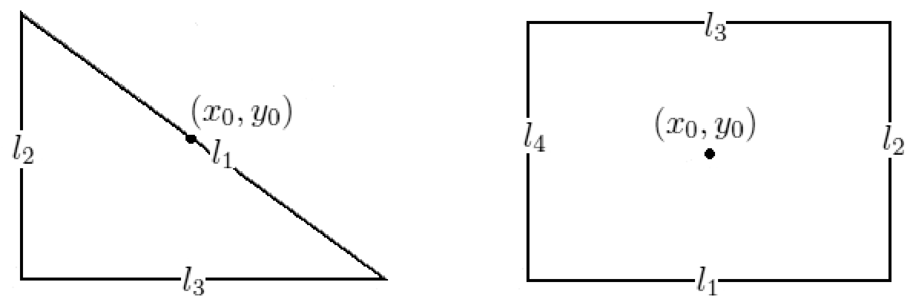
Ще предполагаме, че в $a(\cdot,\cdot)$, а следователно и в $a_h(\cdot,\cdot)$, коефициентът $a_0(x)$ е тъждествено равен на нула. Следващата теорема има основен принос за ускоряване на сходимостта при неконформните елементи.

Теорема 3.2 *Нека τ_h се състои от неконформни елементи EC-R, Q_1^{rot} или EQ_1^{rot} (Фиг. 3.2 и Фиг. 3.3). Ако $u \in H_0^1(\Omega)$, то за трите случая е в сила равенството*

$$a_h(i_h u, v_h) = a_h(u, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.9}$$

Доказателство. За яснота на изложението ще предполагаме, че триъгълната (правоъгълната) мрежа е равномерна. За a_h-формата имаме ($v_h \in V_h$):

$$\begin{aligned} a_h(i_h u - u, v_h) &= \sum_{K\in\tau_h} \int_K \nabla(i_h u - u) \cdot \nabla v_h \, dx \, dy \\ &= \sum_{K\in\tau_h} \int_K \left(\partial_x(i_h u - u)\partial_x v_h + \partial_y(i_h u - u)\partial_y v_h\right) dx \, dy. \end{aligned} \tag{3.10}$$



Фигура 3.4: Означенията за триъгълен и четириъгълен елемент

Ще възприемем следните означения:

- Когато K е (правоъгълен) триъгълник, то уравненията за страните са (Фиг. 3.4):
$$l_1: \ x - x_0 + y - y_0 = 0; \quad l_2: \ x - x_0 = -h; \quad l_3: \ y - y_0 = -h,$$
където (x_0, y_0) е средата на страната върху l_1;

- Когато K е правоъгълник (квадрат), то уравненията на страните са:
$$l_{1;3}: \ y - y_0 = \mp h; \quad l_{2;4}: \ x - x_0 = \mp h,$$
където (x_0, y_0) е центърът на елемента K (Фиг. 3.4).

Ще разгледаме последователно трите случая.

Случай 1 – EC-R елемент

Понеже K е непълен квадратичен елемент, то от (3.10) за всяко $v_h \in V_h$ ще запишем:

$$\begin{aligned} v_h(x,y) &= v_h(x_0,y_0) + (x-x_0)\partial_x v_h(x_0,y_0) + (y-y_0)\partial_y v_h(x_0,y_0) \\ &+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\partial_{xx}v_h(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(y-y_0)^2\partial_{yy}v_h(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Очевидно
$$\begin{aligned} \partial_x v_h(x,y) &= \partial_x v_h(x_0,y_0) + (x-x_0)\partial_{xx}v_h, \\ \partial_y v_h(x,y) &= \partial_y v_h(x_0,y_0) + (y-y_0)\partial_{yy}v_h, \end{aligned}$$
и освен това $\partial_{xx}v_h = \partial_{yy}v_h = \text{const}$.

По такъв начин получаваме

$$\int_K \partial_x(i_h u - u)\partial_x v_h \, dx \, dy = \int_K \partial_x(i_h u - u)\partial_x v_h(x_0, y_0) \, dx \, dy$$

$$+ \int_K \partial_x(i_h u - u)(x - x_0)\partial_{xx} v_h \, dx \, dy$$

$$= \partial_x v_h(x_0, y_0) \left(\int_{l_1} - \int_{l_2} \right) (i_h u - u) \, dy$$

$$+ \partial_{xx} v_h \left(\int_{l_1} - \int_{l_2} \right) (i_h u - u)(x - x_0) \, dy$$

$$- \int_K (i_h u - u)\partial_{xx} v_h \, dx \, dy.$$

Първото и третото събираемо са равни на нула и тогава

$$\int_K \partial_x(i_h u - u)\partial_x v_h \, dx \, dy = \partial_{xx} v_h \int_{l_1} (x - x_0)(i_h u - u) \, dy$$

$$+ h\partial_{xx} v_h \int_{l_2} (i_h u - u) \, dy = \partial_{xx} v_h \int_{l_1} (x - x_0)(i_h u - u) \, dy.$$

Аналогично ще получим

$$\int_K \partial_y(i_h u - u)\partial_y v_h \, dx \, dy = \partial_{yy} v_h \int_{l_1} (y - y_0)(i_h u - u) \, dx.$$

Като отчетем, че $\partial_{xx} v_h = \partial_{yy} v_h$, лесно ще получим, че $a_h(i_h u - u, v_h) = 0$.

Случай 2 – Q_1^{rot} елемент
Тук представянето (3.11) е валидно и освен това

$$\partial_{xx} v_h = -\partial_{yy} v_h = \text{const}. \tag{3.12}$$

Тогава пресмятаме:

$$\int_K \partial_x(i_h u - u)\partial_x v_h \, dx \, dy = \partial_x v_h(x_0, y_0) \left(\int_{l_2} - \int_{l_4} \right) (i_h u - u) \, dy$$

$$+ h\partial_{xx} v_h \left(\int_{l_2} + \int_{l_4} \right) (i_h u - u) \, dy - \int_K (i_h u - u)\partial_{xx} v_h \, dx \, dy \tag{3.13}$$

$$= - \int_K (i_h u - u)\partial_{xx} v_h \, dx \, dy.$$

По същия начин относно другия аргумент получаваме

$$\int_K \partial_y(i_h u - u)\partial_y v_h \, dx\, dy = -\int_K (i_h u - u)\partial_{yy} v_h \, dx\, dy. \tag{3.14}$$

Най-сетне, от (3.12) следва

$$\int_K \nabla(i_h u - u) \cdot \nabla v_h \, dx\, dy = 0$$

и тогава за всяко $v_h \in V_h$

$$a_h(i_h u - u, v_h) = 0.$$

Случай 3 – EQ_1^{rot} елемент

Сега равенството (3.11) е отново изпълнено за всяко $v_h \in V_h$, както и зависимостите (3.13) и (3.14), които изведохме за елемента Q_1^{rot}.

Тогава

$$\int_K \nabla(i_h u - u) \cdot \nabla v_h \, dx\, dy = -\int_K (i_h u - u)\Delta v_h \, dx\, dy.$$

Като отчетем, че $\Delta v_h = \text{const}$, то последният интеграл е равен на нула поради условието $\int_K i_h u \, dx\, dy = \int_K u \, dx\, dy$ за елемента EQ_1^{rot}.

Така и за този елемент получаваме, че $a_h(i_h u - u, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$.

Окончателно доказахме, че (3.9) е в сила за трите разгледани в теоремата неконформни крайни елемента.

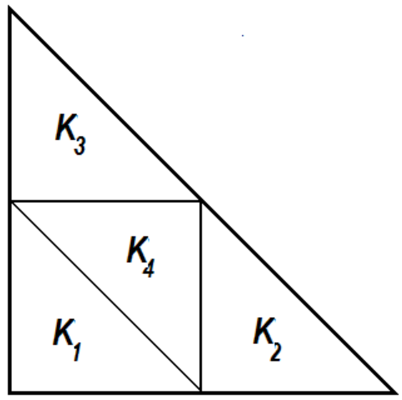
■

Забележка 3.1 *Резултатите от Теорема 3.1 и Теорема 3.2 не изчерпват всички възможни случаи. Удовлетворяването на равенството (3.9) за други неконформни елементи е все още открит въпрос.*

Забележка 3.2 *Доказаното равенство (3.9) намира приложение при оценки по неконформен МКЕ на собствените стойности отдолу, както и при конструиране на макроелементи с използването на крайноелементно решение с цел ускоряване на сходимостта на апроксимационния процес.*

Освен това равенството на a−формата ни позволява да използваме неравенството на Poincaré за този тип "неконформен" интерполант, т.е.

$$\|u - i_h u\|_{0,K} \le Ch\|\nabla u - \nabla i_h u\|_{0,K}.$$



Фигура 3.5: Макроелемент от триъгълни крайни елементи

3.3 Метод на неконформните интерполирани крайни елементи

Резултатите от предходния параграф ще намерят пряко приложение при един неконформен подход за ускоряване на сходимостта. Тук най-добре би трябвало да стане ясно защо вместо стойности във възли използваме стойности на интеграли върху страните на елемента.

Преди около 20 години Zienkiewicz и Zhu [148] въведоха апостериорното обединяване на крайни елементи с цел интерполираното крайноелементно решение върху отделния макроелемент да дава значително по-добро приближение (виж също [96]). Нашата цел е да пренесем този подход от конформния към неконформния случай. За яснота на изложението ще предполагаме, че решаваме моделната задача (3.2) с неконформни крайни елементи, дискутирани в предходния параграф, върху равномерна мрежа.

Най-напред да предположим най-простия случай, т.е. триъгълните C-R елементи. Да въведем "проектиращия" оператор $R_h : \ V \to V_h$, дефиниран с равенството

$$a_h(u - R_h u, v_h) = 0 \quad \forall u \in V, \ \forall v_h \in V_h.$$

Въпреки че неконформните методи не са проекционни, $\mathcal{O}(h)-$сходимостта е оптимална за линейния случай (виж [48]). Това означава, че щом $u \in H^2(\Omega) \cap V$, то

$$\|u - R_h u\|_{1,h} \leq Ch|u|_{2,\Omega}.$$

Нашата основна цел е да подобрим тази оценка, като конструираме нестандартен интерполационен оператор. За тази цел трябва да се извършат две основни стъпки:

(a) Доказва се локална суперблизост между точното решение на елиптичната задача от втори ред и интерполанта $i_h u$ от интегрален тип;

(б) Предлага се интерполационен оператор I_{2h} от по-висока степен спрямо i_h, който интерполира крайноелементното решение така, че да се получи оценка от тип суперсходимост в глобален смисъл. Този оператор I_{2h} действа по части върху обединение от крайни елементи (Фиг. 3.5).

Сега като следствие от Теорема 3.1 ще докажем следния резултат:

Лема 3.1 *Нека функцията u принадлежи на $H^2(\Omega) \cap V$. Тогава, ако τ_h е разделяне с C-R елементи, то*

$$\|i_h u - R_h u\|_{1,h} \le Ch^2 \|u\|_{2,\Omega}. \tag{3.15}$$

Доказателство. Последователно получаваме, че ($\alpha = \text{const} > 0$):

$$\begin{aligned}
\alpha \|i_h u - R_h u\|_{1,h}^2 &\le a_h(i_h u - R_h u, i_h u - R_h u) \quad (V_h - \text{елиптичност}) \\
&= a_h(i_h u - u, i_h u - R_h u) \qquad (\text{свойство на } R_h) \\
&\le Ch^2 \|u\|_{2,\Omega} \|i_h u - R_h u\|_{1,h}. \qquad (\text{от Теорема 3.1})
\end{aligned}$$

■

Нека да групираме по четворки триъгълниците от τ_h (Фиг. 3.5). По този начин ще получим друго крайноелементно разделяне $\widetilde{\tau}_{2h}$ с мрежов параметър $2h$. В това разделяне, състоящо се от макроелементи, всеки макроелемент се състои от елементите $K_i \in \tau_h,\ i = 1, 2, 3, 4$. Степените на свобода на всеки такъв макроелемент са интегралните стойности върху страните на всеки от влизащите в това групиране елементи.

Нека $\widetilde{V}_{2h}$ е крайноелементното функционално пространство, породено от разделянето $\widetilde{\tau}_{2h}$. Един възможен избор за $\widetilde{V}_{2h}$ е да съдържа полиноми от $P_{\widetilde{K}}$, където $\widetilde{K} = \cup_{i=1}^4 K_i$ е от $\widetilde{\tau}_{2h}$, като

$$P_{\widetilde{K}} = \mathcal{P}_2 + \text{span}\left\{\lambda_i^2 \lambda_j - \lambda_i \lambda_j^2,\ i, j = 1, 2, 3;\ i < j\right\},$$

и $\lambda_s,\ s = 1, 2, 3$ са барицентричните координати на $\widetilde{K}$.

Очевидно $\mathcal{P}_2 \subset P_{\widetilde{K}} \subset \mathcal{P}_3$.

Интерполационният оператор $I_{2h} : V_h \to \widetilde{V}_{2h}$ се характеризира с условията по страните, определени със степените на свобода за произволен елемент $\widetilde{K} \in \widetilde{\tau}_{2h}$. Той е конструиран така, че

$$I_{2h} \circ i_h = I_{2h}, \tag{3.16}$$

Освен това, операторът $I_{2h} :\ V_h \to \widetilde{V}_{2h}$ е очевидно ограничен. Следователно

$$\|I_{2h} v_h\|_{r,h} \le C \|v_h\|_{r,h}, \quad \forall v_h \in V_h,\ r = 0, 1. \tag{3.17}$$

Имайки предвид, че интерполационният полином $I_{2h} v_{|_K}$ принадлежи на множеството от полиноми $P_{\widetilde{K}}$, то за всяко $v \in H^3(\Omega) \cap V$ ще следва, че [57]

$$\|I_{2h} v - v\|_{1,h} \le Ch^2 \|v\|_{3,\Omega}. \tag{3.18}$$

Следващата теорема съдържа основната оценка, която е от тип суперсходимост.

Теорема 3.3 *Нека решението на (3.2) е от пространството $H^3(\Omega) \cap V$. Тогава при прилагане на апостериорната процедура за неконформните C-R елементи се получава оценката*

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{1,h} \leq Ch^2 \|u\|_{3,\Omega}. \tag{3.19}$$

Доказателство. Най-напред ще използваме (3.16):

$$I_{2h} \circ R_h u - u = I_{2h} \circ (R_h u - i_h u) + (I_{2h} u - u).$$

От (3.17) получаваме

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{1,h} \leq C\|R_h u - i_h u\|_{1,h} + \|I_{2h} u - u\|_{1,h}.$$

Накрая оценките (3.15) и (3.18) завършват доказателството.

■

Сега ще направим подобни разглеждания, когато τ_h се състои от EC-R елементи. Тук съществена роля ще играе резултатът от Теорема 3.2. При условията на тази теорема R_h ще съвпада с интегралния интерполационен оператор i_h. Това лесно следва от следните зависимости:

$$\begin{aligned} \alpha\|i_h u - R_h u\|_{1,h} &\leq a_h(i_h u - R_h u, i_h u - R_h u) \\ &= a_h(i_h u - u, \underbrace{i_h u - R_h u}_{\in V_h}) = 0. \end{aligned}$$

Ще приложим същото обединение в макроелементи, което е показано на Фиг. 3.5.

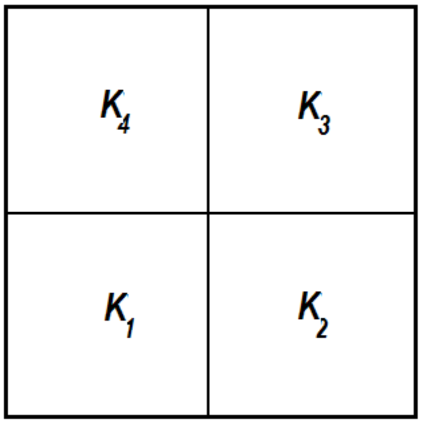
Степените на свобода на кой да е макроелемент $\widetilde{K} = \cup_{i=1}^{4}$ от $\widetilde{\tau}_{2h}$ избираме да съвпадат със степените на свобода на елементите $K_i \in \tau_h,\ i = 1, 2, 3, 4$, които го съставят, т.е. те са интегралните стойности на функция $v \in V$ върху страните $l_{ij},\ j = 1, 2, 3$ на елементите K_i и интегралните стойности на $v \in V$ върху $K_i,\ i = 1, 2, 3, 4$.

Нека $\widetilde{V}_{2h}$ е крайноелементното пространство, свързано с $\widetilde{\tau}_{2h}$ и $\widetilde{V}_{2h}$ да съдържа по части полиномиални функции, принадлежащи на $P_{\widetilde{K}}$. Ясно е, че $P_{\widetilde{K}}$ трябва да бъде конструирано така, че да бъде подпространство на $\mathcal{P}_4$. Известно е, че $\dim \mathcal{P}_4 = 15$, докато броят на степените на свобода на $\widetilde{K}$ е 13. Ето защо два от мономите в $\mathcal{P}_4$ трябва да бъдат премахнати, или трябва да се подбере някаква тяхна линейна комбинация.

Един възможен избор на $P_{\widetilde{K}}$ е следният:

$$P_{\widetilde{K}} = \mathrm{span}\{1, x, y, x^2, y^2, xy, x^3, y^3, x^2y, xy^2, x^4, y^4, x^2y^2\}.$$

Това множество от степени на свобода е $P_{\widetilde{K}}-$унисолвентно.



Фигура 3.6: Макроелемент от четириъгълни крайни елементи

Очевидно

$$\mathcal{P}_3 \subset P_{\widetilde{K}} \subset \mathcal{P}_4. \tag{3.20}$$

А сега да разгледаме апостериорната процедура, предизвикана от използването на интерполирания EC-R елемент. Най-напред, интегралните степени на свобода и конструираният интерполационен оператор I_{2h} позволяват да твърдим, че са валидни зависимостите (3.16) и (3.17). От друга страна, принадлежността на $I_{2h}v_{|_{\widetilde{K}}}$ към множеството от полиноми (3.20) изисква съответната оптимална гладкост на точното решение.

Горните разсъждения ни поволяват да изкажем следното твърдение:

Теорема 3.4 *Нека сме използвали интерполирани неконформни EC-R елементи в апостериорната процедура за елиптичното уравнение (3.2) от втори ред. Ако точното решение принадлежи на пространството $H^4(\Omega) \cap V$, то*

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{1,h} \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega}. \tag{3.21}$$

Забележка 3.3 *Резултатът от Теорема 3.4, разбира се, включва и този от Теорема 3.3. Основният извод от оценките (3.21) и (3.19) е, че при използване на възстановяваща процедура с линейни неконформни методи разширеният (extended) триъгълен краен елемент дава с единица по-висок порядък на апроксимация. Това обаче е валидно при изискване на по-висока гладкост на точното решение.*

Да разясним как стои въпросът за съответните четириъгълни билинейни неконформни крайни елементи. Макроелементът ще се състои от 4 четириъгълни елемента (Фиг. 3.6). Крайноелементното пространство, свързано с конструирания макроелемент $\widetilde{K} = \cup_{i=1}^4 K_i$ ще означим с $\widetilde{V}_{2h}$. Разглежданията се отнасят както за елемента Q_1^{rot}, така и за EQ_1^{rot}.

Теорема 3.5 *Ако $\widetilde{V}_{2h}$ съдържа полиномите от $\mathcal{Q}_2$, то множеството от степените на свобода не е $P_{\widetilde{K}}-$унисолвентно.*

Доказателство. Най-напред да разгледаме случая за елемента Q_1^{rot}. При макроелемент от 4 $Q_1^{rot}-$елемента (Фиг. 3.6) броят на степените на свобода е 12. Следователно, ако $\widetilde{V}_{2h}$ съдържа $\mathcal{Q}_2$, то

$$P_{\widetilde{K}} = \mathcal{Q}_2 + \operatorname{span}\{m_1(x,y), m_2(x,y), m_3(x,y)\},$$

където $m_i(x,y),\ i=1,2,3$ са мономи (или линейни комбинации от мономи) от степен, по-висока от втора относно някоя от променливите.

Като отчетем, че $\mathcal{Q}_2 = \operatorname{span}\{1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$, пресмятаме стойностите на всички мономи от $P_{\widetilde{K}}$ за степените на свобода на макроелемента $\widetilde{K}$:

$$A(Q_1^{rot}) = \begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1^1 & k_2^1 & k_3^1 \\
1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \\
1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & k_1^3 & k_2^3 & k_3^3 \\
1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & 1 & \frac{7}{3} & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & k_1^4 & k_2^4 & k_3^4 \\
1 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & \frac{1}{3} & 4 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{4}{3} & k_1^5 & k_2^5 & k_3^5 \\
1 & \frac{3}{2} & 2 & 3 & \frac{7}{3} & 4 & \frac{14}{3} & 6 & \frac{28}{3} & k_1^6 & k_2^6 & k_3^6 \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & k_1^7 & k_2^7 & k_3^7 \\
1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{3} & 0 & 0 & 0 & k_1^8 & k_2^8 & k_3^8 \\
1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & k_1^9 & k_2^9 & k_3^9 \\
1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{3} & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & k_1^{10} & k_2^{10} & k_3^{10} \\
1 & 2 & \frac{1}{2} & 1 & 4 & \frac{1}{3} & 2 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & k_1^{11} & k_2^{11} & k_3^{11} \\
1 & 2 & \frac{3}{2} & 3 & 4 & \frac{7}{3} & 6 & \frac{14}{3} & \frac{28}{3} & k_1^{12} & k_2^{12} & k_3^{12}
\end{pmatrix},$$

където k_i^j са стойностите на мономите $m_i(x,y),\ i=1,2,3$ за $j-$тата степен на свобода, $j=1,2,\ldots,12$.

Множеството от степени на свобода ще е $P_{\widetilde{K}}-$унисолвентно, ако рангът на матрицата $A(Q_1^{rot})$ е равен на 12. Директното пресмятане обаче показва, че след Гаусова елиминация на първите 9 стълба се получава, че техният ранг е равен на 8, откъдето заключаваме, че

$$\operatorname{rank}\left(A(Q_1^{rot})\right) < 12.$$

Когато използваме елемент EQ_1^{rot}, броят на степените на свобода за макроелемента са 16. Ако $\widetilde{V}_{2h}$ съдържа $\mathcal{Q}_2$, то

$$P_{\widetilde{K}} = \mathcal{Q}_2 + \mathrm{span}\{m_1(x,y), m_2(x,y), m_3(x,y), m_4(x,y), m_5(x,y), m_6(x,y), m_7(x,y)\},$$

където $m_i(x,y),\ i = 1,\ldots,7$ са мономи (или линейни комбинации от мономи) от степен, по-висока от втора относно някоя от променливите.

Като съставим матрицата от стойностите на мономите от $P_{\widetilde{K}}$ за степените на свобода на макроелемента $\widetilde{K}$, ще получим:

$$A(EQ_1^{rot}) = \begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1^1 & k_2^1 & k_3^1 & k_4^1 & k_5^1 & k_6^1 & k_7^1 \\
1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & k_4^2 & k_5^2 & k_6^2 & k_7^2 \\
1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & k_1^3 & k_2^3 & k_3^3 & k_4^3 & k_5^3 & k_6^3 & k_7^3 \\
1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & 1 & \frac{7}{3} & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & k_1^4 & k_2^4 & k_3^4 & k_4^4 & k_5^4 & k_6^4 & k_7^4 \\
1 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & \frac{1}{3} & 4 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{4}{3} & k_1^5 & k_2^5 & k_3^5 & k_4^5 & k_5^5 & k_6^5 & k_7^5 \\
1 & \frac{3}{2} & 2 & 3 & \frac{7}{3} & 4 & \frac{14}{3} & 6 & \frac{28}{3} & k_1^6 & k_2^6 & k_3^6 & k_4^6 & k_5^6 & k_6^6 & k_7^6 \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & k_1^7 & k_2^7 & k_3^7 & k_4^7 & k_5^7 & k_6^7 & k_7^7 \\
1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{3} & 0 & 0 & 0 & k_1^8 & k_2^8 & k_3^8 & k_4^8 & k_5^8 & k_6^8 & k_7^8 \\
1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & k_1^9 & k_2^9 & k_3^9 & k_4^9 & k_5^9 & k_6^9 & k_7^9 \\
1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{3} & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & k_1^{10} & k_2^{10} & k_3^{10} & k_4^{10} & k_5^{10} & k_6^{10} & k_7^{10} \\
1 & 2 & \frac{1}{2} & 1 & 4 & \frac{1}{3} & 2 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & k_1^{11} & k_2^{11} & k_3^{11} & k_4^{11} & k_5^{11} & k_6^{11} & k_7^{11} \\
1 & 2 & \frac{3}{2} & 3 & 4 & \frac{7}{3} & 6 & \frac{14}{3} & \frac{28}{3} & k_1^{12} & k_2^{12} & k_3^{12} & k_4^{12} & k_5^{12} & k_6^{12} & k_7^{12} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & k_1^{12} & k_2^{13} & k_3^{13} & k_4^{13} & k_5^{13} & k_6^{13} & k_7^{13} \\
1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{7}{9} & k_1^{14} & k_2^{14} & k_3^{14} & k_4^{14} & k_5^{14} & k_6^{14} & k_7^{14} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{7}{9} & k_1^{15} & k_2^{15} & k_3^{15} & k_4^{15} & k_5^{15} & k_6^{15} & k_7^{15} \\
1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{4} & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{49}{9} & k_1^{16} & k_2^{16} & k_3^{16} & k_4^{16} & k_5^{16} & k_6^{16} & k_7^{16}
\end{pmatrix},$$

където с k_i^j са означени стойностите на мономите $m_i(x,y),\ i = 1,\ldots,7$ за $j-$тата степен на свобода, $j = 1,2,\ldots,16$.

По същия начин, както за случая на Q_1^{rot} елемент се получава, че

$$\operatorname{rank}\left(A(EQ_1^{rot})\right) < 16.$$

$\blacksquare$

Резултатът от тази теорема показва, че конструирането на макроелементи на базата на Q_1^{rot} или EQ_1^{rot} неконформни крайни елементи не е оправдано. Това е така, защото за съответното полиномиално пространство $P_{\widetilde{K}}$ няма вариант, при който то да съдържа $\mathcal{Q}_2$. Това означава, че (поне на теория) подобна процедура не би довела до твърдения и оценки, аналогични на тези от Теорема 3.3 и Теорема 3.4, а следователно и до подобряване на скоростта на сходимост.

Забележка 3.4 *Въпреки резултата, доказан в Теорема 3.5 за елементите Q_1^{rot} и EQ_1^{rot}, трябва да отбележим едно тяхно полезно приложение. Те са изключително подходящи например за решаване на задачите, разгледани в Глава 2, които най-често са върху правоъгълни области (пластини). Използването им за задачи от такъв тип е мотивирано от факта, че интегралните степени на свобода дават добра интерпретация на нелокални условия (от интегрален тип), а ниската степен на използваните полиноми ги прави предпочитани пред съответните конформни крайни елементи с интегрални степени на свобода.*

3.4 Неконформен МКЕ за спектрални задачи от втори ред – ускоряване на сходимостта

В този параграф разглеждаме задачата: Търсим ненулева функция $u \in H_0^1(\Omega)$ и число λ такива, че

$$a(u, v) = \lambda(u, v) \quad \forall v \in V, \tag{3.22}$$

където $a-$формата е същата, както в предходния параграф.

Тази задача ще решаваме числено с триъгълни неконформни крайни елементи C-R или EC-R. Тези елементи съставят крайноелементното пространство V_h. Тогава чрез неконформен МКЕ ще апроксимираме решението (λ, u) на задача (3.22). Търсим $\lambda_h \in \mathbf{R}$ и функция $u_h \in V_h$ такива, че

$$a_h(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.23}$$

Целта на този параграф е да подобрим оптималните оценки за собствените стойности и собствените функции, които се отнасят за линейни (билинейни) крайни елементи [38]. Най-напред ще използваме съществено резултатите от предходния § 3.3. Това означава, че за задача (3.23) прилагаме възстановяващата апостериорна процедура чрез макроелементи.

За това, което следва, ще въведем целочисления параметър s, като $s = 3$ при използване на неконформния елемент C-R, а $s = 4$ когато използваме EC-R.

И така, ако точната собствена функция $u(x)$ принадлежи на $H^{s-1}(\Omega) \cap V$, то оптималната оценка в енергетична норма (виж [38]) е от ред $\mathcal{O}(h^{s-2}),\ s = 3, 4$. Но ако $u \in H^s(\Omega) \cap V$, то $R_h u$ е суперблизка до съответната приближена собствена функция [6], т.е.

$$\|u_h - R_h u\|_{1,h} \leq C h^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}, \quad s = 3, 4. \tag{3.24}$$

За нашия основен резултат ще е необходима още една оценка [6, 96]. Ако въведем функционалното пространство $W_h = V_h + V$, то за всяка функция $w_h \in W_h$, $w_h \neq 0$ е изпълнено

$$\left| \frac{a(w_h, w_h)}{(w_h, w_h)} - \lambda \right| \leq C \frac{\|w_h - u\|_{1,h}^2}{(w_h, w_h)}, \tag{3.25}$$

където (λ, u) е произволно решение на (3.22).

Сега ще направим едно красиво приложение на Теорема 3.3 и Теорема 3.4 от предходния параграф.

Теорема 3.6 *Нека (λ, u) е точно решение на спектралната задача (3.22), като $u \in H^s(\Omega) \cap V,\ s = 3, 4$. Ако u_h е съответната приближена собствена функция, получена при използване на крайни елементи C-R или EC-R, то след прилагане на апостериорното обединение на тези елементи, описано в § 3.4, получаваме следните оценки от тип суперсходимост (ултрасходимост):*

$$\|I_{2h} u_h - u\|_{1,h} \leq C h^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}, \tag{3.26}$$

$$\left| \frac{a(I_{2h} u_h, I_{2h} u_h)}{(I_{2h} u_h, I_{2h} u_h)} - \lambda \right| \leq C h^{2s-2} \|u\|_{s,\Omega}^2. \tag{3.27}$$

Доказателство. Най-напред ще докажем оценката (3.26):

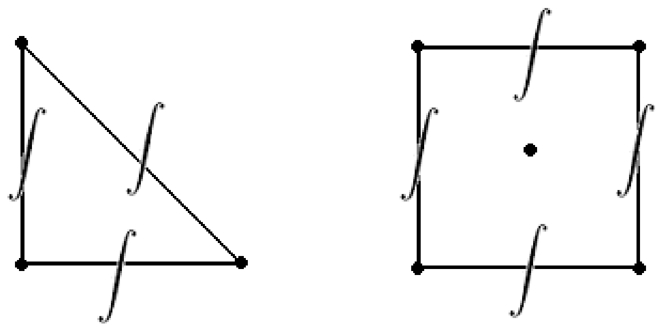
$$\begin{aligned} \|I_{2h} u_h - u\|_{1,h} &\leq \|I_{2h} u_h - I_{2h} \circ R_h u\|_{1,h} + \|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{1,h} \\ &\leq \|I_{2h}\| \, \|u_h - R_h u\|_{1,h} + \|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{1,h}. \end{aligned}$$

Операторът $I_{2h} : V_h \to \widetilde{V}_{2h}$ трансформира едно крайномерно пространство в друго. От компактността на този оператор следва, че

$$\|I_{2h}\| \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{\|I_{2h} v_h\|_{1,h}}{\|v_h\|_{1,h}} \leq \text{const}.$$

От (3.24) и Теорема 3.3/Теорема 3.4 ще получим оценката (3.26).

За да получим оценката за собствените стойности (3.27), ще използваме (3.25) и доказаната вече оценка (3.26):



Фигура 3.7: Допълване на неконформните елементи от V_h до квадратични/биквадратични елементи от $\widetilde{V}_h$

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_h(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)}{(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)} - \lambda\right| &\leq C\frac{\|I_{2h}u_h - u\|_{1,h}^2}{\|I_{2h}u_h\|_{0,\Omega}} \\ &\leq Ch^{2s-2}\|u\|_{s,\Omega},\ s = 3, 4.\end{aligned}$$

■

А сега ще представим един коренно различен подход за ускоряване на сходимостта при апроксимиране на собствените стойности. Методът е приложим за всеки от четирите неконформни крайни елемента, които бяха разгледани в § 3.2 и § 3.3. Това означава, че независимо кой от крайните елементи използваме, след апостериорна процедура ще ускорим сходимостта за собствените стойности с две единици, т.е. ще получим порядък $\mathcal{O}(h^4)$ вместо $\mathcal{O}(h^2)$ при една и съща предполагаема гладкост на съответната точна собствена функция.

Основна стъпка в нашите изследвания е да разширим крайноелементното пространство от V_h до $\widetilde{V}_h$, в което са добавени като възли точките от върховете на елементите (Фиг. 3.7).

И така, ако (λ_h, u_h) е някое приближено решение на (3.23) при използване на линейни/билинейни неконформни елементи от интегрален тип или техните разширения, то може да използваме вече намерената функция u_h при решаване на следната елиптична задача чрез квадратични/биквадратични крайни елементи:

$$a(\widetilde{u}_h, v_h) = (u_h, v_h) \quad \forall v_h \in \widetilde{V}_h. \tag{3.28}$$

Тъй като методът в задача (3.28) е конформен МКЕ, то в (3.28) записахме $a(\cdot,\cdot)$ вместо $a_h(\cdot,\cdot)$.

Нека да пресметнем числото

$$\widetilde{\lambda}_h = \frac{1}{(\widetilde{u}_h, u_h)},$$

където u_h и $\widetilde{u}_h$ са съответно решения на (3.23) и (3.28).

Теорема 3.7 *Нека λ е точна собствена стойност на (3.22), като съответната собствена функция u принадлежи на $H^3(\Omega) \cap V$. Нека при това u и съответното приближение от (3.23) са нормирани: $\|u\|_{0,\Omega} = \|u_h\|_{0,\Omega} = 1$. Тогава*

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq Ch^4. \tag{3.29}$$

Доказателство. По аналогия с елиптичната задача (3.28) да дефинираме нейния непрекъснат аналог:

$$a(\widetilde{u}, v) = (u_h, v) \quad \forall v \in V,$$

където u_h е решение на задача (3.23).

Макар, че решението $\widetilde{u}$ на тази задача на практика не може да бъде намерено, то формално можем да въведем числото

$$\widetilde{\lambda} = \frac{1}{(\widetilde{u}, u_h)}.$$

При условията на теоремата може да бъде доказана оценката (виж напр. [116])

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}| = \mathcal{O}(\|u - u_h\|^2_{0,\Omega}).$$

При предположение за регулярност на u_h и от гладкостта на точното решение u следва оценка от тип суперсходимост:

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}| \leq Ch^4 \|u\|^2_{2,\Omega}. \tag{3.30}$$

Сега ще оценим $|\widetilde{\lambda} - \widetilde{\lambda}_h|$. От дефинициите на $\widetilde{\lambda}$ и $\widetilde{\lambda}_h$ получаваме

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_h} = (\widetilde{u}, u_h) - (\widetilde{u}_h, u_h) = a(\widetilde{u}, \widetilde{u}) - a(\widetilde{u}_h, \widetilde{u}_h).$$

Тук използваме съществено включването

$$\widetilde{u}_h \in \widetilde{V}_h \subset V,$$

което ни позволява да запишем, че

$$a(\widetilde{u} - \widetilde{u}_h, \widetilde{u}_h) = 0.$$

Тогава

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\widetilde{\lambda}} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_h} &= a(\widetilde{u} - \widetilde{u}_h, \widetilde{u}) + a(\widetilde{u}_h, \widetilde{u}) - a(\widetilde{u}_h, \widetilde{u}_h) - 2a(\widetilde{u} - \widetilde{u}_h, \widetilde{u}_h) \\
&= a(\widetilde{u} - \widetilde{u}_h, \widetilde{u}) - a(\widetilde{u} - \widetilde{u}_h, \widetilde{u}_h) = a(\widetilde{u} - \widetilde{u}_h, \widetilde{u} - \widetilde{u}_h).
\end{aligned}$$

Непрекъснатостта на билинейната $a-$форма ни позволява да заключим, че

$$|\widetilde{\lambda} - \widetilde{\lambda}_h| \leq C\|\widetilde{u} - \widetilde{u}_h\|^2_{1,\Omega}.$$

Тъй като използваният (конформен) метод е с квадратични/биквадратични крайни елементи, то

$$|\widetilde{\lambda} - \widetilde{\lambda}_h| \leq Ch^4\|\widetilde{u}\|^2_{3,\Omega},$$

което заедно с (3.30) и неравенството на триъгълника доказва оценката (3.29).

■

Доказаната теорема ни дава основание да запишем следния апостериорен алгоритъм:

Алгоритъм 3.1

1. Да се реши приближената спектралната задача с неконформни крайни елементи, разгледани в § 3.2.

2. Да се реши съответната елиптична задача с дясна част – намереното решение u_h, но върху крайноелементното пространство $\widetilde{V}$ (конформен МКЕ).

3. След намиране на решението $\widetilde{u}_h$, да се пресметне

$$\widetilde{\lambda}_h = \frac{1}{(\widetilde{u}_h, u_h)}.$$

Намереното приближение дава с два порядъка по-висока точност, ако решението u на (3.22) е от $H^3(\Omega)$.

Забележка 3.5 *Алгоритъмът дава проста процедура за ускоряване на сходимостта на приближените собствени стойности. Подобен подход приложихме в Глава 1 при смесения метод за задача от четвърти ред, но с конформни елементи. Тук обаче е важно да подчертаем следните особености, характерни за неконформния случай:*

- *Не бихме могли да сгъстяваме мрежата за решаване на задача (3.28) със същите елементи ($h-$метод);*

- *Също така, невъзможно е увеличаване на степента на неконформните елементи в прилагане на алгоритъма за елиптичната задача ($p-$метод).*

Единствената възможност е да работим с пространството $\widetilde{V}_h$, осъществяващо конформен МКЕ.

3.5 Неконформен МКЕ с четириъгълен краен елемент на Morley за елиптична задача от четвърти ред

Мотивацията за конструиране, анализ и използване на неконформен МКЕ за задачи от четвърти ред е много по-основателна от тази при задачи от втори ред. Конформният метод изисква наличие на C^1-елементи, т.е. такива, които осигуряват непрекъснатост на апроксимиращите функции и на първите им производни върху общата граница на съседни елементи. Това твърде ограничително изискване налага при дву- и тримерните задачи крайноелементното пространство да се съдържа в $H^2(\Omega)$ [56]. Като следствие се получава, че най-ниската възможна степен на апроксимиращите полиноми е трета. Ермитовите крайни елементи в конформния метод за задачи от четвърти ред имат за степени на свобода стойностите на производни (много често производни по посока) във възли на елемента [48]. За да се намали размерността на крайноелементното пространство, освен смесен метод се използват и C^0-неконформни крайни елементи. Наличието на втори производни в билинейната $a-$форма отново провокира използване на стойности на производните като степени на свобода, което от своя страна би могло да доведе до нееднинственост на неконформния елемент от даден вид.

В този параграф ще анализираме един четириъгълен неконформен елемент на Morley за задачи от четвърти ред. Съществуват няколко аналога на триъгълника на Morley [107] от правоъгълен тип (виж напр. [136, 137, 146]). Тези елементи, които се използват за елиптични задачи от четвърти ред, са от възможно най-ниска степен [138]. Нека все пак да припомним, че простотата и ниската размерност на крайноелементното пространство са едни от съществените параметри при избор на метод за инженерни пресмятания.

Нашият анализ ще бъде извършен върху следната бихармонична моделна задача в равнината:

$$\Delta^2 u = f \quad \text{в } \Omega, \tag{3.31}$$

с хомогенни гранични условия

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{върху } \partial\Omega, \tag{3.32}$$

като $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ означава производна по външната нормала.

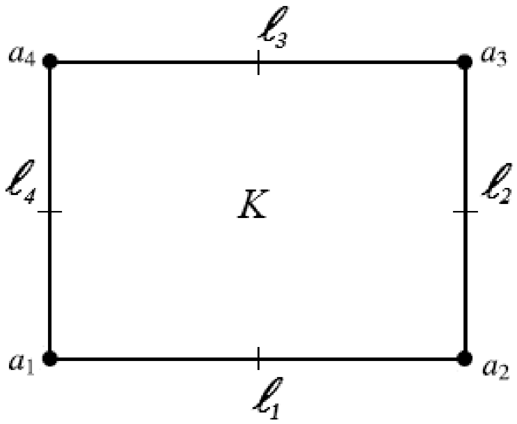
Като се има предвид, че задача (3.31), (3.32) моделира натоварена тънка еластична плоча, то ще предполагаме, че двумерната област Ω е правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси.

Вариационната задача, свързана с (3.31), (3.32), е:

$$a(u, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V, \tag{3.33}$$

където $V = H_0^2(\Omega)$ и

$$a(u, v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx \qquad \forall u, v \in V.$$



Фигура 3.8: Правоъгълник на Morley

Очевидно билинейната $a-$форма е симетрична и $V-$елиптична.

Ще покрием $\overline{\Omega}$ с правоъгълници за триангулациите τ_h, т.е. $\tau_h = \bigcup_i K_i$, като τ_h удовлетворява стандартните изисквания за квазиравномерност [56] и $h = \max_i h_i$ е мрежовият параметър.

На разделянето τ_h съответства крайноелементното пространство V_h, получено посредством четириъгълници на Morley (Фиг. 3.8).

Нека $K \in \tau_h$ е правоъгълник с върхове a_j и страни $l_j,\ j = 1, 2, 3, 4$ (виж напр. [136, 146]).

Ще изберем следното множество от степени на свобода (v е пробна функция): $v(a_j)$ и $\displaystyle\int_{l_j} \frac{\partial v}{\partial \nu}\, dl,\ j = 1, 2, 3, 4.$

Съществуват няколко варианта за избор на полиномиалното множество P_K, а именно:

- $P_K^{(1)} = \mathcal{P}_2 + \mathrm{span}\{x^3, y^3\}$ (виж [146]);
- $P_K^{(2)} = \mathcal{P}_2 + \mathrm{span}\{x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y\}$ (виж напр. [72, 108]);
- $P_K^{(3)} = \mathcal{P}_2 + \mathrm{span}\{x(1-x)(\frac{1}{2} - x), y(1-y)(\frac{1}{2} - y)\}$, разгледано в [110].

По този начин $\mathcal{P}_2 \subset P_K^{(i)},\ i = 1, 2, 3$. Очевидно, множеството от степените на свобода е P_K-унисолвентно.

Приближението на вариационната задача (3.33) е: да се намери функция $u_h \in V_h$ такава, че

$$a_h(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3.34}$$

където

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \Delta u_h \Delta v_h \, dx.$$

Както обикновено за неконформния МКЕ, върху V_h дефинираме полунорма

$$\|v_h\|_h = \left(\sum_{K \in \tau_h} |v_h|^2_{2,K} \right)^{1/2} \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Тогава, за $v \in V = H_0^2(\Omega)$ имаме, че $\|v\|_h = |v|_{2,\Omega}$. За разглежданата област (правоъгълна плоча със страни, успоредни на координатните оси) следва, че $\|\cdot\|_h$ е норма във V_h.

Ако $v \in L_2(\Omega)$ и $v_{|_K} \in H^m(K)$, то за всяко естествено число m дефинираме:

$$\|v\|_{m,h} = \left\{ \sum_{K \in \tau_h} \|v\|^2_{m,K} \right\}^{1/2}.$$

Въвеждаме интерполационен оператор i_h върху елемента $K \in \tau_h$ посредством:

$$i_h u(a_j) = u(a_j),$$

$$\int_{l_j} \frac{\partial i_h u}{\partial \nu}\, dl = \int_{l_j} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

където a_j и l_j са съответно върховете и страните на правоъгълника $K \in \tau_h$ и $i_h u \in P_K^{(i)}$.

Ще докажем едно свойство на правоъгълния аналог на елемента на Morley:

Лема 3.2 *Нека крайноелементното пространство V_h е породено от полиномиалното множество $P_K^{(2)}$.*

Тогава за произволна функция $u \in H_0^2(\Omega)$

$$a_h(u - i_h u, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.35}$$

Доказателство. Нека първо да подчертаем факта, че $x^3 - 3xy^2$ и $y^3 - 3x^2 y$ са единствените полиноми от степен, не по-малка от 3, които са хармонични функции.

Тогава $\Delta v_{h|_K} = \text{const}$. Така получаваме

$$\begin{aligned} a_h(u - i_h u, v_h) &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \Delta(u - i_h u) \Delta v_h \, dx \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \Delta v_{h|_K} \int_K \Delta(u - i_h u)\, dx. \end{aligned}$$

Използвайки формулата на Green и спазвайки положителна посока на интегриране по затворен контур, ще получим:

$$a_h(u - i_h u, v_h) = \sum_{K\in\tau_h} \Delta v_{h|_K} \oint_{\partial K} \frac{\partial(u - i_h u)}{\partial\nu}\, dl$$

$$= \sum_{K\in\tau_h} \Delta v_{h|_K} \left(\int_{l_1} - \int_{l_3}\right) \frac{\partial(u - i_h u)}{\partial y}\, dx + \left(\int_{l_2} - \int_{l_4}\right) \frac{\partial(u - i_h u)}{\partial x}\, dy = 0.$$

■

Следващата теорема съдържа основния резултат в този параграф. Ще докажем реда на сходимост при използване на правоъгълни елементи на Morley, когато $P_K = P_K^{(2)}$.

Теорема 3.8 *Нека τ_h е регулярно разделяне на Ω чрез правоъгълни елементи със страни, успоредни на координатните оси. Нека също V_h да е пространството, използвано в Лема 3.2. Ако u и u_h са решенията съответно на задача (3.33) и (3.34) и $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, то*

$$\|u - u_h\|_h \le Ch\|u\|_{4,\Omega}.$$

Доказателство. Основно средство при доказателството ще е втората лема на Strang [56]. Ако билинейната форма $a_h(\cdot,\cdot)$ е непрекъсната и V_h- елиптична, то съществува константа C, независеща от мрежовия параметър h, така че

$$\|u - u_h\|_h \le C\left\{\inf_{v_h\in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{v_h\in V_h} \frac{|(f, v_h) - a_h(u, v_h)|}{\|v_h\|_h}\right\}. \qquad (3.36)$$

Тъй като $i_h u \in V_h$, то за първото събираемо в дясната страна на (3.36) имаме:

$$\inf_{v_h\in V_h} \|u - v_h\|_h \le |u - i_h u|_{2,h} = \left\{\sum_{K\in\tau_h} |u - i_h u|_{2,K}^2\right\}^{1/2}.$$

Като отчетем (3.35) и използваме локално неравенството на Poincaré за $L_2(\Omega)$ [90]), получаваме:

$$|u - i_h u|_{2,K} \le Ch|u|_{4,K},$$

следователно

$$\inf_{v_h\in V_h} \|u - v_h\|_h \le Ch|u|_{4,\Omega}. \qquad (3.37)$$

За да оценим второто събираемо в дясната страна на (3.36), въвеждаме следното означение:

$$E_h(u, v_h) = (f, v_h) - a_h(u, v_h)$$

за $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $v_h \in V_h$.

За произволна функция $v_h \in V_h$ вземаме редица $\{v_{h,n}\}$ от достатъчно гладки функции, която клони към v_h в $H_0^1(\Omega)$ и чиито функции клонят към нула за степените на свобода на v_h върху границата $\partial\Omega$.

Следователно, от формулата на Green се получава

$$\int_\Omega f v_{h,n}\,dx\,dy = \int_\Omega \Delta u \Delta v_{h,n}\,dx\,dy = -\int_\Omega (\mathrm{grad}\Delta u)\,(\mathrm{grad} v_{h,n})\ dx\,dy.$$

Понеже интегралите в равенствата са непрекъснати линейни функционали в $L_2(\Omega)$, които са равни на нула върху $\partial\Omega$, то можем да извършим граничен преход и за произволна функция $v_h \in V_h$ да получим:

$$(f, v_h) = \int_\Omega f v_h\,dx\,dy = -\int_\Omega (\mathrm{grad}\Delta u)\,(\mathrm{grad} v_h)\ dx\,dy. \tag{3.38}$$

От друга страна, отново да използваме формулата на Green:

$$\begin{aligned} a_h(u, v_h) &= \sum_{K\in\tau_h} \int_K \Delta u \Delta v_h\,dx\,dy \\ &= \sum_{K\in\tau_h} \left[-\int_K \mathrm{grad}\Delta u\ \mathrm{grad} v_h\,dx\,dy + \oint_{\partial K} \Delta u \frac{\partial v_h}{\partial \nu_K}\,dl\right]. \end{aligned}$$

Заместваме това равенство и (3.38) в дефиницията за $E_h(u, v_h)$ и получаваме:

$$E_h(u, v_h) = -\sum_{K\in\tau_h} \oint_{\partial K} \Delta u \frac{\partial v_h}{\partial \nu_K}\,dl. \tag{3.39}$$

Сега ще оценим дясната страна на (3.39), като предварително ще трансформираме интеграла върху ∂K.

Най-напред, за произволно $K \in \tau_h$ да положим

$$\varphi = -\Delta u \quad \text{и} \quad w = \frac{\partial v_h}{\partial x_j},\ j = 1, 2,$$

като $\varphi \in H^2(\Omega)$, защото $u \in H^4(\Omega)$ и $v_h \in P$, където P е рестрикцията на P_K върху страна на K.

Разглеждаме билинейната форма (виж Фиг. 3.8)

$$\delta_{j,K}(\varphi, w) = \left(\int_{l_j} - \int_{l_{j+2}}\right)(\varphi w)\,dl, \quad j = 1, 2.$$

Нека $\widehat{K}$ е основен краен елемент (единичният квадрат) и знакът $\widehat{\cdot}$ отразява пресмятания и функции, дефинирани върху $\widehat{K}$. Така чрез най-проста (афинна) трансформация на променливите имаме:

$$\delta_{j,K}(\varphi, w) = h_i \delta_{j,\widehat{K}}(\widehat{\varphi}, \widehat{w}), \tag{3.40}$$

където $h_i,\ i = 1,2,\ i \neq j$ е дължината на l_j (и на l_{j+2}), $j = 1, 2$.

Лесно се вижда, че

$$\delta_{j,\widehat{K}}(\widehat{\varphi}, \widehat{w}) = 0 \quad \text{за} \ \ \widehat{\varphi} \in \mathcal{P}_0,\ \widehat{w} \in \widehat{P}.$$

Да отбележим още, че билинейната форма $\delta_{j,\widehat{K}}$ е непрекъсната. Действително ($j = 1, 2$),

$$\left|\delta_{j,\widehat{K}}(\widehat{\varphi}, \widehat{w})\right| \leq C \|\widehat{\varphi}\|_{0,\partial\widehat{K}} \|\widehat{w}\|_{0,\partial\widehat{K}}.$$

От теоремата за следата (виж напр. [56]) следва, че:

$$\left|\delta_{j,\widehat{K}}(\widehat{\varphi}, \widehat{w})\right| \leq C \|\widehat{\varphi}\|_{1,\widehat{K}} \|\widehat{w}\|_{1,\widehat{K}}.$$

Сега да приложим билинейната лема [48, 57] към билинейната форма $\delta_{j,\widehat{K}}$, за да получим

$$\left|\delta_{j,\widehat{K}}(\widehat{\varphi}, \widehat{w})\right| \leq C \left|\widehat{\varphi}\right|_{1,\widehat{K}} \left|\widehat{w}\right|_{1,\widehat{K}}. \tag{3.41}$$

Но за афинната трансформация $\widehat{K} \to K$ сме използвали неособена матрица B_K, т.е.

$$\left|\widehat{\varphi}\right|_{1,\widehat{K}} \leq C \|B_K\| \ \left|\det B_K\right|^{-1/2} \left|\varphi\right|_{1,K},$$

$$\left|\widehat{w}\right|_{1,\widehat{K}} \leq C \|B_K\| \ \left|\det B_K\right|^{-1/2} \left|w\right|_{1,K}.$$

Оценката за нормата на матрицата е $\|B_K\| \leq C h_K$, като

$$\left|\det B_K\right| = \mathrm{meas}(K)/\mathrm{meas}(\widehat{K}) \geq C \rho_K^2,$$

където ρ_K е радиусът на вписаната в K окръжност, така че $h_K/\rho_K \leq \mathrm{const}$. Да отбележим също, че $h_j \leq h_K,\ j = 1, 2$.

Следователно, от (3.40) и (3.41) получаваме

$$|\delta_{j,K}(\varphi, w)| \leq C h_K \|u\|_{4,K} \|v_h\|_{2,K}, \quad j = 1, 2.$$

Тези неравенства водят до оценката

$$|(f, v_h) - a_h(u, v_h)| \leq C h \|u\|_{4,\Omega} \|v_h\|_h. \tag{3.42}$$

За да завършим доказателството, е необходимо само да заместим (3.37) и (3.42) в (3.36).

■

Забележка 3.6 *Аналогична оценка за триъгълник на Morley е получена от Lascaux и Lesaint (виж [90], Теорема 3.1), докато за четириъгълен аналог на елемент на Morley за полиномиално пространство* $P_K = P_K^{(1)}$ *сходимост е установена в [146], а за полиномиално пространство* $P_K = P_K^{(3)}$ *– в [110].*

Доказаният в Теорема 3.8 резултат има пряко приложение за бихармоничната спектрална задача.

Нейната съответна вариационна задача е: търсим $(\lambda, u) \in \mathbf{R} \times H_0^2(\Omega)$ така, че

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in V. \tag{3.43}$$

Ще определим съответната апроксимираща собствена двойка (λ_h, u_h), като използваме правоъгълен елемент на Morley. Тогава съответната на (3.43) задача е: търсим $(\lambda_h, u_h) \in \mathbf{R} \times V_h$ така, че

$$a_h(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.44}$$

Като се използва теорията за елиптичните разрешаващи оператори (виж напр. [117]), Теорема 3.8 ни позволява да формулираме следното твърдение:

Теорема 3.9 *Нека* $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ *и* $u_h \in V_h$ *са съответно собствените функции на задачи (3.43) и (3.44). Ако условията за разделяне на* Ω *с правоъгълни елементи на Morley, формулирани в Теорема 3.8, са изпълнени, то*

$$\|u - u_h\|_{2,h} \leq Ch\|u\|_{4,\Omega},$$

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^2\|u\|_{4,\Omega}^2.$$

Забележка 3.7 *Числовите резултати за спектрални задачи от четвърти ред с използване на правоъгълни крайни елементи на Morley показват, че апроксимирането на собствените стойности е отдолу [117]. Това забележително свойство на някои от неконформните елементи за спектрални задачи от четвърти ред ще бъде разгледано в § 3.7.*

Забележка 3.8 *Друг (интерполационно-еквивалентен) вариант за степени на свобода е (виж напр. [136]): функционалните стойности във върховете* $a_j,\ j = 1, 2, 3, 4$ *на правоъгълника* $K \in \tau_h$ *и нормалните производни в средите на страните* $l_j,\ j = 1, 2, 3, 4$ *(Фиг. 3.8) за произволна пробна функция* $v \in C^1(K), K \in \tau_h$.

3.6 Долни граници за собствените стойности за спектрални задачи от втори ред

Оценките отдолу на първите (основни) собствени стойности на елиптичните оператори имат важно практическо значение при оразмеряване на различни конструкции от инженерната практика [59, 132]. Важността на проблема се подсилва и от факта, че всеки конформен МКЕ дава винаги горна граница на точната стойност, понеже крайноелементното подпространство V_h се явява подпространство на V [38]. Ето защо усилията на много изследователи в последните години са насочени към неконформните методи с цел доказване на свойството "апроксимиране отдолу".

Този параграф дава два основни приноса в развитието на теорията на МКЕ в гореизложената задача:

- Представя достатъчно пълна картина на световното развитие при решаване на задачата за уравнение от втори ред;
- Доказва оценки отдолу, след прилагане на най-простите неконформни методи.

Изследванията ще извършим върху моделна задача от втори ред в нейната слаба формулировка: Търсим $\lambda \in \mathbf{R}$ и функция $u \in V \equiv H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{0,\Omega} = 1$, такива, че

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in V, \tag{3.45}$$

където

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

а Ω е полигонална област в равнината.

За неконформните методи, които разглеждаме, ще възприемем следните означения:

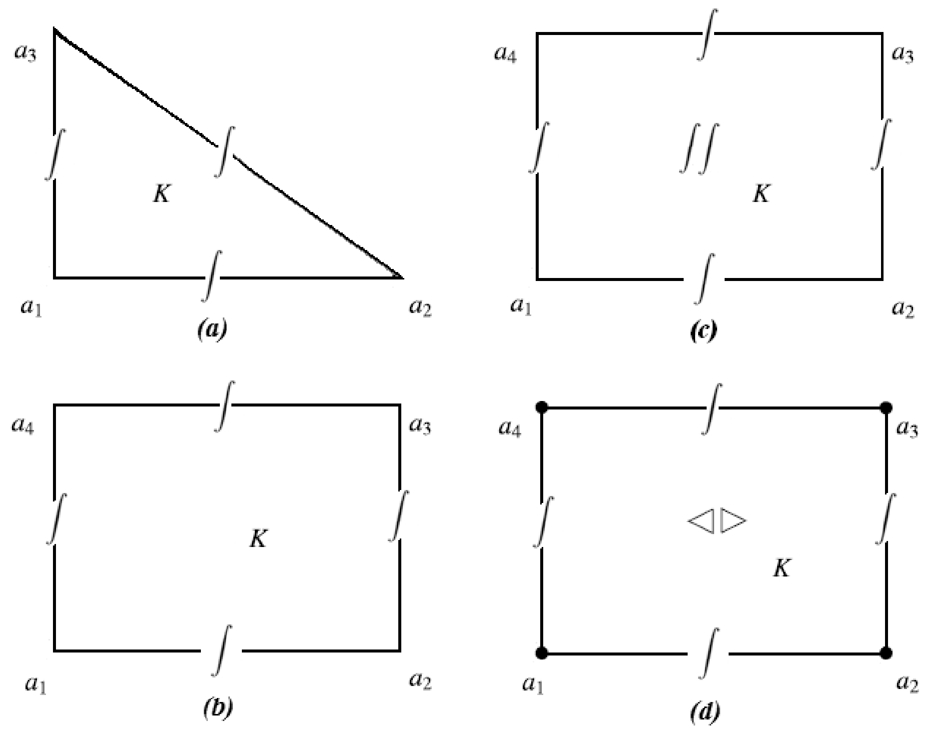
$$a_h(v, v) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla v \cdot \nabla v \, dx = |v|_{1,h}^2 = \|v\|_h^2. \tag{3.46}$$

По този начин, $\|\cdot\|_h$ е норма, свързана с a_h.

На задачата (3.45) съпоставяме нейната крайноелементна апроксимация с неконформни крайни елементи: Търсим $\lambda_h \in \mathbf{R}$ и функция $u_h \in V_h$, $u_h \neq 0$ такива, че

$$\begin{gathered} a(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \\ \|u_h\|_{0,\Omega} = 1. \end{gathered} \tag{3.47}$$

Пространството V_h се състои от такива неконформни елементи, които при определени условия апроксимират точните собствени стойности отдолу (Фиг. 3.9).



Фигура 3.9: Неконформни елементи за задачи от втори ред: (a) Елемент на Crouzeix-Raviart; (b) $Q_1^{rot}-$елемент; (c) $EQ_1^{rot}-$елемент; (d) Елемент на Wilson

Следващият резултат доказва асимптотична по h оценка отдолу на точните собствени стойности, когато се използват неконформни елементи на Crouzeix-Raviart (Фиг. 3.9(a)) и областта Ω е неизпъкнала.

Теорема 3.10 *Нека (λ_k, u_k) и $(\lambda_{k,h}, u_{k,h})$ са съответно решения на (3.45) и (3.47) за някое цяло положително k, като $u_k \in W^{2,1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ и a_h е определена от (3.46) посредством елементи на Crouzeix-Raviart, а областта Ω е неизпъкнала. Ако съществува константа C такава, че*

$$\|u_k - u_{k,h}\|_h \geq Ch^r, \tag{3.48}$$

където $r = \dfrac{\pi}{\omega}$, $\omega > \pi$ е максималният вътрешен за областта Ω ъгъл и собствените функции са ортонормирани $\|u_k\|_{0,\Omega} = \|u_{k,h}\|_{0,\Omega} = 1$, то за достатъчно малко h е валидна оценката

$$\lambda_{k,h} \leq \lambda_k. \tag{3.49}$$

Доказателство. Ще трансформираме разликата $\lambda_k - \lambda_{k,h}$, като използваме свойствата на билинейната форма $a_h(\cdot,\cdot)$ и на интерполационния оператор i_h (виж Теорема 3.1, равенство (3.5)).

Получаваме

$$
\begin{aligned}
\lambda_k - \lambda_{k,h} &= a_h(u_k - u_{k,h}, u_k - u_{k,h}) \\
&\quad +2a_h(u_k, u_{k,h}) - 2a_h(u_{k,h}, u_{k,h}) \\
&= \|u_k - u_{k,h}\|_h^2 + 2a_h(u_k - u_{k,h}, u_{k,h}) \\
&= \|u_k - u_{k,h}\|_h^2 + 2a_h(i_h u_k - u_{k,h}, u_{k,h}) \\
&= \|u_k - u_{k,h}\|_h^2 + 2\lambda_{k,h}(i_h u_k - u_{k,h}, u_{k,h}) \\
&= \|u_k - u_{k,h}\|_h^2 + \lambda_{k,h}(i_h u_k - u_{k,h}, u_{k,h} - i_h u_k) \qquad (3.50) \\
&\quad +\lambda_{k,h}(i_h u_k - u_{k,h}, i_h u_k) + \lambda_{k,h}(i_h u_k - u_{k,h}, u_{k,h}) \\
&= \|u_k - u_{k,h}\|_h^2 - \lambda_{k,h}\|i_h u_k - u_{k,h}\|_{0,\Omega}^2 \\
&\quad +\lambda_{k,h}(i_h u_k - u_{k,h}, i_h u_k + u_{k,h}) \\
&= \|u_k - u_{k,h}\|_h^2 - \lambda_{k,h}\|i_h u_k - u_{k,h}\|_{0,\Omega}^2 \\
&\quad +\lambda_{k,h}\left(\|i_h u_k\|_{0,\Omega}^2 - \|u_{k,h}\|_{0,\Omega}^2\right).
\end{aligned}
$$

Да означим с ω максималния вътрешен за областта Ω ъгъл. Тогава, очевидно, $\omega > \pi$ и са в сила следните оценки (виж [78, 79]):

$$
\begin{aligned}
\|u_k - u_{k,h}\|_h &\le Ch^r, \\
\|u_k - u_{k,h}\|_{0,\Omega} &\le Ch^{2r},
\end{aligned} \qquad (3.51)
$$

където $\dfrac{1}{2} < r = \dfrac{\pi}{\omega} < 1$.

Тъй като решението u_k принадлежи на Соболевото пространство $W^{2,1}(\Omega)$ и интегралните стойности на $u_k - i_h u_k$ върху страните на произволен елемент $K \in \tau_h$ са равни на нула, то от неравенството на Poincaré за този клас от функции следва [78]

$$\|u_k - i_h u_k\|_{L_1(K)} \le Ch\|\nabla u_k - \nabla i_h u_k\|_{L_1(K)}.$$

По същата причина

$$\|\nabla u_k - \nabla i_h u_k\|_{L_1(K)} \le Ch\|u_k\|_{W^{2,1}(K)},$$

така че

$$\|u_k - i_h u_k\|_{L_1(\Omega)} \le Ch^2\|u_k\|_{W^{2,1}(\Omega)}.$$

От това неравенство и от (3.51) получаваме

$$\|u_k - i_h u_k\|_{0,\Omega} \le Ch^{2r}. \qquad (3.52)$$

От друга страна

$$\|i_h u_k\|^2_{0,\Omega} - \|u_{k,h}\|^2_{0,\Omega} = \|i_h u_k\|^2_{0,\Omega} - 1 = \|i_h u_k\|^2_{0,\Omega} - \|u_k\|^2_{0,\Omega}.$$

Тогава ще получим оценката

$$\left|\|i_h u_k\|^2_{0,\Omega} - \|u_k\|^2_{0,\Omega}\right| \leq \int_\Omega |i_h u_k - u_k||i_h u_k + u_k|\, dx.$$

Функцията u_k е една ограничена, тъй като $u_k \in W^{2,1}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Но базисните функции на C-R елемента са също ограничени функции, следователно

$$\|i_h u_k\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C\|u_k\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

По този начин получаваме

$$\begin{aligned}
\left|\|i_h u_k\|^2_{0,\Omega} - \|u_k\|^2_{0,\Omega}\right| &\leq C\|u_k\|_{L_\infty(\Omega)}\|i_h u_k - u_k\|_{L_1(\Omega)} \\
&\leq Ch^2\|u_k\|_{W^{2,1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Окончателно, като използваме съществено условието (3.48), от последното неравенство и от (3.52) е ясно, че първото събираемо в дясната страна на (3.50) е по-голямо от сбора на останалите две, които са от ред съответно $\mathcal{O}(h^{4r})$ и $\mathcal{O}(h^2)$. Следователно, при достатъчно малко h, знакът на разликата $\lambda_k - \lambda_{k,h}$ се определя от $\|u_k - u_{k,h}\|^2_h$, което доказва неравенство (3.49).

■

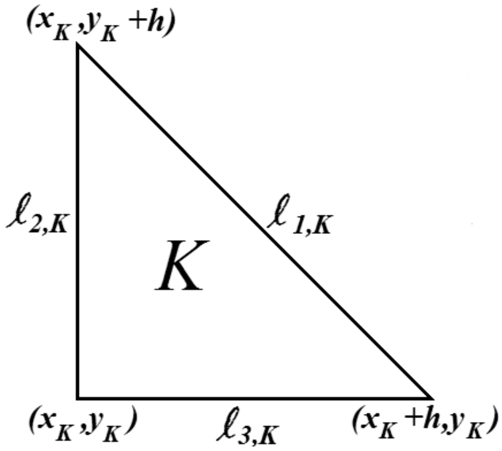
Следващата стъпка е да докажем, че (3.49), т.е. апроксимация отдолу за точните собствени стойности, е валидна за C-R елементите и когато областта Ω е изпъкнала. За тази цел са ни необходими два допълнителни резултата, които се съдържат в следващите две леми.

Лема 3.3 *Нека разделянето τ_h чрез неконформни C-R елементи е квазиравномерно. Тогава за произволен елемент $K \in \tau_h$ и всяка функция $z_h \in V_h$ такава, че $z_{h|_K} \neq const$, съществува константа C, за която*

$$\|z_h\|_{0,K} \leq Ch|z_h|_{1,K}. \tag{3.53}$$

Д о к а з а т е л с т в о. За по-просто представяне на резултата ще предполагаме, че K е правоъгълен равнобедрен триъгълник с катети, успоредни на координатните оси като част от равномерно разделяне τ_h (Фиг. 3.10).

Страните на K са $l_{j,K},\ j = 1,2,3,\ |l_{j,K}| \leq \sqrt{2}h,\ j = 1,2,3.$



Фигура 3.10: Елемент $K \in \tau_h$ със своите страни и координати на върховете

За произволна функция $z_h \in V_h$ означаваме

$$I_{j,K} = \int_{l_{j,K}} z_h \, dl, \quad j = 1, 2, 3.$$

Понеже за базисните функции върху K е изпълнено

$$\varphi_{i,K}(x,y).\varphi_{j,K}(x,y) = \frac{1}{6}\delta_{ij},$$

то пресмятаме:

$$\|z_h\|^2_{0,K} = \sum_{i,j=1}^{3} \varphi_{i,K}(x,y).\varphi_{j,K}(x,y) I_{i,K} I_{j,K} = \sum_{j=1}^{3} I^2_{j,K}.$$

От друга страна,

$$\{\nabla\varphi_{i,K}(x,y) \cdot \nabla\varphi_{j,K}(x,y)\}^3_{i,j=1} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$|z_h|^2_{1,K} = \frac{1}{h^2}\left(4I^2_{1,K} + 2I^2_{2,K} + 2I^2_{3,K} - 4I_{1,K}I_{2,K} - 4I_{1,K}I_{3,K}\right).$$

Да въведем положителния (неизвестен) параметър M, който е свързан с оценката (3.53) посредством зависимостта

$$C^2 = \frac{M}{6}, \; C > 0.$$

Тогава пресмятаме:

$$\frac{M}{6}h^2|z_h|^2_{1,K} - \|z_h\|^2_{0,K} = \frac{1}{6}\left[(4M-1)I^2_{1,K} + (2M-1)I^2_{2,K}\right.$$

$$\left. +(2M-1)I^2_{3,K} - 4MI_{1,K}I_{2,K} - 4MI_{1,K}I_{3,K}\right].$$

Квадратичната форма по отношение на интегралите $I_{j,K},\ j = 1,2,3$ е неотрицателна тогава и само тогава, когато

$$M \geq 1/4;\quad 4M^2 - 6M + 1 \geq 0 \ \text{ и}$$

$$(2M-1)(6M^2 - 6M + 1) \geq 0.$$

Решението на тази система от неравенства е $M \geq (3+\sqrt{3})/6$ и, следователно, оценката (3.53) е валидна, като

$$C \geq \frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{6}. \tag{3.54}$$

■

Забележка 3.9 *Резултатът от Лема 3.3 е неравенство от тип Poincaré (виж напр. [36]). Твърде интересен е случаят* $z_{h|_K} = A = const \neq 0$. *Очевидно е, че в този случай, предвид условието* $\int_{\partial\Omega} z_h\,dl = 0$, *K няма да е от пограничния слой.*

За да докажем оценката (3.53), ще прехвърлим стойностите на $I_{j,K} = Ah,\ j = 1,2,3$ *към съседните елементи* $K_{j_0},\ j_0 \in \{1,2,3\}$, *ако* $z_{h|_{K_{j_0}}} \neq const$ *(виж Фиг. 3.5, където* $K \equiv K_4$*). Ако обаче* $z_{h|_{K_{j_0}}} = const$, *то интегралните стойности по страните на K и* K_{j_0} *ще се трансферират към други елементи, които са съседни на* K_{j_0}. *И така, ако допуснем, че максималният брой на прехвърляния от един елемент K е равен на s, то само константата C в (3.53) ще се влоши в сравнение с тази от (3.54). Впрочем тогава*

$$C \geq \frac{\sqrt{s+3+\sqrt{s^2+3}}}{6}.$$

В следващата лема се доказва суперблизост между приближената собствена функция и интерполанта от интегрален тип на съответната ѝ точна собствена функция. Конформният случай на този резултат е разгледан от А.Б. Андреев в [5].

Лема 3.4 *Нека* (λ, u) *и* (λ_h, u_h) *са съответни решения на (3.45) и (3.47). Нека също* $i_h u$ *е линейният C-R интерполант на решението u и* τ_h *е квазиравномерно разделяне на областта. Ако* $u \in H^2(\Omega) \cap V$, *то в сила е следната оценка:*

$$\|u_h - i_h u\|_{1,h} \leq Ch^2\|u\|_{2,\Omega}. \tag{3.55}$$

Д о к а з а т е л с т в о. Тъй като $a_h(\cdot,\cdot)$ е коерцитивна, то получаваме ($\alpha = \text{const} > 0$):

$$\begin{aligned} \alpha\|u_h - i_h u\|^2_{1,h} &\leq a_h(u_h - i_h u, u_h - i_h u) \\ &= \lambda_h(u_h, u_h - i_h u) - a_h(i_h u, u_h - i_h u). \end{aligned}$$

Да положим $z_h = u_h - i_h u \in V_h$. Тогава

$$\begin{aligned} &\alpha\|z_h\|^2_{1,h} \leq (\lambda_h - \lambda)(u_h, z_h) + \lambda(u_h, z_h) - a_h(i_h u, z_h) \\ &= (\lambda_h - \lambda)(u_h, z_h) + \lambda(u_h - u, z_h) + \lambda(u, z_h) - a_h(i_h u, z_h). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Нека $\widetilde{z}$ е решение на вариационната елиптична задача

$$a_h(\widetilde{z}, v) = (z_h, v), \quad \forall v \in V.$$

Тъй като $z_h \in L_2(\Omega)$, то от регулярността на тази елиптична задача следва, че [56]

$$\|\widetilde{z}\|_{2,\Omega} \leq C\|z_h\|_{0,\Omega}. \tag{3.57}$$

От свойството на интерполационния оператор i_h и от (3.56) следва

$$\begin{aligned} \alpha\|z_h\|^2_{1,h} &\leq (\lambda_h - \lambda)(u_h, z_h) + \lambda(u_h - u, z_h) \\ &+ \lambda(u, \widetilde{z}) - \lambda(u, \widetilde{z}) + \lambda(u, z_h) - a_h(i_h u, z_h) \\ &= (\lambda_h - \lambda)(u_h, z_h) + \lambda(u_h - u, z_h) + a_h(u, \widetilde{z} - z_h) + \lambda(u, z_h - \widetilde{z}). \end{aligned}$$

От (3.57) и (3.53) получаваме оценката

$$\alpha\|z_h\|^2_{1,h} \leq |\lambda_h - \lambda|\|u_h\|_{0,\Omega}\|z_h\|_{1,h} + \lambda\|u - u_h\|_{0,\Omega}\|z_h\|_{1,h}$$

$$+C\|u\|_{1,\Omega}h^2|z_h|_{1,h} + C\|u\|_{0,\Omega}h^3|z_h|_{1,h}.$$

Като разделим това неравенство на $\|z_h\|_{1,h}$ и отчетем оценките на собствените стойности и функции за C-R елемента, ще получим (3.55).

■

Сега ще докажем резултата на Теорема 3.10, но за случая, когато областта Ω е изпъкнала.

Теорема 3.11 *Нека* (λ_k, u_k) *и* $(\lambda_{k,h}, u_{k,h})$ *са съответни решения на (3.45) и (3.47) за някое цяло положително* k *и нека условията на Лема 3.4 са изпълнени. Ако съществува константа* C *такава, че*

$$\|u_k - u_{k,h}\|_h \geq Ch, \tag{3.58}$$

Ω *е изпъкнала Липшицова област в равнината и собствените функции са ортонормирани* $\|u_k\|_{0,\Omega} = \|u_{k,h}\|_{0,\Omega} = 1$, *то оценката (3.49) е валидна, т.е. в сила е оценка отдолу на точната собствена стойност* λ_k.

Доказателство. Ще използваме преобразованието (3.50), т.е. имаме следното равенство:

$$\begin{aligned} \lambda_k - \lambda_{k,h} &= \|u_k - u_{k,h}\|_h^2 - \lambda_{k,h}\|i_h u_k - u_{k,h}\|_{0,\Omega}^2 \\ &\quad + \lambda_{k,h}\left(\|i_h u_k\|_{0,\Omega}^2 - \|u_{k,h}\|_{0,\Omega}^2\right). \end{aligned} \tag{3.59}$$

За първото събираемо в дясната страна на (3.59) съществено използваме (3.58) и заключаваме, че е от ред $\mathcal{O}(h^2)$.

Второто събираемо се оценява като се отчете, че i_h линеен интерполационен оператор и $u_k \in H^2(\Omega)$, като Ω е изпъкнала област. Впрочем,

$$\|i_h u_k - u_{k,h}\|_{0,\Omega} \leq Ch^2\|u_k\|_{2,\Omega},$$

тъй като е ясно, че

$$\|u_k - u_{k,h}\|_{0,\Omega} \leq Ch^2\|u_k\|_{2,\Omega}.$$

Така заключаваме, че второто събираемо в дясната страна на (3.59) е от ред $\mathcal{O}(h^4)$.

От друга страна

$$\left|\ \|i_h u_k\|_{0,\Omega}^2 - \|u_{k,h}\|_{0,\Omega}^2\ \right| \leq \int_\Omega |i_h u_k - u_{k,h}|.|i_h u_k + u_{k,h}|\, dx.$$

Понеже $u_k \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, то функцията u_k е ограничена в Ω. При използване на линейни C-R елементи е очевидно, че $u_{k,h}$ и $i_h u_k$ от пространството V_h са също ограничени, т.е.

$$\|u_{k,h}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C\|u_k\|_{L_\infty(\Omega)},$$

$$\|i_h u_k\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C\|u_k\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

По такъв начин, използвайки Лема 3.4 и Лема 3.3, ще получим:

$$\begin{aligned} \left|\|i_h u_k\|_{0,\Omega}^2 - \|u_{k,h}\|_{0,\Omega}^2\right| &\leq C\|u_k\|_{L_\infty(\Omega)}\|i_h u_k - u_{k,h}\|_{L_1(\Omega)} \\ &\leq C\|i_h u_k - u_{k,h}\|_{0,(\Omega)} \leq Ch^3\|u_k\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

Окончателно, първият член отдясно в равенството (3.59) е най-голям в сравнение с останалите два, които са съответно от ред $\mathcal{O}(h^4)$ и $\mathcal{O}(h^3)$. Следователно, ако h е достатъчно малко, то редът на разликата $\lambda_k - \lambda_{k,h}$ се определя от $\|u_k - u_{k,h}\|_h^2$, което доказва равенство (3.49).

■

Като следствие на резултатите от последните две теореми ще получим апроксимация на собствените стойности отдолу, но при разширения елемент на Crouzeix-Raviart (EC-R). Да припомним, че за този елемент освен стойности на интегралите по страните се използва и стойността на двойния интеграл върху елемента $K \in \tau_h$. Свойствата на този елемент бяха разгледани в § 3.2 (виж също равенство (3.9) на Теорема 3.2).

Нашата цел е да докажем, че и този неконформен елемент дава апроксимация отдолу за собствените стойности.

Теорема 3.12 *Нека крайноелементното пространство се състои от разширени триъгълни елементи на Crouzeix-Raviart EC-R. При същите условия, при които са в сила Теорема 3.10 и Теорема 3.11 за решенията съответно на (3.45) и (3.47) имаме следните оценки:*

$$\begin{aligned} \lambda_{k,h} &\leq \lambda_k, \\ \lambda_k - \lambda_{k,h} &\leq Ch^{2r}\|u_k\|_{2,\Omega}^2, \end{aligned} \tag{3.60}$$

където $\frac{1}{2} < r < 1$, *когато* Ω *е неизпъкнала област и* $r = 1$, *когато* Ω *е изпъкнала.*

Доказателство. Добре известен факт е, че ако λ_k е точна собствена стойност, получена от (3.45), то валиден е минимаксният принцип (виж Courant и Hilbert [64]):

$$\lambda_k = \inf_{E^k \subset V} \sup_{v \in E^k} \frac{a_h(v,v)}{(v,v)},$$

където с E^k сме означили $k-$мерно подпространство на $V \equiv H_0^1(\Omega)$ $(k \leq \dim V_h)$.

В предходните две теореми доказахме, че приближените собствени стойности, получени чрез C-R неконформен МКЕ апроксимират отдолу точните λ_k.

Да означим този път с $\widetilde{V}_h$ пространството от неконформни крайни елементи на Crouzeix-Raviart. Тогава съответната приближена стойност е:

$$\widetilde{\lambda}_{k,h} = \inf_{E^k \subset \widetilde{V}_h} \sup_{v_h \in E^k} \frac{a_h(v_h,v_h)}{(v_h,v_h)}.$$

Като използваме EC-R елементи, имаме

$$\lambda_{k,h} = \inf_{E^k \subset V_h} \sup_{v_h \in E^k} \frac{a_h(v_h,v_h)}{(v_h,v_h)}.$$

А сега да отчетем, че $\widetilde{V}_h \subset V_h$. Тогава минимаксният принцип ни дава

$$\lambda_{k,h} \leq \widetilde{\lambda}_{k,h}. \tag{3.61}$$

Първото неравенство на (3.60) следва от (3.61) и от предходните две теореми. Другата оценка на (3.60) следва от факта, че използването на EC-R елементи дава порядък, съответен с този на C-R елементите. Освен това от стандартни съображения (виж напр. [38]) имаме

$$\lambda_k - \lambda_{k,h} \leq C\|u_k - u_{k,h}\|^2_{1,h}.$$

■

Забележка 3.10 *Резултатът от последната теорема и по-специално (3.61) определя един "парадокс на разширения елемент". Използването на EC-R пространството V_h "отдалечава" $\lambda_{k,h}$ от точната собствена стойност λ_k, без да влошава порядъка. Този факт налага извода, че е за предпочитане апроксимационната задача (3.47) да се решава с по-простите неконформни C-R елементи.*

Сега ще допълним списъка на неконформните методи, изследвани по отношение на въпроса за получаване на долни граници на собствените стойности за задачи от втори ред.

Armentano и Duràn [34] дават друго доказателство за апроксимация отдолу за собствените стойности при използване на неконформен C-R елемент.

Ротираният билинеен елемент Q_1^{rot}, разгледан вече в § 3.2, е правоъгълен неконформен елемент (Фиг. 3.9(b)), предложен от Rannacher и Turek [118].

През 2005 г. Liu и Yan [100] стигат по изчислителен път до следните заключения за апроксимиране на спектъра на оператора на Laplace чрез $Q_1^{rot}-$елементи:

- В квадратна област приближените стойности $\lambda_{1,h}$ и $\lambda_{4,h}$ апроксимират точните собствени стойности отдолу, докато $\lambda_{2,h}$ и $\lambda_{3,h}$ ги приближават отгоре;
- В L-образна област Ω $\lambda_{1,h}$ и $\lambda_{3,h}$ апроксимират съответно λ_1 и λ_3 отдолу, докато $\lambda_{2,h}$ и $\lambda_{4,h}$ дават приближение отгоре.

Отново в [100], Liu и Yan дават обяснение на тези особености за случая на единичен квадрат. Едва през 2010 тези свойства са аналитично анализирани когато Ω е $L-$образна област в работата [143].

Свойствата на разширението на Q_1^{rot} елемент – елементът EQ_1^{rot} (Фиг. 3.9(c)) – са обект на изследване в редица статии.

През 2005 г. Liu и Yan [100] провеждат числови експерименти с този елемент, от които се вижда, че той приближава собствените стойности на оператора на Laplace отдолу.

Lin и Lin през 2006 г. доказват в своята книга [94], че когато Ω е правоъгълна област и τ_h е равномерна правоъгълна мрежа, EQ_1^{rot} елементът апроксимира отдолу собствените стойности при достатъчно малък мрежови параметър h.

През 2008 г. Lin, Huang и Li [82, 92] предлагат нов подход в доказателствата чрез развитие в ред на собствените функции, за да докажат, че при квазиравномерна мрежа за разделяне на единичния квадрат неконформният EQ_1^{rot} елемент дава приближение отдолу. Представят се и числови примери.

За *елемента на Wilson* (W) степените на свобода са шест (Фиг. 3.10(d)): за произволна тестова функция v това са стойностите $v(a_j)$ във върховете $a_j,\ j = 1, 2, 3, 4$ и стойностите $\partial_{xx}v(O)$ и $\partial_{yy}v(O)$ на производните от втори ред в центъра O на елемента $K \in \tau_h$.

Съответното крайноелементно пространство можем да запишем като:

$$V_h^W = \{v \in L_2(\Omega) : v_{|K} \in P_2, v \text{ е непрекъсната във върховете на всеки}$$
$$\text{елемент и е равна на нула във възлите върху границата}\}.$$

Елементът на Wilson (W-елемент) е много използван при апроксимиране на линеаризираните задачи на еластичността (виж [141]). Сходимостта на неконформният метод с W-елементи за задача от втори ред с използване на правоъгълни мрежи е доказана от Lesaint и Zlamal [91] през 1980 г., като отчитат променено представяне на задачата в слаба формулировка. Този резултат, но при стандартно вариационно представяне, доказва Shi [125] през 1984 г. По-късно отново Shi [126] доказва, че оптималният ред на сходимост $\mathcal{O}(h)$ в енергетична норма е неподобряем. Lin и др. [93, 94, 95] представят асимптотичното поведение на решението при W-елемента.

Да се получи оценка отдолу на собствените стойности на W-елемента е било винаги едно предизвикателство при неговото изследване от теоретична гледна точка. Този въпрос се дискутира още от Strang и Фикс [129] през 1973 г. През 2005 г. Liu и Yan [100] представят числови резултати, които навеждат на заключение, че W-елементът приближава отдолу собствените стойности. Нека да отбележим, че отново през 2005 г. Chen и Yang [63] дават числови експерименти с използването на 3-мерната "*тухла на Wilson*" (Wilson's brick), които показват апроксимиране отдолу на точните собствени стойности за оператор от втори ред. Съвсем логично е да отбележим, че теоретичните доказателства в тази област изостават от практическите пресмятания.

През 2007 г. Zhang и др. [147] доказват, че W-елементът дава оценка отдолу за спектъра на оператора на Laplace при условие, че собствените функции са достатъчно гладки, а областта е правоъгълник. В общия случай наличие на разглежданото свойство е само предположение. Lin и др. [92, 94] също анализират апроксимирането отдолу на собствените стойности за W-елемента.

3.7 Долни граници за собствените стойности за спектрални задачи от четвърти ред

В този параграф моделната задача представя непринудените колебания на огъвна плоча при $V = H_0^2(\Omega)$: Търсим $\lambda \in \mathbf{R}$ и $u \in V,\ u \neq 0$ такива, че

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in V, \tag{3.62}$$

където

$$a(u,v) = \int_\Omega (\sigma \Delta u \Delta v + (1-\sigma)(2\partial_{xy}u\partial_{xy}v + \partial_{xx}u\partial_{xx}v + \partial_{yy}u\partial_{yy}v))\ dx\,dy,$$

$$b(u,v) = \int_\Omega uv\,dx\,dy, \quad \|u\|_b = \|u\|_{0,\Omega}.$$

Областта Ω е полигонална в $\mathbf{R}^2$, а $\sigma \in [0, 0.5)$ е отношението на Poisson. Очевидно, билинейната форма $a(\cdot,\cdot)$ е симетрична и (виж [57]) е непрекъсната и $V-$елиптична.

Една от целите при неконформните методи за задачи от четвърти ред е да се избегне C^1-изискването, т.е. непрекъснатост на първите производни на апроксимиращите функции върху границата на всеки два съседни елемента от разделянето τ_h. Освен това при неконформният МКЕ съществува възможност за приближаване на собствените стойности отдолу. Естествено е, че за разглежданата в настоящия параграф задача резултатите са значително по-малко на брой, отколкото тези за задачите от втори ред, които дискутирахме в предходния параграф.

В този параграф ще засегнем някои неконформни крайни елементи за задача от четвърти ред, чието използване (поне в числов аспект) дава апроксимация отдолу на точните собствени стойности.

Елемент на Adini (A)

Това е C^0-правоъгълен равнинен елемент [2]. Неговите степени на свобода, за някоя пробна функция v, са стойностите на v, както и на нейните първи производни $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ в четирите върха $a_j, j = 1,2,3,4$ на кой да е правоъгълник $K \in \tau_h$ (Фиг. 3.11(a)).

Елементът на Adini има следното крайноелементно пространство:

$$V_h^A = \{v \in C^0(\Omega) : v_{|_K} \in P_3 + \mathrm{span}\{x^3y, xy^3\}, K \in \tau_h,\ v,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial v}{\partial y} \text{ са непрекъснати във върховете}$$
$$\text{и са равни на 0 в граничните възли}\},$$

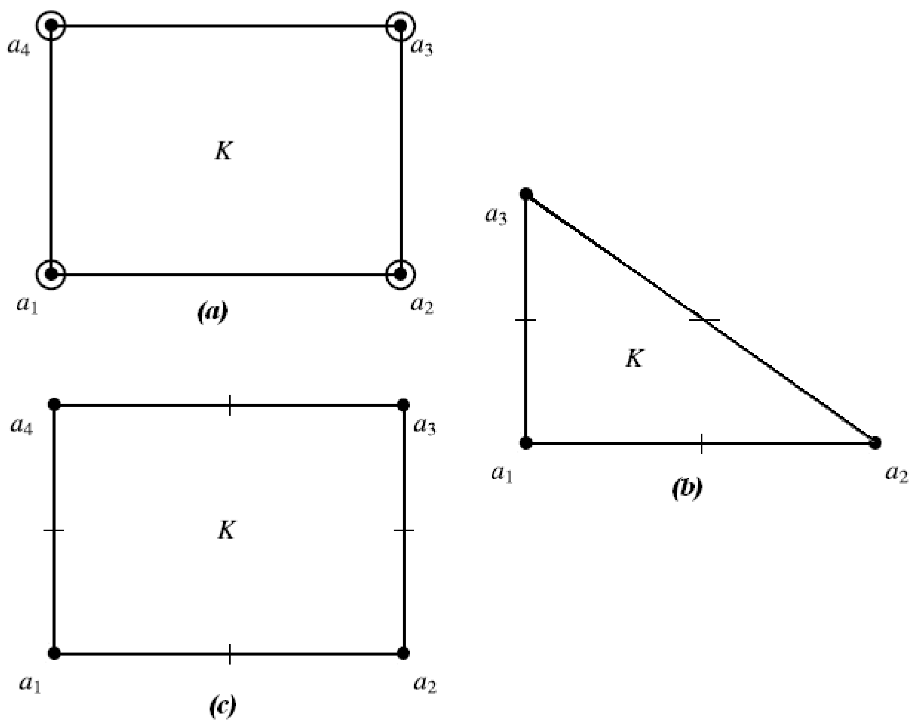
където τ_h е правоъгълна мрежа.

Чрез този елемент се решават задачи единствено ако плочата има страни, успоредни на координатните оси.

Нека отбележим, че $V_h^A \subset C^0$, $V_h^A \not\subset H^2(\Omega)$.

Числовите пресмятания, извършени от Rannacher [117] през 1979 г. показват, че непринудените колебания на правоъгълна плоча се приближават отдолу при използване на елемента на Adini (A-елемент). Този факт е доказан от Yang [142] през 2000 г. за случая на равномерна мрежа τ_h (виж също [143]).

Все пак съществуват някои изключения, а именно, A-елементът апроксимира отгоре собствените стойности при задачи със смесени гранични условия ($u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$



Фигура 3.11: Неконформни елементи за задачи от четвърти ред: (a) Елемент на Adini; (b) Елемент на Morley; (c) Правоъгълен елемент на Morley

върху една от страните на правоъгълната област Ω, като останалите ѝ три страни са свободни).

За специалния случай на бихармоничния оператор, през 2006 г. Q. Lin и J. Lin [94] доказват, че A-елементът приближава точните стойности отдолу. Числови резултати за този случай са представени също и от Rannacher [117].

Елемент на Morley (M)

Триъгълникът на Morley (M-елемент) е въведен през 1968 г. при решаване на задачи за огъвни плочи [107]. Степените на свобода са стойностите на пробната функция във върховете и стойностите на производните по външната нормала в средите на страните на триъгълника (Фиг. 3.11(b)):

$$v(a_j), \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right), \; i, j = 1, 2, 3, \; i \neq j,$$

за $v \in C^1(K), K \in \tau_h$.

Крайноелементното пространство за този елемент е:

$$\begin{aligned} V_h^M = \{v \in L_2(\Omega) : v_{|_K} \in P_2, K \in \tau_h, \; & v \text{ е непрекъсната във върховете на } K, \\ & \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ е непрекъсната в средите на страните на } K, \\ & v \text{ и } \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ са равни на 0 във възлите по границата на } \Omega\}. \end{aligned}$$

Забележка 3.11 *Друга алтернатива за степени на свобода е*

$$v(a_j), \quad \frac{1}{\int_{l_j} ds} \int_{l_j} \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds,$$

където l_j *е страна на* K*, противоположна на върха* a_j*,* $j = 1, 2, 3$*.*

Тогава $v \in V_h^M$ *ще е интегрално непрекъсната върху страните на елементите от* τ_h*.*

Измежду неконформните елементи за задачи от четвърти ред М-елементът е възможно най-простият [107]. Това го прави силно атрактивен сред инженерите - изследователи. Ето защо въпросите за сходимостта и точността при използването му за задачите от четвърти ред в механиката е много актуален и важен. Тези въпроси се разглеждат например в [56, 90, 107, 124, 129]. Характерна черта на пространството V_h^M е, че то не гарантира дори гладкост C^0!

През 1967 г. Zienkiewicz и Cheung [149] забелязват, че при задачи за огъвни плочи М-елементът приближава отдолу собствените стойности.

Отново Rannacher [117] извършва числени експерименти и заключава, че наред с А-елемента, елементът на Morley е удобен за получаване на оценки отдолу за спектрални задачи от четвърти ред.

Правоъгълен елемент на Morley (M$^{\mathbf{rect}}$-елемент)

В последните няколко години бяха предложени и изучавани различни модификации (правоъгълни аналози) на елемента на Morley [108, 136, 137, 139, 146].

Тези елементи бяха разгледани в § 3.5, като беше доказан нов резултат за сходимост, отнасящ се за един вид правоъгълен елемент на Morley (Фиг. 3.8 и Фиг. 3.11(c)).

Все още няма теоретични резултати, доказващи приближаване отдолу на собствените стойности за оператор от четвърти ред при използване на $M^{rect}-$ елементи. Все пак, за пръв път в § 3.9 (виж също [115]) се дават числови примери, които показват това свойство на $M^{rect}-$елементите.

За елиптични спектрални задачи от четвърти ред елементите на Adini и Morley имат един и същи ред на точност (виж, напр. [90]). По-точно, ако $u \in H^4(\Omega)$ е точното решение на (3.62), а u_h е съответното му неконформно приближение, то

$$\|u - u_h\|_{2,h} \leq Ch\,(|u|_{3,\Omega} + h|u|_{4,\Omega})),$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2\,(|u|_{3,\Omega} + h|u|_{4,\Omega})).$$

В случая, основната H^2-норма определя оценката за собствените стойности, т.е. $|\lambda - \lambda_h| = \mathcal{O}(h^2)$.

Ако използваме А-елемент върху равномерна мрежа, то съществува подобрена оценка [90]:

$$\|u - u_h\|_{2,h} \leq Ch^2|u|_{4,\Omega}.$$

3.8 Нов алгоритъм за двустранни оценки на собствените стойности

Този параграф съдържа един оригинален резултат, който се основава на всичко, казано в § 3.6 и § 3.7. Ако трябва да резюмираме в едно изречение това, което тези параграфи съдържат, то най-точно бихме записали, че съществуват неконформни крайни елементи, които апроксимират отдолу собствените стойности на оператори от втори и четвърти ред.

А сега ще покажем, че след подходящо използване на конформен МКЕ върху по-лесна задача ще получим оценка отгоре на съответната собствена стойност. Ето защо този метод сме нарекли *неконформен-конформен подход*. Най-важната мотивация за такъв алгоритъм е, че обикновено на практика точните стойности от спектъра на операторите са неизвестни. Тогава можем да работим с достатъчно малки интервали, в които те са заключени, стига, разбира се, да разполагаме с (доказани) методи за тяхното получаване.

И така, методът ще представим за елиптични оператори от ред $2m$, където $m = 1$ или $m = 2$. Разглеждаме спектралната задача (3.45) ($m = 1$) или (3.62) (m = 2).

Ще решим задачата за приближено намиране на собствените двойки

$$a_h(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3.63}$$

използвайки неконформен МКЕ. Тук, разбира се, е валидно $V_h \not\subset V$, като ще предполагаме, че за V_h сме подбрали такива неконформни елементи, за които

$$\lambda_h \leq \lambda.$$

Тези случаи бяха изложени в § 3.6 и § 3.7.

Ще решим допълнителна елиптична задача с дясна част – приближената собствена функция:

$$a(\widetilde{w}_h, \widetilde{v}_h) = (u_h, \widetilde{v}_h), \quad \forall \widetilde{v}_h \in \widetilde{V}_h. \tag{3.64}$$

Сега вече $\widetilde{V}_h \subset V$, понеже ще предполагаме, че $\widetilde{V}_h$ се състои от конформни крайни елементи. Именно затова и заместихме $a_h(\cdot, \cdot)$ с $a(\cdot, \cdot)$ в (3.64).

Тъй като $\widetilde{w}_h$ е решението на (3.64), то ще пресметнем

$$\widetilde{\lambda}_h = \frac{1}{(u_h, \widetilde{w}_h)}. \tag{3.65}$$

Използвайки отново обаче, че $\widetilde{V}_h \subset V$, можем да дефинираме решението $\widetilde{w}$ на задачата

$$a(\widetilde{w}, v) = (u_h, v), \quad \forall v \in V. \tag{3.66}$$

Ще докажем следния спомагателен резултат:

Лема 3.5 *Нека (λ, u) е решение на (3.45) $(m = 1)$ или (3.62) $(m = 2)$, като (λ_h, u_h) е съответното неконформно приближение чрез (3.63) и $(u, u) = (u_h, u_h) = 1$. Тогава $\widetilde{\lambda}_h$, определено от (3.65), апроксимира точната собствена стойности λ. Нещо повече, валидна е оценката*

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq C \left(\|u - u_h\|^2_{0,\Omega} + \|\widetilde{w} - \widetilde{w}_h\|^2_{m,\Omega} \right), \quad m = 1; 2. \tag{3.67}$$

Доказателство. Да разгледаме разрешаващия оператор на съответната елиптична гранична задача $\mathcal{T} : \ L_2(\Omega) \to V$, дефиниран посредством

$$u = \mathcal{T} f, \quad u \in V \text{ за произволно } f \in L_2(\Omega),$$

където

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V.$$

Очевидно $a(u, v)$ и (u, v) са симетрични билинейни форми и тогава [38]

$$a(\mathcal{T} u, v) = a(u, \mathcal{T} v), \ \ \forall u, v \in H^m(\Omega), \ m = 1; 2,$$

$$(\mathcal{T} u, v) = (u, \mathcal{T} v), \ \ \forall u, v \in L_2(\Omega).$$

Следователно, операторът $\mathcal{T}$ е симетричен и положително определен. Непосредствено от теоремата на Ritz следва, че ($a(\cdot, \cdot)$ е скаларно произведение във V) $\mathcal{T}$ е ограничен.

По аналогия с (3.65) и (3.66) ще дефинираме

$$\widetilde{\lambda} = \frac{1}{(\widetilde{w}, u_h)} = \frac{1}{(\mathcal{T} u_h, u_h)}.$$

От равенството

$$a(\mathcal{T} u, v) = (u, v) \quad \forall v \in V,$$

следва, че $a(\mathcal{T} u, u) = (u, u) = 1$, където u е някоя (точна) собствена функция.

От друга страна обаче, тази функция е решение на уравнението

$$a(u, \mathcal{T} u) = \lambda (u, \mathcal{T} u)$$

и следователно

$$\lambda = \frac{1}{(\mathcal{T} u, u)}$$

поради факта, че $\mathcal{T}$ е симетричен оператор.

Така пресмятаме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}} &= (\mathcal{T}u, u) - (\mathcal{T}u_h, u_h) \\ &= (\mathcal{T}u, u) - (\mathcal{T}u_h, u_h) + (\mathcal{T}(u - u_h), u - u_h) \\ &\quad -(\mathcal{T}(u - u_h), u - u_h) \\ &= 2(\mathcal{T}u, u - u_h) - (\mathcal{T}(u - u_h), u - u_h). \end{aligned} \tag{3.68}$$

Двете събираеми в дясната страна на (3.68) оценяваме по следния начин:

$$\begin{aligned} 2(\mathcal{T}u, u - u_h) &= \frac{2}{\lambda}(1 - (u, u_h)) \\ &= \frac{1}{\lambda}((u, u) - 2(u, u_h) + (u_h, u_h)) \\ &= \frac{1}{\lambda}(u - u_h, u - u_h) \leq \frac{1}{\lambda}\|u - u_h\|^2_{0,\Omega}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Тъй като операторът $\mathcal{T}$ е ограничен, то

$$|(\mathcal{T}(u - u_h), u - u_h)| \leq \|\mathcal{T}\| \; \|u - u_h\|^2_{0,\Omega}. \tag{3.70}$$

Най-сетне, от (3.68), (3.69) и (3.70) получаваме:

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}| \leq C\|u - u_h\|^2_{0,\Omega}. \tag{3.71}$$

От аналогични съображения имаме равенството

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_h} = (\widetilde{w}, u_h) - (\widetilde{w}_h, u_h) = a(\widetilde{w}, \widetilde{w}) - a(\widetilde{w}_h, \widetilde{w}_h).$$

Понеже $\widetilde{w}_h \in \widetilde{V}_h$ и $\widetilde{w} \in V$ са съответно решения на елиптичните задачи (3.64) и (3.66), то лесно се съобразява, че $a(\widetilde{w} - \widetilde{w}_h, \widetilde{w}_h) = 0$, защото $\widetilde{V}_h \subset V$.

Следователно

$$\begin{aligned}\frac{1}{\widetilde{\lambda}} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_h} &= a(\widetilde{w}, \widetilde{w}) - a(\widetilde{w}_h, \widetilde{w}_h) - 2a(\widetilde{w} - \widetilde{w}_h, \widetilde{w}_h) \\ &= a(\widetilde{w}, \widetilde{w}) - 2a(\widetilde{w}, \widetilde{w}_h) + a(\widetilde{w}_h, \widetilde{w}_h) \\ &= a(\widetilde{w} - \widetilde{w}_h, \widetilde{w} - \widetilde{w}_h).\end{aligned}$$

Непрекъснатостта на $a-$формата в $H^m(\Omega)$ води до неравенството

$$|\widetilde{\lambda} - \widetilde{\lambda}_h| \leq C\|\widetilde{w} - \widetilde{w}_h\|^2_{m,\Omega}, \quad m = 1; 2.$$

Тази оценка и (3.71) завършват доказателството на лемата.

■

Забележка 3.12 *Важно е да подчертаем, че оценката (3.67) може да се отнесе към оценки от тип суперсходимост. Действително, оптималният ред на сходимост за собствените стойности е $\mathcal{O}\left(\|u - u_h\|^2_{m,\Omega}\right)$, където u е съответната точна собствена функция. Очевидно $\|u - u_h\|^2_{0,\Omega}$ има по-висок ред на точност и освен това лесно може да се получи същият ред на точност за $\|\widetilde{w} - \widetilde{w}_h\|^2_{m,\Omega}$ [8, 14, 116, 144].*

Сега ще изложим същността на идеята, наречена "неконформен-конформен подход"за получаване на двустранни оценки за собствените стойности.

Теорема 3.13 *Нека условията на Лема 3.5 са изпълнени. Ако $\lambda_{1,h}$, получено чрез неконформен МКЕ апроксимира първата (основна) собствена стойност λ_1 отдолу, то $\widetilde{\lambda}_{1,h}$, получена от (3.65) апроксимира λ_1 отгоре, т.е.*

$$\lambda_{1,h} \leq \lambda_1 \leq \widetilde{\lambda}_{1,h}. \tag{3.72}$$

Доказателство. Най-напред ще представим един резултат, който е валиден за произволна собствена двойка (λ, u). Ето защо по-долу ще пропускаме индексите $1, 2, \ldots$.

Нека въведем функцията $\widetilde{u}_h = \widetilde{\lambda}_h\widetilde{w}_h$, където $\widetilde{w}_h$ е решение на (3.64), а числото $\widetilde{\lambda}_h$ е определено от (3.65). Тогава

$$(u_h, \widetilde{u}_h) = \widetilde{\lambda}_h(u_h, \widetilde{w}_h) = 1. \tag{3.73}$$

Също така,

$$a(\widetilde{u}_h, \widetilde{u}_h) = \widetilde{\lambda}^2_h a(\widetilde{w}_h, \widetilde{w}_h) = \widetilde{\lambda}^2_h(u_h, \widetilde{w}_h) = \widetilde{\lambda}_h. \tag{3.74}$$

Да положим

$$0 \leq \varepsilon(h) = \|u_h - \widetilde{u}_h\|^2_{0,\Omega} = (u_h, u_h) - 2(u_h, \widetilde{u}_h) + (\widetilde{u}_h, \widetilde{u}_h).$$

Следователно, като отчетем, че $(u_h, u_h) = 1$, от (3.73) получаваме

$$(\widetilde{u}_h, \widetilde{u}_h) = 1 + \varepsilon(h).$$

От (3.74) следва, че

$$\lambda_1 = \min_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{a(v,v)}{(v,v)} \leq \frac{a(\widetilde{u}_{1,h}, \widetilde{u}_{1,h})}{(\widetilde{u}_{1,h}, \widetilde{u}_{1,h})} = \frac{a(\widetilde{u}_{1,h}, \widetilde{u}_{1,h})}{1 + \varepsilon(h)} \leq a(\widetilde{u}_{1,h}, \widetilde{u}_{1,h}) = \widetilde{\lambda}_{1,h},$$

което завършва доказателството на теоремата.

■

В следващата теорема е даден резултат за двустранна оценка за всички собствени стойности, а не само за λ_1, за спектрални задачи от втори ред.

Теорема 3.14 *Разглеждаме спектралната задача от втори ред (3.45) и нека $(\lambda_{l,h}, u_{l,h})$, $l = 2, 3, \ldots$ са решения на задача (3.63), получени чрез използване на някой измежду неконформните крайни елементи C-R, EC-R, Q_1^{rot} и EQ_1^{rot}. Нека също за произволно цяло число $l \geq 2$ точните собствени функции u_l са ортонормирани, т.е. $(u_l, u_l) = (u_{l,h}, u_{l,h}) = 1$ и разделянето на областта да е квазиравномерно. Тогава, ако решаваме елиптичната задача (3.64) чрез линейни/билинейни конформни крайни елементи, то*

$$\lambda_{l,h} \leq \lambda_l \leq \widetilde{\lambda}_{l,h}, \quad l = 2, 3, \ldots \tag{3.75}$$

Доказателство. В нашите разглеждания билинейната форма $a(\cdot, \cdot)$ е определена от (3.46) и

$$\|w\|_a = \sqrt{a(w,w)}.$$

Нека R е отношението на Rayleigh, а u е собствена функция, съответстваща на собствената стойност λ. Тогава за произволна точна собствена стойност λ и произволна функция $w \in V$ ще използваме следното равенство (виж [38], стр. 701):

$$R(w) - \lambda = \frac{\|w - u\|_a^2}{\|w\|_{0,\Omega}^2} - \lambda \frac{\|w - u\|_{0,\Omega}^2}{\|w\|_{0,\Omega}^2}. \tag{3.76}$$

От (3.74) и от $(\widetilde{u}_{l,h}, \widetilde{u}_{l,h}) = 1 + \varepsilon(h)$ за всяко $l = 2, 3, \ldots, N_h,\ N_h = \dim V_h$ получаваме

$$\widetilde{\lambda}_{l,h} - \lambda_l = a(\widetilde{u}_{l,h}, \widetilde{u}_{l,h}) - \lambda_l \geq \frac{a(\widetilde{u}_{l,h}, \widetilde{u}_{l,h})}{(\widetilde{u}_{l,h}, \widetilde{u}_{l,h})} - \lambda_l.$$

А сега в (3.76) ще заместим $\lambda = \lambda_l$, $w = \widetilde{u}_{l,h}$ и $u = u_l$. Така достигаме до

$$\widetilde{\lambda}_{l,h} - \lambda_l \geq R(\widetilde{u}_{l,h}) - \lambda_l = \frac{\|\widetilde{u}_{l,h} - u_l\|_a^2}{\|\widetilde{u}_{l,h}\|_{0,\Omega}^2} - \lambda_l \frac{\|\widetilde{u}_{l,h} - u_l\|_{0,\Omega}^2}{\|\widetilde{u}_{l,h}\|_{0,\Omega}^2}. \tag{3.77}$$

Трябва да оценим първото събираемо в дясната страна на (3.77) отдолу, а второто събираемо – отгоре.

Нека да въведем елиптичния проекционен оператор $\widetilde{\mathcal{R}}_h : V \to \widetilde{V}_h$, дефиниран посредством

$$a(u - \widetilde{\mathcal{R}}_h u, \widetilde{v}_h) = 0, \quad \forall \widetilde{v}_h \in \widetilde{V}_h.$$

Очевидно, от неравенството на Friedrichs имаме

$$\|\widetilde{u}_{l,h} - u_l\|_{0,\Omega} \le C\|\widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l\|_a + \|\widetilde{\mathcal{R}}_h u_l - u_l\|_{0,\Omega}. \tag{3.78}$$

Ще оценим двата члена в дясната страна на (3.78).
За първия получаваме:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l\|_a^2 &= a(\widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l, \widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l) \\ = (\widetilde{\lambda}_{l,h} u_{l,h} - \lambda_l u_l, \widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l) &\le C\|\widetilde{\lambda}_{l,h} u_{l,h} - \lambda_l u_l\|_{0,\Omega}\|\widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l\|_a \\ &\le \left(\widetilde{\lambda}_{l,h}\|u_{l,h} - u_l\|_{0,\Omega} + |\widetilde{\lambda}_{l,h} - \lambda_l|\|u_l\|_{0,\Omega}\right)\|\widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l\|_a. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Да отчетем факта, че (3.63) е решено чрез неконформни крайни елементи, които са фиксирани в условието на теоремата.
Тогава от (3.79) следва, че [34, 38]

$$\|\widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l\|_a \le Ch^{2r}\|u_l\|_{1+r}, \tag{3.80}$$

където $r = \dfrac{\pi}{\omega}$, ако областта Ω е неизпъкнала и ω е максималният вътрешен ъгъл. Когато Ω е изпъкнала област, то $r = 1$. Нека отбележим, че последното неравенство е от тип суперсходимост.

За второто събираемо в дясната страна на (3.78) ще отчетем, че пространството $\widetilde{V}_h$ е конструирано посредством линейни/билинейни конформни крайни елементи. Следователно за елиптичния проекционен оператор $\widetilde{\mathcal{R}}_h$ е в сила оценката [79]:

$$\|\widetilde{\mathcal{R}}_h u_l - u_l\|_{0,\Omega} \le Ch^{2r}\|u_l\|_{1+r,\Omega}.$$

Последното неравенство, (3.80) и (3.78) дават следната оценка за второто събираемо в дясната страна на (3.77):

$$\|\widetilde{u}_{l,h} - u_l\|_{0,\Omega} \le Ch^{2r}\|u_l\|_{1+r,\Omega}.$$

От друга страна, що се отнася до първото събираемо в дясната страна на (3.77), то

$$\|\widetilde{u}_{l,h} - u_l\|_a^2 = a(\widetilde{u}_{l,h} - u_l, \widetilde{u}_{l,h} - u_l)$$

$$= a((\widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l) + (\widetilde{\mathcal{R}}_h u_l - u_l), (\widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l) + (\widetilde{\mathcal{R}}_h u_l - u_l))$$

$$= a(\widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l, \widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l) + a(\widetilde{\mathcal{R}}_h u_l - u_l, \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l - u_l) + 2a(\widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l, \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l - u_l)$$

$$= \|\widetilde{u}_{l,h} - \widetilde{\mathcal{R}}_h u_l\|_a^2 + \|\widetilde{\mathcal{R}}_h u_l - u_l\|_a^2 \geq \|\widetilde{\mathcal{R}}_h u_l - u_l\|_a^2.$$

Накрая ще използваме оценката

$$\|\widetilde{\mathcal{R}}_h u_l - u_l\|_a \geq Ch,$$

която е в сила за линейни/билинейни конформни крайни елементи и е доказана от Q. Lin, H. Xie and J. Xu [98] при квазиравномерно разделяне на областта.

По този начин доказахме, че

$$\|\widetilde{u}_{l,h} - u_l\|_{0,\Omega} \leq Ch^{2r},\ r \in (\frac{1}{2}, 1],$$

а също така

$$\|\widetilde{u}_{l,h} - u_l\|_a \geq Ch.$$

Следователно, първият член в дясната страна на (3.77) е доминиращ, така че $\widetilde{\lambda}_{l,h} \geq \lambda_l$.

■

Последните две теореми ни позволяват да формулираме и представим следния алгоритъм:

Алгоритъм 3.2

1. Да се реши приближената спектрална задача (3.63) с неконформни крайни елементи, като се определят $(\lambda_h, u_h) \in \mathbf{R} \times V_h$, $(u_h, u_h) = 1$, където λ_h апроксимира отдолу съответната точна собствена стойност.

2. Да се намери решението $\widetilde{w}_h$ на уравнение (3.64) чрез конформен МКЕ.

3. Да се определи приближението $\widetilde{\lambda}_h$ посредством (3.65).

Като резултат от изпълнението на този алгоритъм ще получим, че

$$\lambda_l \in (\lambda_{l,h}, \widetilde{\lambda}_{l,h}),\quad 1 \leq l \leq N_h.$$

Забележка 3.13 *Представеният алгоритъм дава прост метод за получаване на двустранни граници на точната собствена стойност (3.72) и (3.75). Основната идея е да се приложи апостериорна процедура, базирана на решаване на допълнителна елиптична задача посредством конформен МКЕ, вместо повторно решаване на спектрална задача чрез конформни крайни елементи.*

3.9 Числови резултати

Както във всички други глави от дисертацията, така и тук ще представим числови експерименти. Те илюстрират резултатите, получени в § 3.2 – § 3.8. Някои от пресмятанията носят оригинален характер (виж напр. Пример 3.4 и Пример 3.5), т.е. те нямат аналог в известните публикации за неконформни крайни елементи.

Пример 3.1

Най-напред ще започнем с прост пример на задача от втори ред

$$-\Delta u = \lambda u, \quad x \in \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{върху} \quad \partial\Omega,$$

където Ω е квадратът $(0,\pi) \times (0,\pi)$.

За тази задача точните собствени стойности са известни:

$$\lambda_j = s_1^2 + s_2^2, \; s_{1/2} = 1, 2, 3, \ldots, \quad \text{т.е.}$$

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 5; \quad \lambda_3 = 5; \quad \lambda_4 = 8; \quad \ldots.$$

Използваме равномерна мрежа, като квадратът е разделен на $2n^2$ равнобедрени правоъгълни триъгълника. По този начин мрежовият параметър е $h = 1/n$. Използваме неконформен C-R елемент, като пресмятания са извършени върху три мрежи, а именно при $n = 4, 8, 16$.

В Таблица 3.1 са дадени първите 4 приближени собствени стойности. Те апроксимират точните собствени стойности отдолу (Ω в случая е изпъкнала област).

Освен това, приложени са и двете апостериорни процедури, описани в § 3.3 и § 3.4. Макар че $\lambda_2 = \lambda_3$, то апостериорните процедури влияят и на двете приближения $\lambda_{2,h}$ и $\lambda_{3,h}$ (резултатите са обозначени с PP, което означава postprocessing).

Представени са и числовите резултати от приложена възстановяваща апостериорна процедура, даваща оценка от тип суперсходимост (резултатите са обозначени с PR, което означава patch-recovery).

Таблица 3.1: Собствени стойности, пресметнати с C-R елементи (NC); апостериорна процедура (PP) чрез решаване на допълнителна елиптична задача и използване на възстановяваща техника чрез макроелементи (PR)

h		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1/4	NC	1.965475477	4.546032933	4.546036508	7.430949878
1/4	PP	2.013510627	5.284680595	5.284687356	8.803039533
1/4	PR	2.048733065	5.377641910	5.379034337	8.858183829
1/8	NC	1.991417651	4.888133308	4.888134617	7.868940522
1/8	PP	2.000890695	5.018169460	5.018211807	8.058654758
1/8	PR	2.001716041	5.030155947	5.030153808	8.039386123
1/16	NC	1.997857237	4.972126030	4.972127107	7.971004421
1/16	PP	2.000056563	5.001156922	5.001160437	8.006904816
1/16	PR	2.000447081	5.008219681	5.008225792	8.007441874

Пример 3.2

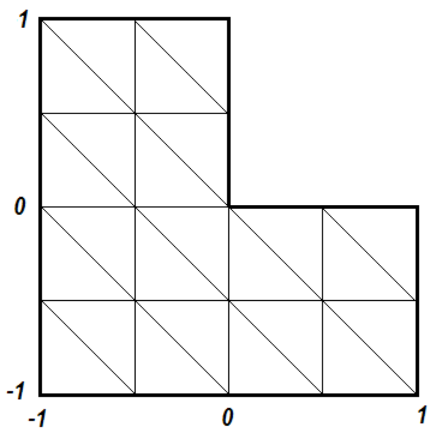
Този пример е посветен на приближаване спектъра на оператора на Laplace върху L-образна област, разделена равномерно на $6n^2$ правоъгълни равнобедрени триъгълника.

Мрежовият параметър е $h = 1/n$. На Фиг 3.12 е показано разделяне при $n = 2$.

Числовите пресмятания са извършени при $n = 4, 8, 16$.

Точните собствени стойности не са известни. Затова сме извършили пресмятания както с неконформен C-R елемент, даващ оценки отдолу (означени в таблица 3.2 с NC - nonconforming), така и с линеен конформен триъгълник, апроксимиращ собствените стойности отгоре (резултатите са означени в Таблица 3.2 с C - conforming).

В Таблица 3.2 са дадени числови резултати за първите три собствени стойности. Очевидно приближенията, получени с C-R елементи, образуват растящи редици



Фигура 3.12: L-образна област, разделена с триъгълни крайни елементи

Таблица 3.2: Собствени стойности на оператора Δ в L-образна област, пресметнати с неконформни C-R елементи (NC) и с линейни конформни крайни елементи (C)

h		λ_1	λ_2	λ_3
1/4	NC	9.133400403	14.86529487	19.39851056
1/4	C	10.57395545	16.94762372	22.81901054
1/8	NC	9.461196737	15.10972023	19.65452119
1/8	C	9.916549032	15.63328437	20.50232406
1/16	NC	9.574316908	15.17399484	19.77161313
1/16	C	9.728372729	15.30656611	19.92959689

Таблица 3.3: Собствени стойности, пресметнати с C-R елементи (C-R) и посредством разширени EC-R елементи (EC-R)

h		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1/4	C-R	1.965475477	4.546038911	4.546162634	7.435539735
1/4	EC-R	1.903764937	4.236717491	4.259003007	6.732464172
1/8	C-R	1.991417651	4.888134342	4.888194004	7.910092786
1/8	EC-R	1.974736912	4.789539279	4.791231822	7.783327846
1/16	C-R	1.997857237	4.972126840	4.972177890	7.971004421
1/16	EC-R	1.994800036	4.931389746	4.933618833	7.939362469

при намаляване на стойността на мрежовия параметър, докато приближенията, получени с линейни конформни елементи, образуват намаляващи редици. По такъв начин приближенията с линейни конформни елементи служат за сравнение с резултатите, получените със C-R елементи; от друга страна, използвайки конформни и неконформни елементи, получаваме двустранни приближения за точните собствени стойности.

Пример 3.3

Примерът има за цел да илюстрира резултата от Теорема 3.12. Както подчертахме, неконформният EC-R елемент дава "парадокса на разширения елемент" при задача от втори ред. Ето защо решаваме същата моделна задача, както в Пример 3.1, но с EC-R елементи, за да направим нужното сравнение.

В Таблица 3.3 са дадени първите четири приближени собствени стойности, получени с C-R и EC-R елементи. От резултатите ясно се вижда, че при по-гъста мрежа стойностите, получени с C-R и EC-R елементи се доближават, като последните остават по-малки.

Пример 3.4

Този пример е посветен на модела на огъвна плоча при различни стойности на отношението на Poisson. Направените числови експерименти могат да претендират за оригиналност, тъй като известен факт е, че не съществува в световната литература голям брой такива задачи, които са решени с неконформни крайни елементи. Една от основните цели е да сравним резултатите, получени след пресмятане с елемента на Adini и тези с правоъгълни елементи на Morley, означени като *Morley Rect. 1* и *Morley Rect. 2*, съответстващи на крайномерни пространства $P_K^{(1)}$ и $P_K^{(2)}$ от § 3.5.

И така, решаваме задачата от четвърти ред (3.62), като Ω е единичният квадрат. Областта е разделена на n^2 квадрата при $n = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$.

В следващите три таблици са дадени резултатите съответно при $\sigma = 0$, $\sigma = 0.2$ и $\sigma = 0.4$.

Стойностите, получени с елементи на Morley, са по-малки в сравнение с тези, получени с елементи на Adini. От друга страна, *Morley Rect. 2* дава като резултат стойности, по-малки от получените с *Morley Rect. 1*. Да отбележим, че при различните стойности на σ собствените стойности не се различават значително. И още, когато сгъстяваме мрежата, то – както трябва и да се очаква – приближените стойности нарастват. При използваната равномерна мрежа елементът на Adini дава по-добра точност, отколкото елементите на Morley [90]).

Таблица 3.4: $\sigma = 0$

n	FE	$\lambda_{1,h}$	$\lambda_{2,h}$	$\lambda_{3,h}$
4	Adini Morley Rect. 1 Morley Rect. 2	1185.550861 1075.856253 1003.056682	4944.317694 4481.455364 4107.340189	4994.393228 4481.455365 4107.340190
6	Adini Morley Rect. 1 Morley Rect. 2	1227.814307 1176.425531 1124.501624	5050.514618 4813.440264 4477.782647	5132.585691 4813.440273 4477.782658
8	Adini Morley Rect. 1 Morley Rect. 2	1254.152526 1223.107565 1187.878467	5164.790407 5017.690403 4770.160362	5219.985096 5017.690403 4770.160362
10	Adini Morley Rect. 1 Morley Rect. 2	1268.538691 1247.283599 1222.554932	5226.421147 5134.545543 4952.962699	5278.634005 5134.545543 4952.96269
12	Adini Morley Rect. 1 Morley Rect. 2	1274.357984 1261.177055 1243.088531	5258.865533 5205.062582 5068.724011	5308.864358 5205.062582 5068.724011
14	Adini Morley Rect. 1 Morley Rect. 2	1279.910030 1269.829067 1256.107378	5289.963146 5250.216225 5145.056836	5328.467291 5250.216225 5145.056836
16	Adini Morley Rect. 1 Morley Rect. 2	1283.199186 1275.559182 1264.829904	5307.705444 5280.646137 5197.493919	5342.189148 5280.646137 5197.493919

Таблица 3.5: $\sigma = 0.2$

n	FE	$\lambda_{1,h}$	$\lambda_{2,h}$	$\lambda_{3,h}$
4	Adini	1167.392908	4866.116932	4926.193944
	Morley Rect. 1	1057.618801	4398.948592	4398.948594
	Morley Rect. 2	921.4458637	3627.587470	3627.587470
6	Adini	1215.208358	4988.202047	5083.051923
	Morley Rect. 1	1166.225245	4763.560627	4763.560636
	Morley Rect. 2	1071.884836	4155.974453	4155.974469
8	Adini	1246.188992	5122.267661	5186.867398
	Morley Rect. 1	1216.857059	4985.492194	4985.492194
	Morley Rect. 2	1152.807576	4544.044664	4544.044664
10	Adini	1263.205943	5194.043910	5257.126840
	Morley Rect. 1	1243.117897	5112.480341	5112.480341
	Morley Rect. 2	1198.041584	4789.129515	4789.129515
12	Adini	1270.220003	5233.337835	5293.217308
	Morley Rect. 1	1258.219232	5189.140988	5189.140988
	Morley Rect. 2	1225.176934	4946.152953	4946.152953
14	Adini	1276.904152	5270.692384	5316.741609
	Morley Rect. 1	1267.626535	5238.240770	5238.240770
	Morley Rect. 2	1242.522634	5050.607108	5050.607108
16	Adini	1280.793015	5291.424872	5333.232331
	Morley Rect. 1	1273.858039	5271.335251	5271.335251
	Morley Rect. 2	1254.207050	5122.817328	5122.817328

Таблица 3.6: $\sigma = 0.4$

n	FE	$\lambda_{1,h}$	$\lambda_{2,h}$	$\lambda_{3,h}$
4	Adini	1148.142969	4779.924216	4855.627159
	Morley Rect. 1	1037.119084	4306.333945	4306.333946
	Morley Rect. 2	809.0136109	3029.474528	3029.474528
6	Adini	1201.581582	4920.475308	5031.813708
	Morley Rect. 1	1154.472436	4706.307176	4706.307184
	Morley Rect. 2	992.209823	3702.480128	3702.480153
8	Adini	1237.628351	5076.056998	5152.807114
	Morley Rect. 1	1209.582611	4948.137661	4948.137661
	Morley Rect. 2	1096.997380	4203.305352	4203.305353
10	Adini	1257.356652	5157.566415	5235.280538
	Morley Rect. 1	1238.244913	5086.730991	5086.730991
	Morley Rect. 2	1157.926487	4532.251519	4532.251519
12	Adini	1265.659499	5204.554917	5277.286588
	Morley Rect. 1	1254.749011	5170.495699	5170.495699
	Morley Rect. 2	1195.366116	4749.128480	4749.128480
14	Adini	1273.625955	5249.032775	5304.842281
	Morley Rect. 1	1265.037687	5224.185134	5224.185134
	Morley Rect. 2	1219.666376	4896.273070	4896.273070
16	Adini	1278.114091	5272.637524	5324.170234
	Morley Rect. 1	1271.856070	5260.390425	5260.390425
	Morley Rect. 2	1236.202455	4999.405814	4999.405814

Таблица 3.7: Подходът "неконформен-конформен метод" за основната собствена стойност при $\sigma = 0.2$ и $\sigma = 0$

	$\sigma = 0.2$		$\sigma = 0$	
n	$\lambda_{1,h}$	$\widetilde{\lambda}_{1,h}$	$\lambda_{1,h}$	$\widetilde{\lambda}_{1,h}$
4	1167.392908	1632.978596	1185.550861	1629.661664
6	1215.208358	1539.581756	1227.814307	1542.266216
8	1246.188992	1481.631502	1254.152526	1478.265953
10	1263.205943	1430.888621	1268.538691	1425.992665
12	1270.220003	1395.200465	1274.357984	1371.319310
14	1276.904152	1361.499261	1279.910030	1336.316003
16	1280.793015	1331.814826	1283.199186	1313.671528

Пример 3.5

Най-накрая ще направим числова реализация на подхода "неконформен-конформен метод". За тази цел ще си послужим с пресмятанията от Пример 3.4 чрез елементи на Adini при $\sigma = 0$ и $\sigma = 0.2$. Този елемент дава апроксимация отдолу на собствените стойности. Последващата стъпка извършваме с конформния елемент на Bogner-Fox-Schmit съгласно Алгоритъм 3.2. При пресмятанията единичният квадрат е разделен на n^2 на брой еднакви квадрата при $n = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$.

В Таблица 3.7 се илюстрира методът за първата (основна) собствена стойност λ_1 при $\sigma = 0$ и $\sigma = 0.2$. Резултатите потвърждават твърдението в Теорема 3.13. Редицата от приближения $\{\lambda_{1,h}\}$, получени с елементи на Adini, е растяща, докато редицата $\{\widetilde{\lambda}_{1,h}\}$, която е резултат от апостериорна процедура с елементи на Bogner-Fox-Schmit , е намаляваща.

В разглежданите случаи точната собствена стойност λ_1 е неизвестна при $\sigma = 0.2$, докато при $\sigma = 0$ имаме $\lambda_1 \approx 1295$ (виж [94, 108]).

Глава 4

Крайноелементно моделиране и анализ на задачи за греди

4.1 Въведение

Най-общо, една греда е твърдо деформируемо тяло, чиято най-важна характеристика е видът на нейното напречно сечение. Ако дължината на гредата е значително по-голяма от мярката на нейното напречно сечение, както и спрямо линейните размери на това сечение, то тя се нарича *тънка греда* и се отнася към моделните задачи с едномерна пространствена променлива. Теорията на тънките греди [130] заема основно място в приложната механика. Неслучайно най-известните CAD/CAM системи в машиностроенето притежават пакети приложни програми за проектиране и производство на гредови конструкции и обработващи инструменти, които програми използват тази теория.

Резултатите в настоящата глава имат принос в изчислителното математическо моделиране и по-специално в създаване на математическите модели на тънки греди върху еластични основи и тяхната крайноелементна интерпретация и реализация. Необходимо е най-напред да направим уговорката, че оттук нататък ще пропускаме определението *тънка*, т.е. разглежданите задачи ще използват едномерна пространствена променлива x. Там, където смисълът го изисква, ще използваме термините от теорията като *прът*, *перка* и други подобни, като тези термини чрез контекста няма да противоречат на даденото по-горе определение за тънка греда.

Нека в уводен смисъл накратко да изложим генезиса на математическата основа за разглежданите в главата задачи. Динамичните натоварвания върху материална греда или гредови конструкции довеждат до решаване на хиперболично частно диференциално уравнение от втори или четвърти ред [131]. Основният проблем от инженерната практика е да се определи (най-често приблизително) спектърът на основния елиптичен оператор, който участва в моделното диференциално уравнение. Намирането на първите собствени стойности служи и при якостното оразмеряване на разглеждания конструктивен или обработващ елемент. Ето защо въпреки инженерния характер на поставяните задачи, тук трябва да се преодолее едно сериозно математическо предизвикателство. Това е изводът на съответната вариационна задача (или задачи), върху която се прилага подходящ числен метод. Трудностите са провокирани от разнообразните зависимости, които влияят на моделиращото диференциално уравнение, както и от нестандартните гранични условия. От така направеното изложение е ясно, че МКЕ се явява един от най-естествените инструменти за анализ и разрешаване на поставените проблеми. Получаваните матрици на коравина и маса се диагонализират, като се използва свойството ортогоналност на собствените вектори (метод на нормалните форми [131]).

Задачите от тази глава са разделени преди всичко в зависимост от вида на основата, върху която е разположена гредата. Еластичната основа предполага линейна функция на преместванията, която води до постоянни коефициенти в моделното диференциално уравнение. Важен частен случай е Винклеровата основа, при която коравината на основата се променя с времето [131]. При този случай коефициентите в моделната задача не са постоянни и дори уравнението може да се окаже нелинейно. Анализирани са две конкретни приложения. Едното се отнася до динамиката на режещ инструмент върху Винклерова основа, реализирана чрез тричелюстник. За определянето на динамичните напрежения в инструмента се предлага вариационен подход от смесен тип. Другата задача има отношение към оразмеряване чрез компютърно проектиране на перките на ветрогенератор. Известно е, че динамиката на ветрогенератор се моделира с динамиката на въртящи се греди [47].

Разглежданията в тази глава следват стратегия, която – по убеждение на автора – е една от важните предпоставки за развитие на съвременните математически методи и за разширяване на тяхната роля и приложение в механиката, а именно: при получаване на комплициран и труден за теоретичен анализ и числово решаване модел да не се преминава към опростенчески допускания, а да се използват разнообразните възможности и средства, които математическата теория предоставя (§ 4.3 – § 4.5). Нека накрая да подчертаем, че изучаваните свойства на греди, подложени на динамични натоварвания, имат приложения при конструкции с по-голяма пространствена размерност [132].

Резултатите в тази глава са публикувани в [10, 11, 12, 13, 112].

4.2 МКЕ за пресмятане на динамични напрежения в непрекъсната греда на еластична основа

Едно от многобройните приложения на теорията на линейната еластичност е моделирането на греда върху линейни еластични опори. Тази ситуация възниква в много случаи от инженерната практика и изучаването на динамичните и якостни характеристики на непрекъснатите греди играе важна роля в механиката на твърдото тяло. Най-често върху гредата са приложени сили, зависещи от времевата променлива. Тогава гредата проявява свойствата на материална линейност и геометрична нелинейност, която е следствие от едновременното въздействие на огъвния момент и/или напречно и аксиално натоварване. В този случай безкрайно малките деформации се определят във всяка точка на разглежданата греда от тензора на Cauchy ϵ_{ij}. Напреженията в точките и аксиалните натоварвания са в нелинейна зависимост [130].

Задачата би била значително по-лека, ако външните въздействия бяха статични. Ние обаче се интересуваме от греда върху еластични опори, подложена на променливи външни въздействия, както е отразено на Фиг. 4.1. Това е модел на амортисьорна непрекъсната греда с концентрирана маса в левия си край.

В настоящия параграф усилията ни са в посока да предложим метод за пресмятане на динамичните напрежения. За целта ще направим общ математически модел на разглежданата задача, вариационна постановка и метод на нормалните форми, съчетан с МКЕ.

И така, да означим с $C_i, i = 1, 2, 3$ коравините или деформационните съпротивления на еластичните опори. Нека ρ е плътността на гредата, а w_i и $F_i, i = 1, 2$ да са преместванията и лицата на напречните сечения съответно в двете части на гредата.

Общият математически модел на еластичната линия на гредата ще бъде изведен при следните условия:

- Кривата (еластичната линия), описваща натоварената греда, е функция на абсцисата x и на времевата променлива t;

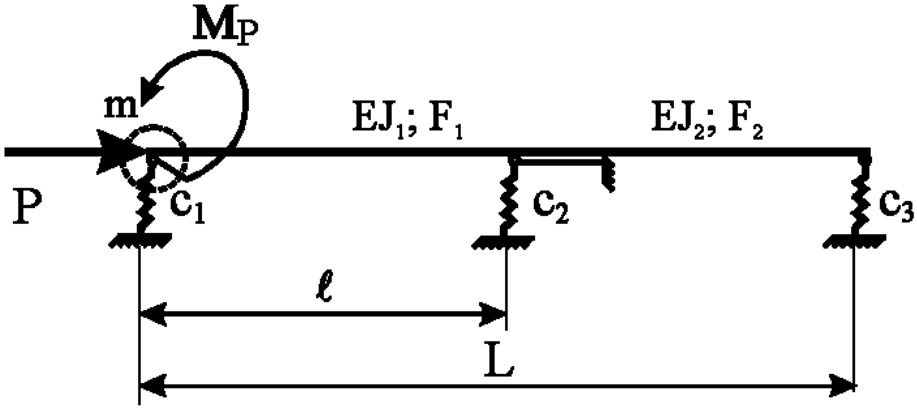
- Механичният товар се състои от аксиална сила $\mathcal{P}$ (която е променлива) и от концентриран момент $\mathcal{M}_p(t)$;

- Инерционното натоварване е резултат от напречните трептения с интензитет $\rho F(x)\dfrac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}$ в равнината xw;

- Затихването (демфиращият ефект) се разпределя с демфиращ коефициент ζ;

- Геометричната нелинейност (диференциалната коравина) е в резултат от аксиалната сила $\mathcal{P}$, отразена като равнинна крива;

- Линейната зависимост между премествания и деформации ни позволява да представим кривината само чрез втората производна на преместванията спрямо x [130], т.е.:
$$K_{x,w} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$



Фигура 4.1: Демфираща непрекъсната греда върху три линейни еластични опори

- Огъвните моменти са пропорционални на кривините, т.е.:

$$M_w = -K_{x,w} EJ(x),$$

  където $EJ(x)$ е еластична коравина;

- Съществува следната зависимост между огъвния момент $M_w(x)$ и срязващата сила Q_w:

$$\frac{\partial M_w}{\partial x} = Q_w - \mathcal{N}\frac{\partial w}{\partial x},$$

  където $\mathcal{N}$ е силата по посока на нормалата на гредата;

- Съществува следната зависимост между огъвния момент $M_w(x)$ и интензитета q_w на разпределения товар:

$$\frac{\partial^2 M_w}{\partial x^2} = \frac{\partial Q_w}{\partial x} = -q_w.$$

Следователно, общият математически модел, описващ еластичната линия на гредата, е следният:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ_1(x)\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right] + P\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + [\rho\ F_1(x) + m\ \delta(x)]\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\ +\zeta\ \rho\ F_1(x)\ \frac{\partial w_1}{\partial t} = 0; \quad 0 < x < l, \qquad (4.1) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ_2(x)\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right] + \rho\ F_2(x)\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \zeta\ \rho\ F_2(x)\ \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0; \quad l < x < L, \end{aligned}$$

където $\delta(x)$ е функцията на Dirac.

Уравнението (4.1) се разглежда заедно с началните условия:

$$w_i(x,0) = w_i^0(x); \quad \frac{\partial w_i}{\partial t}(x,0) = w_i^1(x), \quad i = 1;2, \tag{4.2}$$

където

$$w_i^0(x) \text{ и } w_i^1(x), \quad i = \begin{cases} 1, & x \in [0,l], \\ 2, & x \in [l,L], \end{cases}$$

са дадени функции на x.

Забележка 4.1 *Ако непрекъснатата греда е съставена от n части, т.е. тя се разделя в точките на демфиращите пружини, то $J(x)$ и $F(x)$ се дефинират посредством единичната функция на Heaviside η:*

$$\begin{aligned} F(x) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (F_k - F_{k-1})\ \eta(x - x_{k-1}), \\ J(x) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (J_k - J_{k-1})\ \eta(x - x_{k-1}), \end{aligned}$$

като $F_0 = J_0 = 0$.

Да поставим и граничните условия в точките $x = 0; l$ и L (*силови гранични условия*):

$$\begin{gathered} \frac{EJ_1(0)}{C_1}\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}(0) + \frac{P}{C_1}\ \frac{\partial w_1}{\partial x}(0) = w_1(0), \\ EJ_1(0)\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(0) = -\mathcal{M}_w(0) = -\mathcal{M}, \\ \frac{EJ_1(l)}{C_2}\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}(l) + \frac{P}{C_2}\ \frac{\partial w_1}{\partial x}(l) = -w_1(l), \\ \frac{EJ_2(l)}{C_2}\ \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}(l) = w_2(l), \\ \frac{EJ_2(L)}{C_3}\ \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}(L) = -w_2(L), \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(L) = 0. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Ще добавим също и условията за непрекъснатост и гладкост (*геометрични гранични условия*):

$$w_1(l) = w_2(l), \quad \frac{\partial w_1}{\partial x}(l) = \frac{\partial w_2}{\partial x}(l). \tag{4.4}$$

Тези равенства се явяват условия за съгласуваност между двете неизвестни функции $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$.

Най-напред ще приемем две опростяващи допускания, които са в съответствие с реалните инженерни задачи:

(i) Демфиращата сила, разпределена върху цялата греда, е пренебрежима и ние няма да я отчитаме;

(ii) Напречните сечения на двете части на гредата са постоянни, т.е. F_1 и F_2 са константи, както и J_1, J_2.

Ще прехвърлим члена от (4.1), съдържащ $\delta(x)$, в граничните условия. Тогава поради направените хипотези (4.1) ще добие вида:

$$\begin{aligned}
&EJ_1\,\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + P\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \rho\,F_1\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0, \qquad (x,t)\in(0,l)\times(0,T),\\
&EJ_2\,\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \rho\,F_2\,\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = 0, \qquad (x,t)\in(l,L)\times(0,T).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Отново са валидни началните условия (4.2), но граничните условия (4.3) и (4.4) ще добият вида:

$$\frac{EJ_1}{C_1}\,\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}\bigg|_{x=0} + \frac{P}{C_1}\,\frac{\partial w_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} - w_1(0) = \frac{m}{C_1}\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=0}, \tag{4.6}$$

$$EJ_1\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = -\mathcal{M}\ \sin\overline{\omega}t, \tag{4.7}$$

където $\overline{\omega}$ е ъгловата скорост на вектора на външния огъващ момент,

$$\frac{EJ_1}{C_2}\,\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}\bigg|_{x=l} + \frac{P}{C_2}\,\frac{\partial w_1}{\partial x}\bigg|_{x=l} + w_1(l) = 0, \tag{4.8}$$

$$\frac{EJ_2}{C_2}\,\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}\bigg|_{x=l} - w_2(l) = 0, \tag{4.9}$$

$$\frac{EJ_2}{C_3}\,\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}\bigg|_{x=L} + w_2(L) = 0, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\bigg|_{x=L} = 0, \tag{4.11}$$

$$w_1(l) = w_2(l), \tag{4.12}$$

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial x}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{x=l}. \tag{4.13}$$

Условията за съгласуване (4.12) и (4.13) ни подтикват да въведем следните означения:

$$W(x;t) = \begin{cases} w_1(x;t), & x \in [0,l], \\ w_2(x;t), & x \in [l,L]; \end{cases} \qquad \mathcal{P}(x) = \begin{cases} P, & x \in [0,l], \\ 0, & x \in [l,L]; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} F_1, & x \in [0,l], \\ F_2, & x \in (l,L]; \end{cases} \qquad J(x) = \begin{cases} J_1, & x \in [0,l], \\ J_2, & x \in (l,L]. \end{cases}$$

Следователно, задача (4.5)-(4.13) придобива вида:

$$EJ(x)\,\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \mathcal{P}(x)\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho F(x)\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T),$$

$$\left[\frac{EJ(x)}{C_1}\,\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\mathcal{P}(x)}{C_1}\,\frac{\partial W}{\partial x} - W\right]_{x=0} = \frac{m}{C_1}\,\left.\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right|_{x=0},$$

$$EJ(x)\,\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_{x=0} = -\mathcal{M}\,\sin\varpi t,$$

$$\left[\frac{EJ(x)}{C_2}\,\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\mathcal{P}(x)}{C_2}\,\frac{\partial W}{\partial x} \mp W\right]_{x=l^\pm} = 0,$$

$$\left[\frac{EJ(x)}{C_3}\,\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + W\right]_{x=L} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0.$$

Тъй като разглежданата материална система е вибрираща, то ще подходим по следния начин: Да предположим, че функцията $W(x;t)$ е имагинерната част на функцията $\overline{W}(x;t)$. Тогава за всяко $t \in [0,T], W(x;t) \in C^1[0,l]$ и нека $\overline{W}(x;t)$ е решение на диференциалната система:

$$EJ(x)\ \frac{\partial^4 \overline{W}}{\partial x^4} + \mathcal{P}(x)\ \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2} + \rho F(x)\ \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial t^2} = 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \tag{4.14}$$

$$\left[\frac{EJ(x)}{C_1}\frac{\partial^3 \overline{W}}{\partial x^3} + \frac{\mathcal{P}(x)}{C_1}\frac{\partial \overline{W}}{\partial x} - \overline{W}\right]_{x=0} = \frac{m}{C_1}\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial t^2}\bigg|_{x=0}, \tag{4.15}$$

$$EJ(x)\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = -\mathcal{M}e^{i\overline{\omega}t}, \tag{4.16}$$

$$\left[\frac{EJ(x)}{C_2}\frac{\partial^3 \overline{W}}{\partial x^3} + \frac{\mathcal{P}(x)}{C_2}\frac{\partial \overline{W}}{\partial x} \mp \overline{W}\right]_{x=l^\pm} = 0, \tag{4.17}$$

$$\left[\frac{EJ(x)}{C_3}\frac{\partial^3 \overline{W}}{\partial x^3} + \overline{W}\right]_{x=L} = 0, \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2}\bigg|_{x=L} = 0. \tag{4.19}$$

Ще търсим решението на задача (4.14)-(4.19) чрез разделяне на променливите:

$$\overline{W}(x;t) = X(x)e^{i\omega t},$$

където $i = \sqrt{-1}$ и $\lambda = \omega^2$ е непринудената (собствена) честота на вибриращата греда.

Следователно, решаваме диференциалното уравнение

$$EJ(x)X^{IV} + \mathcal{P}(x)X'' = \lambda\rho F(x)X, \quad x \in (0,L) \tag{4.20}$$

с гранични условия

$$EJ(0)X'''(0) + \mathcal{P}(0)X'(0) - C_1X(0) = -\lambda m X(0), \tag{4.21}$$

$$EJ(0)X''(0) = -\mathcal{M}, \tag{4.22}$$

$$EJ(l^\pm)X'''(l^\pm) + \mathcal{P}(l^\pm)X'(l^\pm) \mp C_2X(l^\pm) = 0, \tag{4.23}$$

$$EJ(L)X'''(L) + C_3 X(L) = 0, \tag{4.24}$$

$$X''(L) = 0. \tag{4.25}$$

За да приложим някой вариационен числен метод и в частност МКЕ, ще представим (4.20)-(4.25) в слаба форма. Това ще ни позволи получаване на приближено решение и за задача (4.14)-(4.19).

Да умножим спектралната задача (4.20)-(4.25) с вариационната функция $y(x) \in H^2[0,L]$. Интегрираме по части лявата страна на (4.20) и получаваме:

$$\int_0^L \left[EJ(x)X^{IV} + \mathcal{P}(x)X''\right] y\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{l-\varepsilon}\left[EJ_1X^{IV} + PX''\right] y\,dx + \int_{l+\varepsilon}^{L} EJ_2X^{IV} y\,dx\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ (EJ_1X''' + PX')y\big|_{x=l-\varepsilon} - EJ_2X'''y\big|_{x=l+\varepsilon}\right\}$$

$$+EJ(L)X'''(L)y(L) - \left[EJ(0)X'''(0) + \mathcal{P}X'(0)\right]\ y(0)$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{l-\varepsilon} EJ_1X'''y'\,dx + \int_0^{l-\varepsilon} PX'y'\,dx + \int_{l+\varepsilon}^{L} EJ_2X'''y'\,dx\right\}$$

$$= -2C_2X(l)y(l) - C_3X(L)y(L) - C_1X(0)y(0) + \lambda mX(0)y(0)$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{l-\varepsilon}\mathcal{P}(x)X'y'\,dx - \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{l-\varepsilon} y'\,d(EJ_1X'') + \int_{l+\varepsilon}^{L} y'\,d(EJ_2X'')\right\}$$

$$= -C_1X(0)y(0) - 2C_2X(l)y(l) - C_3X(L)y(L) + \lambda mX(0)y(0)$$

$$-\int_0^L \mathcal{P}(x)X'y'\,dx - \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ EJX''y'\big|_{x=l-\varepsilon} - EJX''y'\big|_{x=l+\varepsilon}\right\}$$

$$+EJ(0)X''(0)y'(0) - EJ(L)X''(L)y'(L)$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{l-\varepsilon} EJX''y''\,dx + \int_{l+\varepsilon}^{L} EJX''y''\,dx\right\},$$

следователно

$$\int_0^L \left[EJ(x)X^{IV} + \mathcal{P}(x)X''\right] y\,dx = \int_0^L \left[EJ(x)X''y'' - \mathcal{P}(x)X'y'\right] dx$$

$$-\mathcal{M}y'(0) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[EJ(l+\varepsilon)X''(l+\varepsilon) - EJ(l-\varepsilon)X''(l-\varepsilon)\right] y'(l)$$

$$-C_1X(0)y(0) - 2C_2X(l)y(l) - C_3X(L)y(L) + \lambda mX(0)y(0).$$

Окончателно, слабата формулировка на спектралната задача (4.20)-(4.25) е: Да се намери число λ и ненулева функция $X(x) \in C^1(0, L) \cap H^2[0, L]$ такава, че

$$a\langle X, y\rangle = \lambda b\langle X, y\rangle, \quad \forall\ y(x) \in H^2[0, L], \tag{4.26}$$

където

$$a\langle X, y\rangle = a_1(X, y) + a_2\langle X, y\rangle,$$
$$b\langle X, y\rangle = b_1(X, y) + a_3\langle X, y\rangle.$$

Билинейните форми $a_1(\cdot,\cdot), a_2\langle\cdot,\cdot\rangle, a_3\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $b_1(\cdot,\cdot)$ са следните:

$$a_1(X, y) = \int_0^L \left[EJ(x)X''y'' - \mathcal{P}(x)X'y'\right] dx,$$

$$a_2\langle X, y\rangle = -C_1X(0)y(0) - 2C_2X(l)y(l) - C_3X(L)y(L)$$

$$-\mathcal{M}y'(0) + \left[EJ(l+\varepsilon)X''(l+\varepsilon) - EJ(l-\varepsilon)X''(l-\varepsilon)\right] y'(l),$$

$$a_3\langle X, y\rangle = -mX(0)y(0),$$

$$b_1(X, y) = \int_0^L \rho F(x)Xy\,dx.$$

От тези четири форми само $a_2\langle\cdot,\cdot\rangle$ не е симетрична. Следователно, в общия случай задача (4.26) няма симетрично представяне в слаба формулировка.

Със същия подход може да представим и хиперболичната задача (4.14)-(4.19) във вариационен вид. За $t \in (0, T)$ имаме:

$$\widetilde{a}\langle \overline{W}, y\rangle = \frac{d^2}{dt^2}\widetilde{b}\langle \overline{W}, y\rangle, \tag{4.27}$$

където

$$\widetilde{a}\langle \overline{W}, y\rangle = \widetilde{a}_1(\overline{W}, y) + \widetilde{a}_2\langle \overline{W}, y\rangle,$$

$$\widetilde{b}\langle \overline{W}, y\rangle = \widetilde{b}_1(\overline{W}, y) + \widetilde{a}_3\langle \overline{W}, y\rangle.$$

Съответните билинейни форми са ($y \in H^2[0, L]$):

$$\widetilde{a}_1(\overline{W}, y) = \int_0^L \left[EJ(x) \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2} \, \frac{d^2 y}{dx^2} - \mathcal{P}(x) \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} \, \frac{dy}{dx} \right] dx,$$

$$\widetilde{a}_2\langle \overline{W}, y\rangle = -C_1 \overline{W}(0;t) y(0) - 2C_2 \overline{W}(l;t) y(l) - C_3 \overline{W}(L;t) y(L)$$

$$-\mathcal{M} e^{i\omega t} y'(0) + \left[EJ(x) \left. \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2} \right|_{x=l+\varepsilon} - EJ(x) \left. \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2} \right|_{x=l-\varepsilon} \right] y'(l),$$

$$\widetilde{a}_3\langle \overline{W}, y\rangle = m \overline{W}(0;t) y(0),$$

$$\widetilde{b}_1(\overline{W}, y) = -\int_0^L \rho F(x) \overline{W} y \, dx.$$

Решението на хиперболичното уравнение (4.5) (или (4.14)) е функция, зависеща от времето t, изменящо се в интервала $(0, T)$. Ще извършим крайноелементна дискретизация по променливата x, като по този начин ще достигнем до решаване на система от обикновени диференциални уравнения относно променливата t. За целта ще приложим метода на нормалните форми [131, 132].

Тъй като задачата, която приближаваме, е от четвърти ред, то апроксимиращите полиноми са от степен не по-малка от p, $p \geq 3$. Крайноелементното пространство V_h е подпространство на $H^2(0, L)$, а h, както обикновено, ще означава мрежовия параметър.

Полудискретното приближение на (4.27) е: Да се намери функция $W_h(t) \in V_h$ такава, че за всяко $z_h \in V_h$ да е изпълнено равенството

$$\widetilde{a}\langle W_h(t), z_h\rangle = b\langle \frac{d^2 W_h}{dt^2}, z_h\rangle, \tag{4.28}$$

с начални условия

$$W_h(0) = W_{0,h} \quad \text{и} \quad \frac{dW_h}{dt}(0) = W_{1,h}.$$

Функциите $W_h(t)$, $W_{0,h}$ и $W_{1,h}$ се развиват по базиса на V_h. Тогава от (4.28) получаваме диференциалната система:

$$[M]\left\{\ddot{X}\right\} + [K]\left\{X\right\} = \left\{\widetilde{\mathcal{P}}(t)\right\}, \tag{4.29}$$

където $[M]$ и $[K]$ са глобалните матрици съответно на маса и коравина, а $\left\{\widetilde{\mathcal{P}}(t)\right\}$ е векторът на еквивалентното съсредоточено натоварване, зависещо от времето. Точките върху неизвестния вектор означават производни относно времевата променлива.

Ако отчетем и демфирането в моделната крайноелементна задача, то ще се появи и производна от първи ред:

$$[M]\left\{\ddot{X}\right\} + [C]\left\{\dot{X}\right\} + [K]\left\{X\right\} = \left\{\widetilde{\mathcal{P}}(t)\right\}. \tag{4.30}$$

От практическа гледна точка демфиращата матрица $[C]$ обикновено се предполага да е линейна комбинация на останалите две матрици (*демфиране по Rayleigh*), т.е.

$$[C] = \alpha[K] + \beta[M], \quad \alpha = \text{const}; \ \beta = \text{const}.$$

От непрекъснатостта и устойчивостта на билинейната форма $\widetilde{a}\langle\cdot,\cdot\rangle$ в (4.28) ще следва оценка за устойчивост (виж напр. [80, 103]). Това позволява да се докаже сходимост на $W_h(t)$ от (4.28) към $\overline{W}$ при $h \to 0$ и съответните оценки в зависимост от по части полиномиалното пространство V_h.

Ще приложим метода на нормалните форми [131], като за тази цел разгледаме съответната елиптична спектрална задача. В матричен вид тя е:

$$[K]\left\{\overline{X}\right\} = \lambda[M]\left\{\overline{X}\right\},$$

където $\lambda > 0$ е непринудената честота при трептене (вибрация) на системата.

След това образуваме матрицата $\left[\overline{X}\right]$, чиито стълбове са първите собствени вектори. Тази матрица определя така наречените обобщени координати посредством уравнението:

$$\left[\overline{X}\right]^{-1} \{X\} = \{X_G\}.$$

В това уравнение $\{X_G\}$ е векторът на обобщените координати. Като се възползваме от ортогоналното свойство на собствените вектори, можем да диагонализираме матриците на маса и коравина (тук T е знак за транспониране):

$$\left[\overline{X}\right]^T [K] \left[\overline{X}\right] = [K_G],$$

$$\left[\overline{X}\right]^T [M] \left[\overline{X}\right] = [M_G].$$

Следователно, нашата схема е с концентрирана (lumped) маса и коравина [131].

За (4.30) лесно ще следва представянето

$$[M_G]\left\{\ddot{X}_G\right\} + (\alpha[K_G] + \beta[M_G])\left\{\dot{X}_G\right\} + [K_G]\left\{X_G\right\} = \left[\overline{X}\right]^T \left\{\widetilde{\mathcal{P}}(t)\right\}.$$

Като вземем предвид, че $[M_G]$ и $[K_G]$ са диагонални матрици, то за $i-$тото уравнение на движение на системата, което описва $i-$тата функция на формата получаваме:

$$\ddot{x}_{G,i} + 2\xi_i \dot{x}_{G,i} + \lambda_i x_{G,i} = q_i \ \sin(\overline{\omega}t + \varphi), \tag{4.31}$$

където $\xi_i = \dfrac{1}{2}(\alpha\lambda_i^2 + \beta)$ е модален демфиращ коефициент, а $q_i = \dfrac{1}{m_{G,i}}\left\{\overline{X}\right\}^T \{\mathcal{M}\}$ е силата, въздействаща в $i-$тата обобщена координата за единица маса.

Решаваме линейното нехомогенно обикновено диференциално уравнение (4.31) за $i = 1, 2, \ldots$. Определянето на принудените (силови) честоти е от основно значение и интерес в инженерната практика, понеже свободните (непринудени) честоти бързо затихват поради демфирането. От (4.31) (дясната част) се вижда още, че принудените честоти имат вида

$$x_{G,i} = A_i \ \sin(\overline{\omega}t + \psi_i), \tag{4.32}$$

където A_i и ψ_i са неизвестни константи. За тяхното определяне ще заместим (4.32) в (4.31).

Получаваме:

$$A_i(\lambda_i^2 - \overline{\omega}^2) \ \sin(\overline{\omega}t + \psi_i) + 2\xi_i\overline{\omega}A_i \ \cos(\overline{\omega}t + \psi_i) = q_i \ \sin(\overline{\omega}t + \varphi). \tag{4.33}$$

Нека сега да положим $\overline{\omega}t + \psi_i = \theta_i$. Тогава $\sin(\overline{\omega}t + \varphi)$ се трансформира по следния начин:

$$\sin(\overline{\omega}t + \varphi) = \sin(\overline{\omega}t + \psi_i + \varphi - \psi_i)$$

$$= \sin\theta_i \ \cos(\varphi - \psi_i) + \cos\theta_i \ \sin(\varphi - \psi_i).$$

Тогава уравнение (4.33) добива вида

$$A_i(\lambda_i - \overline{\omega}^2) \ \sin\theta_i + 2\xi_i\overline{\omega}A_i \ \cos\theta_i$$

$$= q_i \ (\sin\theta_i \ \cos(\varphi - \psi_i) + \cos\theta_i \ \sin(\varphi - \psi_i)).$$

Това равенство ни дава зависимостите

$$A_i(\lambda_i - \overline{\omega}^2) = q_i \ \cos(\varphi - \psi_i),$$

$$2\xi_i \overline{\omega} A_i = q_i \ \sin(\varphi - \psi_i).$$

От тези две уравнения лесно намираме двете неизвестни A_i и ψ_i:

$$A_i = \frac{q_i}{\sqrt{(\lambda_i - \overline{\omega}^2)^2 + 4\xi_i^2 \overline{\omega}^2}},$$

$$\psi_i = \varphi - \arctan \frac{2\xi_i \overline{\omega}}{\lambda_i - \overline{\omega}^2}.$$

Така намерените стойности заместваме в (4.32). След като определим вектора X_G, ще получим решението в неговите оригинални (физически) координати (виж [131]):

$$X = \left[\overline{X}\right] X_G.$$

4.3 Модел на греда върху основа с променлива коравина от Винклеров тип

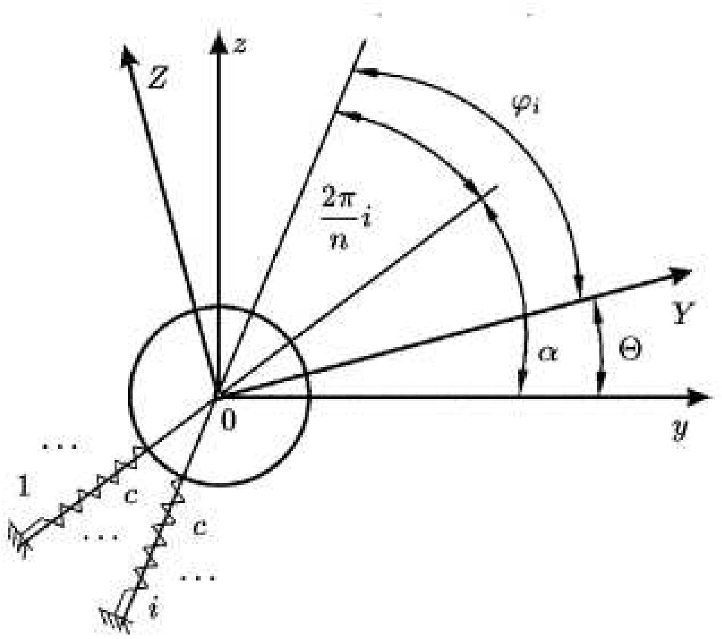
Сега ще изучим задача за динамичните натоварвания на греда, аналогична на разгледаната в предходния параграф. Този път обаче гредата е разположена върху еластична основа от Винклеров тип [130]. При нея отново се предполага, че е налице свойството линейна еластичност, но коефициентът на коравина на основата не е един и същ за всяко направление, перпендикулярно на оста на разглежданата тънка греда.

Тази ситуация възниква като модел на много инженерни задачи от металообработването: въпросната греда е неподвижна или извършва въртеливо движение, като част от нея е хваната с патронник. Тази част може да бъде от самия режещ инструмент, или пък е от заготовката, която се обработва. Свободният край на гредата е подложен на действието на напречна срязваща сила. Най-често тази сила предизвиква огъващ момент във всяко напречно сечение на гредата.

Основна задача в този параграф е да дадем математическия модел, който описва еластичната линия на гредата. Ясно е, че могат да се дефинират два типа задачи в зависимост от действието на напречната сила върху гредата:

- Напречната сила се върти около оста на инструмента/заготовката. Това е случай на "въртящ инструмент – неподвижна заготовка";

- Напречната сила е неподвижна – тогава се получава "въртяща се заготовка – неподвижен обработващ инструмент".



Фигура 4.2: Напречно сечение на греда върху n еластични опори

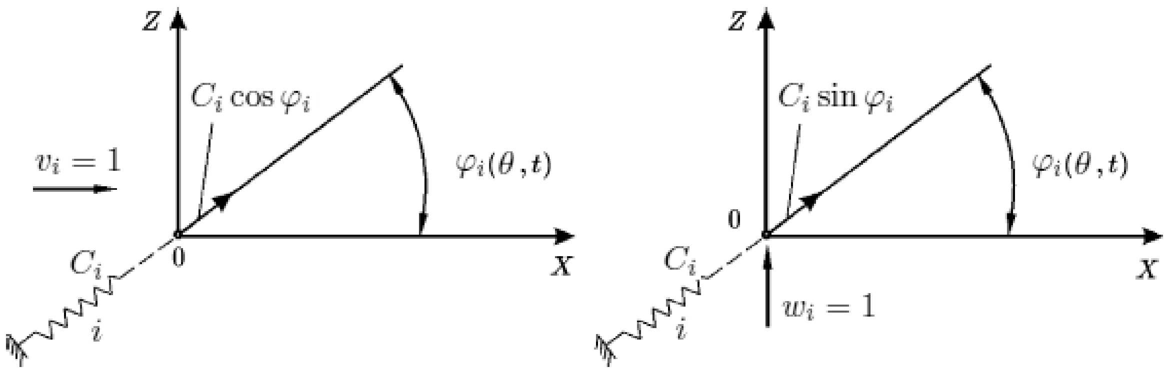
Модел на конзолно закрепена греда върху основа от Винклеров тип може да бъде приложен и към двата случая. Коефициентът на коравина на основата няма да бъде постоянен. Той ще зависи от ротационния ъгъл на напречната въздействаща сила. Следователно, той е функция на времевата променлива.

Ще приложим нов и оригинален подход към поставения проблем. За да определим динамичните напрежения на греда върху Винклерова основа, ще сведем задачата към крайноелементен анализ на непрекъсната греда върху еластични опори, който проблем разгледахме в предходния параграф.

И така, пространствено разположената греда в нейната "Винклерова" част е поставена върху n на брой еластични опори, безкрайно близки една до друга в направление на оста на гредата. Можем да считаме, че на произволно разгледано напречно сечение съответства опора (пружина). Нека $i-$тата пружина е с коравина C_i, $i = 1, \ldots, n$. Осите на тези еластични опори се пресичат върху оста и всяка сключва със съседните оси равни ъгли (виж Фиг. 4.2).

Ако определим положението на пружините върху неподвижна Декартова координатна система Oyz, то може да дефинираме въртяща се ортогонална система OYZ с ъглова скорост $\omega = \text{const}$.

Отначало осите Oy и OY съвпадат. Във всеки момент t ъгълът на завъртане на OYZ е $\theta = \omega t$. Трябва да определим матрицата на коравина за всяка една от опорите, отнесени към OYZ. В този случай, коравината в точката O в посока OY (или OZ) ще се изрази чрез коефициента на Винклеровата основа. Както подчертахме, този коефициент е функция на ъгъла θ и следователно – на променливата t. Ситуацията за $i-$тата пружина е представена на Фиг. 4.3.



Фигура 4.3: Влияние на Винклеровата коравина върху $i-$тата опора

Проекциите R_{iY} и R_{iZ} на реакциите в точката O при едновременните премествания $v_i = 1$ и $w_i = 1$ са:

$$\begin{aligned} R_{iY} &= C_i \cos\varphi_i \cos\varphi_i + C_i \sin\varphi_i \cos\varphi_i, \\ R_{iZ} &= C_i \cos\varphi_i \sin\varphi_i + C_i \sin\varphi_i \sin\varphi_i. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Да означим поточковото преместване с вектора $\{\delta_i\} = [v_i w_i]^T$. Тогава, зависимостта (4.34) записваме в матричен вид:

$$\{R_i\} = [K_{ii}]\,.\{\delta_i\},$$

където

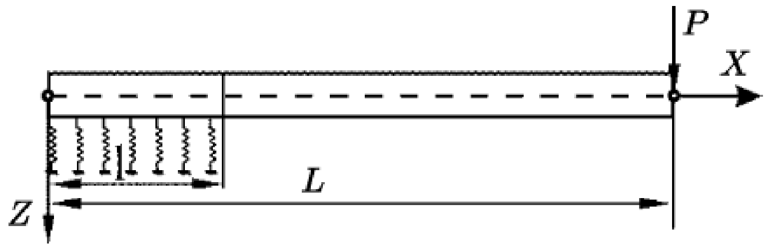
$$[K_{ii}] = C_i \begin{pmatrix} \cos^2\varphi_i & \sin\varphi_i \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \cos\varphi_i & \sin^2\varphi_i \end{pmatrix},$$

$$\varphi_i = \frac{2\pi}{n} i - \omega t. \tag{4.35}$$

За глобалната матрица на коравина получаваме:

$$[K] = \sum_{i=1}^{n} C_i \begin{pmatrix} \cos^2\varphi_i & \sin\varphi_i \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \cos\varphi_i & \sin^2\varphi_i \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Нека да предположим, че въртящата се напречна сила е в равнината xZ, т.е. силата е успоредна на OZ (Фиг. 4.4). Тогава равнината xZ се явява инерционната равнина на гредата. Функцията $W(x)$ ще изразява преместването на гредата, отчетено по оста OZ.



Фигура 4.4: Гредата и нейната инерционна равнина

Математическият модел за еластичната линия на греда върху Винклерова основа се определя при следните условия:

- Еластичната линия е функция на абсцисата x и на времевата променлива t;
- Инерционното натоварване е следствие от напречните осцилации (трептения) в равнината xZ с интензитет, равен на $\rho F(x)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, където ρ е плътността на гредата, а $F(x)$ е лицето на напречното ѝ сечение в точка x;
- Разпределеният реактивен товар вследствие на основата от Винклеров тип има интензитет C_Z. Той може да бъде определен от (4.36) и (4.35), като положим $\alpha = 0$ и имайки предвид, че $v_i = 0$:

$$C_Z = \sum_{i=1}^{n} C_i \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}i - \omega t\right).$$

  Последната зависимост може да бъде представена във вида:

$$C_Z = A - B\cos 2\omega t - D\sin 2\omega t,$$

  където

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} C_i,\ B = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} C_i \cos\frac{4\pi i}{n},\ D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} C_i \sin\frac{4\pi i}{n};$$

- Съществува линейна зависимост между преместванията и деформациите. Това ни дава възможност да определим кривината само чрез втората производна на неизвестната функция по отношение на x:

$$K_{xZ} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2};$$

- Огъвният момент е пропорционален на кривината:

$$M_y = -K_{xZ} EJ(x),$$

  където $EJ(x)$ е еластичната коравина, E е модул на еластичността (*модул на Young*) и $J(x)$ е аксиалният инерционен момент.

Да дефинираме непрекъснатата функция $W(x,t)$ по следния начин:

$$W(x;t) = \begin{cases} \overline{W}(x,t), & x \in [0,l], \\ & \qquad\qquad t \in [0,T]. \\ \widehat{W}(x,t), & x \in [l,L], \end{cases}$$

Както и в предходния параграф, ще предполагаме две опростяващи условия:

(i) Разпределеното демфиране върху гредата е пренебрежимо;

(ii) Двете части на гредата имат постоянно сечение, а също така $J = \text{const}$.

Тогава общият математически модел на разглежданата задача е следният:

$$\begin{aligned} & EJ\frac{\partial^4\overline{W}}{\partial x^4} + \rho F\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial t^2} \\ & \qquad + (A - B\cos 2\omega t - D\sin 2\omega t)\,\overline{W} = 0,\ 0 < x < l, \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$EJ\frac{\partial^4\widehat{W}}{\partial x^4} + \rho F\frac{\partial^2\widehat{W}}{\partial t^2} = 0,\ l < x < L.$$

На тази моделна диференциална система ще добавим началните условия

$$\begin{aligned} & \overline{W}(x,0) = \overline{W}^0(x), \quad \frac{\partial\overline{W}}{\partial t}(x,0) = \overline{W}^1(x), \\ & \widehat{W}(x,0) = \widehat{W}^0(x), \quad \frac{\partial\widehat{W}}{\partial t}(x,0) = \widehat{W}^1(x), \end{aligned} \tag{4.38}$$

където $\overline{W}^i(x)$ и $\widehat{W}^i(x)$ са дадени функции, а

$$i = \begin{cases} 0, & x \in [0,l], \\ 1, & x \in [l,L]. \end{cases}$$

Двете уравнения (4.37) могат да бъдат обединени чрез единичната функция на Heaviside $\eta(x),\ x \geq 0$:

$$\begin{aligned} & EJ\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho F\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ & \qquad + (A - B\cos 2\omega t - D\sin 2\omega t)\,(\eta(x) - \eta(x-l))\,W = 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Ще разгледаме граничните условия, свързани с диференциалното уравнение (4.39):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(0,t)=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(L,t)=0, \\
&\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(0,t)=0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(L,t)=\frac{P}{EJ},
\end{aligned} \tag{4.40}$$

където P е срязваща сила и тя действа и в точката $x = l$.

Тогава

$$\frac{\partial^3 \overline{W}}{\partial x^3}(l,t)=\frac{\partial^3 \widehat{W}}{\partial x^3}(l,t)=\frac{P}{EJ}. \tag{4.41}$$

Трябва да добавим и условията за гладкост на функцията W. Функциите $W^{(s)}(x,t),\ s = 0, 1$, са непрекъснати за всяко $x \in [0, L],\ t > 0$.

Също така, нека да отбележим, че функцията на огъвния момент $M(x)$ е непрекъсната в точката $x = l$. Еластичната коравина за всяко напречно сечение на гредата е $EJ = \text{const}$ за $x \in [0, l]$. Следователно, втората производна

$$\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2}=\frac{M(x)}{EJ}$$

е също непрекъсната в точката $x = l$.

Тогава

$$\frac{\partial^s \overline{W}}{\partial x^s}(l,t)=\frac{\partial^s \widehat{W}}{\partial x^s}(l,t), \quad s=0,1,2. \tag{4.42}$$

Тези равенства са конформните условия между двете функции $\overline{W}(x,t)$ и $\widehat{W}(x,t)$.

По този начин, моделът на греда върху основа от Винклеров тип с променлива коравина се дава с уравнението (4.39) заедно с началните условия (4.38) и граничните условия (4.40)-(4.42).

За да приложим крайноелементен анализ към разглежданата задача, ще представим (4.39)-(4.42) заедно с началните условия (4.38) в слаба формулировка. Умножаваме (4.39) с функция $z(x) \in H^2[0, L]$ и интегрираме по части в интервала $[0, L]$. Използвайки граничните условия (4.40), както и условията за гладкост, ще получим:

$$EJ\int_0^L \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx+(A-B\cos 2\omega t-D\sin 2\omega t)\int_0^L (\eta(x)-\eta(x-l))\,Wz\,dx$$

$$+\rho F\frac{d^2}{dt^2}\int_0^L Wz\,dx=0, \forall z\in H^2[0,L].$$

Като пропускаме да изписваме аргумента x, ще дадем слабата формулировка на разглежданата задача: Търсим функция $W: \ \forall t \in [0,T] \to W \in H^2[0,L]$ такава, че $\forall z \in H^2[0,L]$

$$\begin{aligned} & a(W,z) + \frac{d^2}{dt^2} b(W,z) = 0, \\ & W(0) = W^0, \\ & \frac{\partial W}{\partial t}(0) = W^1, \end{aligned} \tag{4.43}$$

където

$$a(W,z) = a_1(W,z) + a_2(W,z),$$

$$b(W,z) = \rho F \int_0^L W z \, dx.$$

Билинейните форми $a_1(\cdot,\cdot)$ и $a_2(\cdot,\cdot)$ са дефинирани както следва:

$$a_1(W,z) = EJ \int_0^L \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \, dx,$$

$$a_2(W,z) = (A - B\cos 2\omega t - D \sin 2\omega t) \int_0^L (\eta(x) - \eta(x-l)) \, W z \, dx + P z(L).$$

Поради последното събираемо, задача (4.43) не е симетрична.

Нека сега да дискретизираме уравнение (4.43) по отношение на пространствената променлива $x, x \in [0,L]$. И така, ще използваме едномерни крайни елементи, които са по части полиноми от степен $p, p \geq 3$. Нека максималната дължина на подинтервалите е h. При всяко крайноелементно разделяне точката $x = l$ е винаги възлова. Крайноелементното пространство V_h е подпространство на $H^2[0,L]$ и удовлетворява C^1-свойството [48].

Полудискретната апроксимация на (4.43) е: Да се намери функция $W_h \in V_h$ такава, че $\forall z_h \in V_h$

$$a(W_h(t), z_h) + \frac{d^2}{dt^2} b(W_h(t), z_h) = 0, \tag{4.44}$$

с начални условия

$$W_h(0) = W_h^0, \quad \frac{\partial W_h}{\partial t}(0) = W_h^1,$$

където W_h^0 и W_h^1 са крайноелементните приближения на дадените начални функции от (4.38).

Сега да разгледаме задачата в интервала $[0,l]$. В този интервал еластичната коравина е функция на времевата променлива t.

Следователно в интервала $[0, l]$ задачата може да се сведе до задачата за непрекъснатата греда върху еластична основа, разгледана в §4.2.

Разделяме интервала $[0, l] : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = l$. Всяка част $[x_{j-1}, x_j]$ е греда с еластична опора в двата си края x_{j-1} и x_j, $j = 1, \ldots, m$. По такъв начин преобразуваме коравината $C(x, t)$ чрез граничните условия на $m-$те подинтервала, т.е.

$$\overline{C}(t) = \frac{1}{m} \int_0^l C(x, t)\, dx.$$

Следователно

$$\overline{C}(t) = \frac{l}{m} \left(A - B \cos 2\omega t - D \sin 2\omega t\right).$$

Преместването в $j-$я подинтервал удовлетворява диференциалното уравнение

$$EJ \frac{\partial^4 \overline{W}_j}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 \overline{W}_j}{\partial t^2} = 0.$$

Граничните условия са следните:

$$\frac{\partial^3 \overline{W}_j}{\partial x^3}(x_{j-1}, t) = \overline{C}(t) \overline{W}_j(x_{j-1}, t), \quad j = 2, \ldots, m,$$
$$\frac{\partial^3 \overline{W}_j}{\partial x^3}(x_j, t) = -\overline{C}(t) \overline{W}_j(x_j, t), \quad j = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Да добавим условията, отнасящи се за функциите $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_m$ (виж (4.40) и (4.41)):

$$\frac{\partial^2 \overline{W}_1}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 \overline{W}_1}{\partial x^3}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 \overline{W}_m}{\partial x^3}(l, t) = \frac{P}{EJ}.$$

И най-накрая, условията за гладкост са:

$$\begin{aligned} \overline{W}_j(x_j, t) &= \overline{W}_{j+1}(x_j, t), \\ \frac{\partial \overline{W}_j}{\partial x}(x_j, t) &= \frac{\partial \overline{W}_{j+1}}{\partial x}(x_j, t), \quad j = 1, 2, \ldots, m-1. \end{aligned}$$

Сега вече може да се приложи подходът, развит в § 4.2. Избраните по части полиномиални функции на пространството V_h ще определят крайноелементното приближение $W_h(t)$. От (4.44) се получава система от обикновени диференциални уравнения от втори ред по отношение на неизвестния вектор $\{X\}$:

$$[M] \left\{\ddot{X}\right\} + [K] \{X\} = \left\{\widetilde{\mathcal{P}}(t)\right\}, \tag{4.45}$$

където $[M]$ и $[K]$ са глобалните матрици на маса и коравина, а $\left\{\widetilde{\mathcal{P}}(t)\right\}$ е векторът на точковия товар.

Методът на нормалните форми изисква да определим първите няколко собствени двойки на елиптичния оператор посредством матричното уравнение

$$[K]\left\{\overline{X}\right\} = \lambda\,[M]\left\{\overline{X}\right\},$$

където λ са непринудените колебания на системата.

Образуваме матрицата $\left[\overline{X}\right]$, чиито стълбове са собствените вектори. Тогава матриците $[K]$ и $[M]$ в уравнението (4.45) могат да бъдат диагонализирани, използвайки ортогоналността на собствените вектори, т.е. матриците

$$[K_G] = \left[\overline{X}\right]^T [K]\left[\overline{X}\right] \quad \text{и} \quad [M_G] = \left[\overline{X}\right]^T [M]\left[\overline{X}\right]$$

са диагонални. Тогава системата (4.45) ще бъде решена много по-лесно, тъй като матриците в лявата страна са диагонализирани (виж [129, 131]).

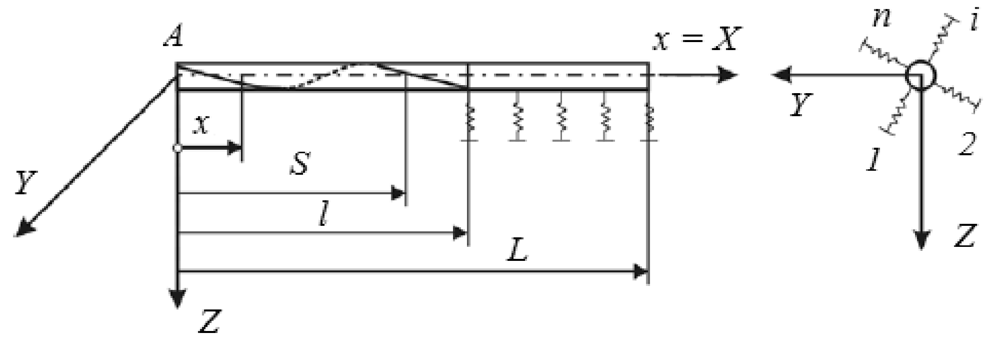
4.4 Модел на свредло, закрепено в тричелюстник

Ще направим едно директно приложение на теорията за греда върху Винклерова основа. Ще получим общ математически модел на винтово свредло с цилиндрична опашка, която е фиксирана и свредлото се върти с постоянна ъглова скорост. Изследването на динамичните премествания и напрежения е свързано с получаване на вариационната формулировка на задачата с отчитане на граничните условия и приложената към инструмента напречна сила [131].

Имайки предвид, че нашите разглеждания следват схемата "въртящ се инструмент – неподвижна заготовка", съгласно принципа за обратимост, напречната сила се върти около оста на инструмента. Този модел съответства на изследванията за греда върху Винклерова основа от предходния параграф. Там огъването се извършва в една основна и непроменлива инерционна равнина. За разлика от този случай, при модела на свредло ние ще следваме общата теория за непрекъсната греда със слабо променящо се напречно сечение [130].

Тогава главните инерционни равнини, отговарящи на напречните сечения, са различни. Следователно, при спираловидните свредла и двете главни инерционни оси, съответстващи на две различни напречни сечения, описват две спираловидни повърхнини.

В този параграф ще доразвием идеята на автора за представяне на еластичната основа чрез достатъчно на брой еластични пружини, което е вид дискретизация на непрекъснатата среда. Този нов подход изисква още и определяне на принудените колебания на съответната елиптична (стационарна) задача, за да могат да се намерят динамичните напрежения на свредлото. Гредата (свредлото) е частично захваната в патронник, който се разглежда като еластична основа с променлива коравина, а свободният край е подложен на напречна сила, въртяща се с постоянна ъглова скорост.



Фигура 4.5: Винтово свредло с цилиндрична опашка

Разглеждаме цилиндрична греда с дължина L. Тя се състои от две части – едната е закрепена в патронник, а другата с дължина l има два винтови жлеба със стъпка s (виж Фиг. 4.5). Така опашката на свредлото е с дължина $L - l$.

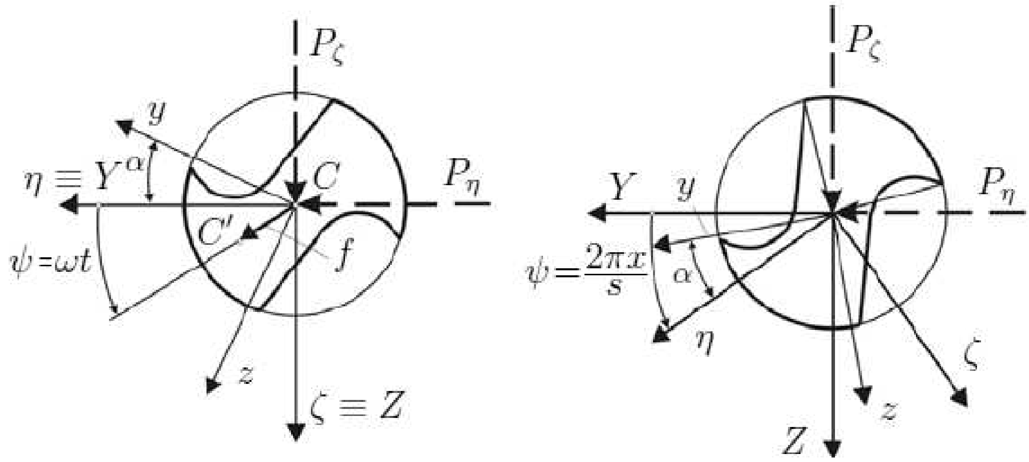
Макар и предната част да е с по-сложно напречно сечение, то това сечение е симетрично и има център, отбелязан с C (Фиг. 4.6а). При работен режим този център се измества от оста x на разстояние $|\overrightarrow{f}|$ поради въздействието на силата $\overrightarrow{P}$. В общия случай векторите $\overrightarrow{f}$ и $\overrightarrow{P}$ не са колинеарни (Фиг. 4.6а).

Ще приложим *реверсивния подход*: цялата система се върти с ъглова скорост ω. Тогава гредата е фиксирана, а векторът $\overrightarrow{f}$ (съответно $\overrightarrow{P}$) се завърта с ъглова скорост ω.

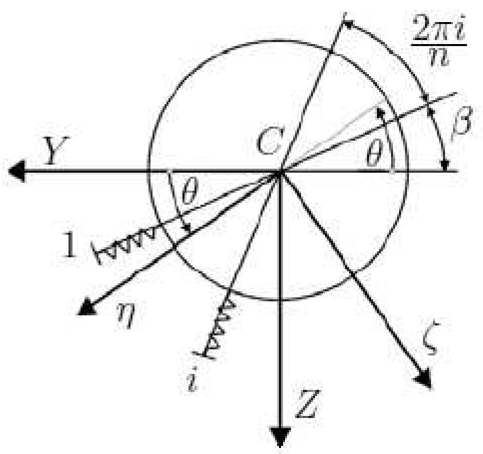
Координатите на преместванията v и w спрямо центъра (център на равновесие) за променливото сечение се отчита по посока на главните инерционни оси η и ζ (Фиг. 4.6б). В закрепената част, т.е. при $x \in (l, L)$, ще запазим същите променливи η и ζ, въпреки че за кръглото сечение всяка централна ос е главна инерционна ос. Това се прави с цел осигуряване на непрекъснатост на η и ζ в точката $x = l$.

Сега да разгледаме фиксираната част (опашката), която се намира в патронника. За нея ще приложим подхода, описан в предходния параграф. Тази част "разлагаме" на n еластични опори, разположени безкрайно близко една до друга в направление на гредовата ос. Трябва да определим матрицата на коравина за еластичната основа спрямо координатната система $C\eta\zeta$ (Фиг. 4.7). За целта разглеждаме напречно сечение, равномерно подпряно от n пружини (еластични опори). Всяка $i-$та пружина е с коравина $C_i, i = 1, \ldots, n$. Осите на опорите се пресичат в центъра на сечението (окръжността) и всяка от тях образува равни ъгли със съседните (Фиг. 4.7). Коравината в центъра C в посока $C\eta$ (или $C\zeta$) ще представлява съответния коефициент на Винклеровата основа. Той ще зависи от ъгъла $\theta = \omega t$.

Да разгледаме $i-$та пружина, както направихме това в § 4.3 (виж Фиг. 4.3). Проекциите $R_{\eta,i}$ и $R_{\zeta,i}$ на реакциите в центъра C при едновременното преместване $v_i = 1$ и $w_i = 1$, са:



Фигура 4.6: Динамика в напречното сечение на винтовото (спираловидно) свредло в свободната част



Фигура 4.7: Напречно сечение на цилиндричната закрепена част

$$
\begin{aligned}
R_{\eta,i} &= C_i\left[\cos\varphi_i\cos\varphi_i+\sin\varphi_i\cos\varphi_i\right], \\
R_{\zeta,i} &= C_i\left[\cos\varphi_i\sin\varphi_i+\sin\varphi_i\sin\varphi_i\right].
\end{aligned} \tag{4.46}
$$

Нека с $\{\delta_i\}=[v_iw_i]^T$ сме означили поточковите премествания в $i-$тата пружина. Следователно, зависимостта (4.46) може да бъде записана в матрична форма:

$$\{R_i\}=[K_{ii}]\,.\{\delta_i\},$$

където

$$[K_{ii}]=C_i\begin{pmatrix}\cos^2\varphi_i & \sin\varphi_i\cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i\cos\varphi_i & \sin^2\varphi_i\end{pmatrix},$$

а проектиращият ъгъл (Фиг. 4.3) се пресмята като $\varphi_i=\dfrac{2\pi}{n}i+\beta-\theta$, β е ъгълът между оста y и първата опора, т.е. при $i=1$ (Фиг. 4.7).

За глобалната матрица на коравина ще получим

$$[K]=\sum_{i=1}^{n}C_i\begin{pmatrix}\cos^2\varphi_i & \sin\varphi_i\cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i\cos\varphi_i & \sin^2\varphi_i\end{pmatrix}.$$

Нашата основна задача е да изведем математическия модел, който описва еластичната линия в динамичен работен режим. Това става при известни условия, които са подобни на тези, представени в предишните два параграфа, а именно:

- Еластичната линия е функция на абсцисата x и на времевата променлива t;
- Функциите на преместване v и w, отчетени в центъра (точката на равновесие) за променливите напречни сечения (свободната част съдържа витлообразни жлебове) се определят в посока на главните инерционни оси η и ζ;
- Съществува линейна зависимост между премествания и деформации. Това условие дава възможност кривините в главните инерционни равнини $x\eta$ и $x\zeta$ да бъдат определени единствено чрез вторите производни на преместванията спрямо променливата x:

$$K_{x\eta}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad K_{x\zeta}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

- Огъвните моменти са пропорционални на кривините:

$$M_\eta = -K_{x\eta} E J_\eta, \quad M_\zeta = K_{x\zeta} E J_\zeta,$$

  където E е модулът на еластичност, а $J_\eta(x)$ и $J_\zeta(x)$ са главните аксиални инерционни моменти;

- Съществува зависимост между огъвните моменти и разпределените товари в главните инерционни равнини:

$$\frac{\partial^2 M_\eta}{\partial x^2} = -q_\zeta, \quad \frac{\partial^2 M_\zeta}{\partial x^2} = -q_\eta;$$

- Товарите са резултат от напречните осцилации в равнините съответно $x\eta$ и $x\zeta$ с интензитет

$$q_\eta = \rho F(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad q_\zeta = \rho F(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

  където ρ е плътността, а $F(x)$ е лицето на напречното сечение на гредата.

Реакцията на разпределения товар от Винклеровата основа има интензитет съответно C_η и C_ζ в посока на η и ζ

$$C_\eta = (A + B\cos ax + D\sin ax)\, v + (D\cos ax - B\sin ax)\, w,$$

$$C_\zeta = (A - B\cos ax - D\sin ax)\, w + (D\cos ax - B\sin ax)\, v,$$

където $a = \dfrac{4\pi}{s}$, s е стъпката, а коефициентите A, B и D са определени в предходния параграф. Да отбележим и връзката между x и θ: $s\theta = 2\pi x,\ x \in (0, l)$.

За произволно $x \in (0, L)$ (виж Фиг. 4.5) огъвните моменти действат върху съответното напречно сечение

$$M_\eta = P_\eta(x)\sin ax - P_\zeta(x)\cos ax,$$

$$M_\zeta = P_\eta(x)\cos ax + P_\zeta(x)\sin ax.$$

Нека сега да определим непрекъснатите функции на преместване $V(x,t)$ и $W(x,t)$:

$$V(x,t) = \begin{cases} \overline{V}(x,t), & (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \\ \widehat{V}(x,t), & (x,t) \in (l,L] \times [0,T], \end{cases}$$

$$W(x,t) = \begin{cases} \overline{W}(x,t), & (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \\ \widehat{W}(x,t), & (x,t) \in (l,L] \times [0,T]. \end{cases}$$

Основните инерционни моменти J_η и J_ζ и съответната функция на напречното сечение са

$$J_\eta(x) = \begin{cases} \overline{J}_\eta, & x \in [0,l], \\ \widehat{J}_\eta, & x \in (l,L], \end{cases} \qquad J_\zeta(x) = \begin{cases} \overline{J}_\zeta, & x \in [0,l], \\ \widehat{J}_\zeta, & x \in (l,L], \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \overline{F}, & x \in [0,l], \\ \widehat{F}, & x \in (l,L]. \end{cases}$$

Ще предполагаме, че разпределената върху свредлото демфираща сила е пренебрежима.

И така, достигаме до математическия модел на еластичната линия за разглежданото свредло:

$$\begin{gathered}
E\overline{J}_\zeta \frac{\partial^4 \overline{V}}{\partial x^4} + \rho \overline{F} \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial t^2} - (2P_\zeta - P_\eta a x) a \cos ax + (2P_\eta - P_\zeta a x) a \sin ax = 0, \\
E\overline{J}_\eta \frac{\partial^4 \overline{W}}{\partial x^4} - \rho \overline{F} \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial t^2} + (2P_\eta + P_\zeta a x) a \cos ax + (2P_\zeta - P_\eta a x) a \sin ax = 0, \\
0 < x < l; \qquad (4.47) \\
E\widehat{J}_\zeta \frac{\partial^4 \widehat{V}}{\partial x^4} + \rho \widehat{F} \frac{\partial^2 \widehat{V}}{\partial t^2} - (A + B\cos ax + D \sin ax)\widehat{V} - (D\cos ax - B\sin ax)\widehat{W} \\
-(2P_\zeta - P_\eta a x) a \cos ax + (2P_\eta - P_\zeta a x) a \sin ax = 0, \\
E\widehat{J}_\eta \frac{\partial^4 \widehat{W}}{\partial x^4} - \rho \widehat{F} \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial t^2} + (A - B\cos ax - D\sin ax)\widehat{W} + (D\cos ax - B\sin ax)\widehat{V} \\
+(2P_\eta + P_\zeta a x) a \cos ax + (2P_\zeta - P_\eta a x) a \sin ax = 0, \\
l < x < L.
\end{gathered}$$

Системата (4.47) решаваме при начални условия

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^j \overline{V}}{\partial t^j}(x,0) = \overline{V}^j(x), \quad \frac{\partial^j \overline{W}}{\partial t^j}(x,0) = \overline{W}^j(x), \\
\frac{\partial^j \widehat{V}}{\partial t^j}(x,0) = \widehat{V}^j(x), \quad \frac{\partial^j \widehat{W}}{\partial t^j}(x,0) = \widehat{W}^j(x),
\end{gathered} \qquad (4.48)$$

където $\overline{V}^j, \widehat{V}^j, \overline{W}^j, \widehat{W}^j,\ j = 0; 1$ са дадени функции.

Системата (4.47) може да се обедини, като използваме единичната функция на Heaviside $\eta(x)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ_\zeta(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)+\rho F(x)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-(2P_\zeta-P_\eta ax)a\cos ax+(2P_\eta-P_\zeta ax)a\sin ax$$

$$-\left[\eta(x-l)-\eta(x)\right]\left[(A+B\cos ax+D\sin ax)V+(D\cos ax-B\sin ax)W\right]=0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ_\eta(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)-\rho F(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+(2P_\eta+P_\zeta ax)a\cos ax+(2P_\zeta-P_\eta ax)a\sin ax$$

$$+\left[\eta(x-l)-\eta(x)\right]\left[(A-B\cos ax-D\sin ax)W+(D\cos ax-B\sin ax)V\right]=0. \tag{4.49}$$

Да разгледаме и граничните условия, свързани с (4.49):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0,t)=0,\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(0,t)=0, \quad \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(0,t)=P_\eta,\ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(0,t)=P_\zeta,\\
&\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(l,t)=P_\zeta\sin al+P_\eta\cos al,\quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(l,t)=P_\zeta\cos al-P_\eta\sin al,\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(L,t)=0,\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(L,t)=0, \quad \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(L,t)=0,\ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(L,t)=0.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Добавяме също и условията за гладкост на функциите V и W. Функциите $V^{(r)}(x,t)$, $W^{(r)}(x,t),\ r=0,1$ са непрекъснати за всяко $x\in[0,L],\ t>0$.

Следователно

$$\overline{V}^{(r)}(l,t)=\widehat{V}^{(r)}(l,t),\quad \overline{W}^{(r)}(l,t)=\widehat{W}^{(r)}(l,t),\quad r=0,1. \tag{4.51}$$

Последните равенства са условията за конформност между неизвестните функции $\overline{V},\widehat{V}$ и $\overline{W},\widehat{W}$.

В крайна сметка моделът на задачата за свредло върху Винклерова основа (закрепено в тричелюстник) се описва с хиперболично диференциално уравнение от четвърти ред (4.49) с начални условия (4.48) и гранични условия (4.50) и (4.51).

За да използваме някой вариационен числен метод, например МКЕ, е необходимо да сведем задача (4.49), (4.50) с начални условия (4.48) в слаба формулировка. Именно този проблем ще разгледаме сега.

Известно е, че основен момент при изследване и решаване на хиперболично уравнение е да се получи спектърът на елиптичния диференциален оператор. За целта при намиране на свободните колебания на свредлото ще положим $P_\eta=P_\zeta=0$.

Ще умножим двете уравнения на (4.49) с вариационните функции $v(x),\ w(x) \in H^2[0,L]$ и ще интегрираме по части с използване на условията (4.50):

$$-\int_0^L EJ_\zeta(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{d^2 v}{dx^2}\,dx + \int_l^L [A + B\cos ax + D\sin ax]\,Vv\,dx$$

$$+\int_l^L [D\cos ax - B\sin ax]\,Wv\,dx + \left[E\widehat{J}_\zeta\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(l^+) - E\overline{J}_\zeta\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(l^-)\right]\frac{dv}{dx}(l)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\int_0^L \rho F(x)Vv\,dx, \tag{4.52}$$

$$\int_0^L EJ_\eta(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{d^2 w}{dx^2}\,dx + \int_l^L [A - B\cos ax - D\sin ax]\,Ww\,dx$$

$$+\int_l^L [D\cos ax - B\sin ax]\,Vw\,dx + \left[E\widehat{J}_\eta\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(l^+) - E\overline{J}_\eta\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(l^-)\right]\frac{dw}{dx}(l)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\int_0^L \rho F(x)Ww\,dx.$$

Вариационната формулировка (4.52) най-общо не е симетрична. Това се дължи на факта, че $J_\eta(x), J_\zeta(x), \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ не са непрекъснати в точката $x = l$.

Сега ще представим една изглаждаща процедура за функциите- коефициенти и за неизвестните функции в уравненията (4.49), (4.50).

Нека ε е малък положителен параметър. Въвеждаме функциите $\widetilde{J}_\xi(x)$, като индексът ξ замества η или ζ:

$$\widetilde{J}_\xi(x) = \begin{cases} \overline{J}_\xi, & x \in [0, l-\varepsilon], \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{3} k_{\xi,i}(x-l)^i, & x \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon), \\ \widehat{J}_\xi, & x \in [l+\varepsilon, L], \end{cases}$$

където

$$k_{\xi,0} = \frac{\overline{J}_\xi - \widehat{J}_\xi}{2}, \quad k_{\xi,1} = \frac{3\left(\widehat{J}_\xi - \overline{J}_\xi\right)}{4\varepsilon},$$

$$k_{\xi,2} = 0, \qquad k_{\xi,3} = \frac{\overline{J}_\xi - \widehat{J}_\xi}{2\varepsilon}.$$

Така определените коефициенти $k_{\xi,i}, i = 0, \ldots, 3$ осигуряват равенствата

$$\frac{\partial^j \widetilde{J}_\xi}{\partial x^j}(l \pm \varepsilon) = \frac{\partial^j J_\xi}{\partial x^j}(l \pm \varepsilon), \quad j = 0, 1.$$

По аналогичен начин бихме могли да "изгладим" функцията на напречното сечение $F(x)$ чрез $\widetilde{F}(x)$.

След това, за $t \in [0, T]$, нека да определим и изглаждащите функции, отговарящи на неизвестните функции:

$$\widetilde{V}(x,t) = \begin{cases} \overline{V}(x,t), & x \in [0, l - \varepsilon], \\ \sum\limits_{i=0}^{7} m_1^i (x - l)^i, & x \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon), \\ \widehat{V}(x,t), & x \in [l + \varepsilon, L], \end{cases}$$

$$\widetilde{W}(x,t) = \begin{cases} \overline{W}(x,t), & x \in [0, l - \varepsilon], \\ \sum\limits_{i=0}^{7} m_2^i (x - l)^i, & x \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon), \\ \widehat{W}(x,t), & x \in [l + \varepsilon, L]. \end{cases}$$

От непрекъснатостта на $\widetilde{V}$ и $\widetilde{W}$ и на първата производна относно x на същите функции в точките $l - \varepsilon$ и $l + \varepsilon$, ще бъдат определени коефициентите $m_{j,i}$, $i = 0, \ldots, 7, j = 1; 2$ така, че

$$\frac{\partial^3 \widetilde{V}}{\partial x^3}(l,t) = \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(l,t) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 \widetilde{W}}{\partial x^3}(l,t) = \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(l,t) = 0.$$

Следователно, следните равенства са изпълнени почти навсякъде при $\varepsilon \to 0$ и $\xi = \eta; \zeta$:

$$\widetilde{J}_\xi(x) = J_\xi(x), \quad \widetilde{F}(x) = F(x),$$

$$\widetilde{V}(x,t) = V(x,t), \quad \widetilde{W}(x,t) = W(x,t).$$

Представената изглаждаща процедура ни позволява да получим симетрична вариационна формулировка.

Така за $\forall v(x),\ w(x) \in H^2[0, L]$ получаваме

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^L E\widetilde{J}_\zeta(x) \frac{\partial^2 \widetilde{V}}{\partial x^2} \frac{d^2 v}{dx^2}\, dx + \int_l^L [A + B\cos ax + D\sin ax]\, \widetilde{V} v\, dx \\
&\quad + \int_l^L [D\cos ax - B\sin ax]\, \widetilde{W} v\, dx = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L \rho \widetilde{F}(x) \widetilde{V} v\, dx, \\
&\int_0^L E\widetilde{J}_\eta(x) \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial x^2} \frac{d^2 w}{dx^2}\, dx + \int_l^L [A - B\cos ax - D\sin ax]\, \widetilde{W} w\, dx \\
&\quad + \int_l^L [D\cos ax - B\sin ax]\, \widetilde{V} w\, dx = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L \rho \widetilde{F}(x) \widetilde{W} w\, dx.
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Очевидно, това представяне е симетрично и съответната спектрална задача ще притежава реални собствени стойности. Нека още да подчертаем, че (4.53) е много удобно за получаване на смесена формулировка и оттам прилагане на смесен МКЕ (виж напр. [48]). Този подход е много приложим в механиката на твърдото и деформируемо тяло, където заедно с преместванията се получават и неизвестните напрежения.

4.5 Вариационен математически модел на ветрогенераторна перка

Изследването на различните аспекти за ефективност на устройствата за получаването на така наречената "чиста" енергия е основен приоритет в редица научни области. Такива устройства са например генераторите, които се задвижват от силата на вятъра. Перките на ветрогенератора са много уязвими, защото са подложени на големи циклични натоварвания [102, 135]. Сложните въздействия вследствие на непостоянна скорост и променлива сила и посока на вятъра водят до сериозни повреди от по-бързата умора на материала [102].

Една от най-важните задачи при якостното оразмеряване на въртящи се конструкции е определянето на собствените колебания и модални функции на формата. Тяхното изучаване ни дава априорна информация как да избегнем областите (размерите), за които има по-голяма вероятност за резонанс [43, 80]. Тук разглеждаме една идеализирана моделна задача за прът, въртящ се около точка (неподвижна ос). Фактическото положение е, че поради променливата форма на перките и турболентните ефекти задачата е за въртене на черупка (роторна лопатка). Такава сложна моделна задача за ветрогенератор не е известна в литературата.

Известно е (виж [80, 102]), че МКЕ е един от най-ефективните числени методи за определяне спектъра на основния елиптичен диференциален оператор при динамика на прътови конструкции, които се моделират с хиперболични диференциални уравнения от четвърти ред.

Нека също да подчертаем, че изучаването на спектъра при динамиката на ветрогенераторни перки има съществено влияние върху изследване стабилността на носещата основа [47, 145].

Нашата основна задача в този параграф е да получим подходящо вариационно представяне на моделната диференциална задача, която възниква при въртенето на перката на ветрогенератора в една равнина, като перката приемаме за тънка греда. Това приемане е валидно, ако средната равнина е тясна ивица, което в случая е в сила. Ще получим смесената формулировка на тази задача при намиране на собствените двойки на съответния елиптичен оператор.

Нека перката с дължина l разглеждаме като непрекъсната твърда греда. Тогава движението (въртене в една равнина) се описва със следното диференциално уравнение от четвърти ред [47]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(G(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{4.54}$$

където $u(x,t)$ е неизвестната функция на преместванията. Интензитетът на разпределените товари, вследствие от въздушното съпротивление, е функцията

$$G(x) = \int_x^l m\omega^2 \xi \, d\xi,$$

където при по-малка ъглова скорост ω в подинтегралната функция ω^2 може да бъде заменено с ω. Тук засега предполагаме, че въртенето е с постоянна ъглова скорост.

Освен това, m е масата на единица дължина на гредата, а функцията $f(x,t)$ е аеродинамичното натоварване (t е времевата променлива). Както и досега, EJ е коравината на огъване на перката.

За да получим непринудените честоти и функции на формата, за момент да положим нулеви външни въздействия, т.е. $f(x,t) = 0$. От (4.54) ще получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(G(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Да разделим променливите:

$$u(x,t) = z(x)\varphi(t).$$

Достигаме до две обикновени диференциални уравнения:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda\varphi = 0, \tag{4.55}$$

и

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(G(x)\frac{dz}{dx}\right) = \lambda m z, \tag{4.56}$$

където $\lambda > 0$ са собствените трептения на перката.

Също така, ще определим граничните условия, които съответстват на уравнение (4.56).

Във фиксирания край ($x = 0$) преместването и наклонът са нулеви, т.е.

$$z(0) = 0, \tag{4.57}$$

$$\frac{dz}{dx}(0) = 0. \tag{4.58}$$

В свободния край ($x = l$) на пръта огъвният момент и срязващата сила са също нулеви:

$$\frac{d^2z}{dx^2}(l) = 0. \tag{4.59}$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}(l) = 0. \tag{4.60}$$

В общия случай коефициентите на диференциалното уравнение не са постоянни. Следователно задачата (4.56), (4.57)-(4.60) трябва да бъде решавана числено. Един разумен подход е чрез свеждане към вариационна (слаба) формулировка и задачата да бъде решавана посредством някой от МКЕ.

От друга страна, решението на (4.55) е $\varphi(t) = e^{i\sqrt{\lambda}\ t},\ i = \sqrt{-1}$ и тогава

$$u(x,t) = e^{i\sqrt{\lambda}\ t} z(x).$$

Сега ще получим вариационното представяне за получаване на функциите на формата $z(x)$. Нека V е вариационното подпространство на Соболев от втори ред $H^2(0,l)$, удовлетворяващо (4.57) и (4.59).

Умножаваме (4.56) с функция $z_1 \in V$ и интегрираме по части в интервала $[0,l]$. Като отчитаме граничните условия (4.57)-(4.60), за разглежданата задача ще получим вариационното уравнение:

$$a(z,z_1) = \lambda b(z,z_1), \quad \forall z_1 \in V, \tag{4.61}$$

където $a(\cdot,\cdot)$ е следната билинейна форма:

$$a(z,z_1) = \int_0^l \left(EJ\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z_1}{dx^2} + G\frac{dz}{dx}\frac{dz_1}{dx}\right) dx - G(l)\frac{dz}{dx}(l)z_1(l),$$

а също така

$$b(z,z_1) = \int_0^l m z z_1\, dx.$$

Билинейната форма $a(\cdot,\cdot)$ е симетрична, защото $G(l) = 0$ и вариационната формулировка (4.61) е също симетрична.

Един основен подход в крайноелементния анализ и в приложенията за задачи от четвърти ред е да представим моделното уравнение в смесена формулировка.

Така от (4.56), трансформирайки и граничните условия по подходящ начин, ще получим следната система от две уравнения от втори ред:

$$\left| \begin{array}{l} A_1 z + \lambda k_1 z = \sigma \\ \\ A_2 \sigma + \lambda k_2 \sigma + A_3 z + \lambda k_3 z = 0, \end{array} \right. \tag{4.62}$$

където

$$A_j = p_j(x)\frac{d^2}{dx^2} + q_j(x)\frac{d}{dx} + r_j(x), \quad j = 1,2,3$$

са елиптични оператори от втори ред с достатъчно гладки функции $p_j(x) < 0$, $r_j(x) \geq 0$, а $k_j,\ j = 1,2,3$ са коефициенти, които ще определим по-нататък.

За да получим смесена вариационна формулировка на (4.56), ще въведем две функционални подпространства V_1 и V_2 на пространството $H^1(0,l)$, т.е. V_1 и V_2 са пространства, удовлетворяващи различни условия в съответствие с (4.57)-(4.60).

Тогава (4.62) ще запишем във вида:

$$\left| \begin{array}{l} (A_1 z, \sigma_1) + \lambda(k_1 z, \sigma_1) = (\sigma, \sigma_1) \\ \\ (A_2 \sigma, z_1) + \lambda(k_2 \sigma, z_1) + (A_3 z, z_1) + \lambda(k_3 z, z_1) = 0, \end{array} \right. \tag{4.63}$$

за всяко $z_1 \in V_1$, $\sigma_1 \in V_2$ и навсякъде, както обикновено, $(\cdot,\cdot)$ означава скаларно произведение.

За практическата (компютърна) реализация на системата (4.63) е разумно тя да бъде разглеждана като едно вариационно уравнение (виж Глава 1):

$$\begin{gathered} (A_1 z, \sigma_1) - (\sigma, \sigma_1) + (A_2 \sigma, z_1) + (A_3 z, z_1) \\ + \lambda(k_1 z, \sigma_1) + \lambda(k_2 \sigma, z_1) + \lambda(k_3 z, z_1) = 0, \quad \forall z_1 \in V_1,\ \sigma_1 \in V_2. \end{gathered} \tag{4.64}$$

За да получим неизвестните функции z, σ, които участват в (4.62), ще заместим σ от първото уравнение във второто. Получаваме

$$\begin{gathered} p_1 p_2 \frac{d^4 z}{dx^4} + \left(2\frac{dp_1}{dx} p_2 + p_1 q_2 + p_2 q_1 \right) \frac{d^3 z}{dx^3} \\ + \left(\frac{d^2 p_1}{dx^2} p_2 + 2\frac{dq_1}{dx} p_2 + p_1 r_2 + p_2 r_1 + \frac{dp_1}{dx} q_2 + q_1 q_2 + p_3 \right) \frac{d^2 z}{dx^2} \end{gathered}$$

$$+\left(\frac{d^2q_1}{dx^2}p_2+2\frac{dr_1}{dx}p_2+q_1r_2+q_2r_1+\frac{dq_1}{dx}q_2+q_3\right)\frac{dz}{dx}$$

$$+\left(\frac{d^2r_1}{dx^2}p_2+\frac{dr_1}{dx}q_2+r_1r_2+r_3\right)z+\lambda\left(k_1p_2+k_2p_1\right)\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$+\lambda\left(2\frac{dk_1}{dx}p_2+k_1q_2+k_2q_1\right)\frac{dz}{dx}+\lambda\left(\frac{d^2k_1}{dx^2}p_2+\frac{dk_1}{dx}q_2+k_1r_2+k_2r_1+k_3\right)z$$

$$+\lambda^2k_1k_2z=0.$$

Ще сравним коефициентите пред неизвестната функция z в последното уравнение с тези от (4.56), като това уравнение предварително ще запишем във вида

$$EJ\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d(EJ)}{dx}\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^2(EJ)}{dx^2}\frac{d^2z}{dx^2}-G\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$-\frac{dG}{dx}\frac{dz}{dx}=\lambda mz.$$

Това ще ни позволи да дискутираме важния въпрос за възможността за симетризуемост на вариационната задача.

- Коефициентите пред $\dfrac{d^4z}{dx^4}$:

  $$p_1p_2=EJ.$$

  От изискването за симетричност на вариационното уравнение (4.64) ще положим $p_1=p_2=-\sqrt{EJ}:=p$.

- Коефициентите пред третата производна $\dfrac{d^3z}{dx^3}$:

  $$2p\frac{dp}{dx}+p(q_1+q_2)=2\frac{d(EJ)}{dx},$$

  но от друга страна

  $$\frac{d(EJ)}{dx}=\frac{d(p^2)}{dx}$$

  и следователно $q_1+q_2=2\dfrac{dp}{dx}$.

  Отново от съображения за симетрия

  $$q_1=q_2=\frac{dp}{dx}.$$

- Коефициентите пред $\dfrac{d^2 z}{dx^2}$:

$$3p\frac{d^2p}{dx^2} + p(r_1 + r_2) + 2\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + p_3 = \frac{d^2(EJ)}{dx^2} - G.$$

За симетричността на (4.63) (и следователно на (4.64)) ще поискаме $r_1 = r_2 := r$, както и

$$\frac{d^2(EJ)}{dx^2} = \frac{d^2(p^2)}{dx^2} = 2\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + 2p\frac{d^2p}{dx^2}.$$

Следователно

$$p\frac{d^2p}{dx^2} + 2pr + p_3 = -G, \tag{4.65}$$

и тогава получаваме

$$p_3 = -G - p\frac{d^2p}{dx^2} - 2pr.$$

- Коефициентите пред $\dfrac{dz}{dx}$:

$$p\frac{d^3p}{dx^3} + 2p\frac{dr}{dx} + 2\frac{dp}{dx}r + \frac{d^2p}{dx^2}\frac{dp}{dx} + q_3 = -\frac{dG}{dx},$$

което е еквивалентно на

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2p}{dx^2}\right) + 2\frac{d(pr)}{dx} + q_3 = -\frac{dG}{dx}.$$

Комбинирайки последното равенство с (4.65), ще достигнем до зависимостта:

$$q_3 = \frac{dp_3}{dx}.$$

Един възможен избор на функцията r е $r \equiv 0$. При това положение

$$p_3 = -G - p\frac{d^2p}{dx^2},$$

а също така

$$q_3 = -\frac{d}{dx}\left(G + p\frac{d^2p}{dx^2}\right).$$

Тук е мястото да подчертаем, че смесената вариационна задача (ако такава съществува!) има не единствено представяне, но за нас представлява интерес най-рационалният вид на смесената задача.

- Коефициентът пред z е $r_3 = 0$.
- Коефициентът пред $\lambda \dfrac{d^2 z}{dx^2}$ е $(k_1 + k_2)p = 0$.

  Членовете $(k_1 z, \sigma_1)$ и $(k_2 \sigma, z_1)$ в уравнения (4.63) и (4.64) са симетрични, когато

$$k_1 = k_2 = 0.$$

- Коефициентите пред $\lambda \dfrac{dz}{dx}$ и $\lambda^2 z$ също би трябвало да са равни на 0.
- Коефициентът пред λz е $k_3 = -m$.

Окончателно системата (4.62) ще добие вида

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{dz}{dx}\right) = \sigma \\ \\ \dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{d\sigma}{dx}\right) - \dfrac{d}{dx}\left(\left(G + p\dfrac{d^2 p}{dx^2}\right)\dfrac{dz}{dx}\right) - \lambda m z = 0, \end{array} \right. \tag{4.66}$$

където $p = -\sqrt{EJ}$.

Като запишем първото уравнение на (4.66) във вида

$$p\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dp}{dx}\frac{dz}{dx} = \sigma,$$

то от граничното условие (4.59) ще получим

$$\frac{dp}{dx}(l)\frac{dz}{dx}(l) = \sigma(l).$$

При диференциране на същото уравнение от (4.66) и отчитане на граничните условия (4.59) и (4.60) достигаме до условието

$$\frac{d^2 p}{dx^2}(l)\frac{dz}{dx}(l) = \frac{d\sigma}{dx}(l).$$

Следователно, граничните условия, които съответстват на смесената система на моделната задача са:

$$
\begin{aligned}
&z(0) = 0,\\
&\frac{dz}{dx}(0) = 0,\\
&\frac{dp}{dx}(l)\frac{dz}{dx}(l) = \sigma(l), \qquad (4.67)\\
&\frac{d^2p}{dx^2}(l)\frac{dz}{dx}(l) = \frac{d\sigma}{dx}(l).
\end{aligned}
$$

Така посредством системата (4.66) с граничните условия (4.67), вариационната смесена формулировка на (4.64) ще добие вида:

$$
\int_0^l \left(-p\frac{dz}{dx}\frac{d\sigma_1}{dx} - p\frac{d\sigma}{dx}\frac{dz_1}{dx} - \sigma\sigma_1 + G\frac{dz}{dx}\frac{dz_1}{dx}\right) dx
$$

$$
+\frac{p}{dp/dx}(l)\sigma(l)\sigma_1(l) + G(l)z(l)\frac{dz}{dx}(l) = \lambda \int_0^l mzz_1 \, dx,
$$

$$
\forall z_1 \in V_1, \quad \forall \sigma_1 \in V_2.
$$

Окончателната смесена вариационна формулировка е симетрична, тъй като $G(l) = 0$. При нея могат да се използват значително по-прости по вид крайни елементи. Освен това, едновременно получаваме приближените функции както на премества-нията, така и на огъвния момент на перката на ветрогенератора.

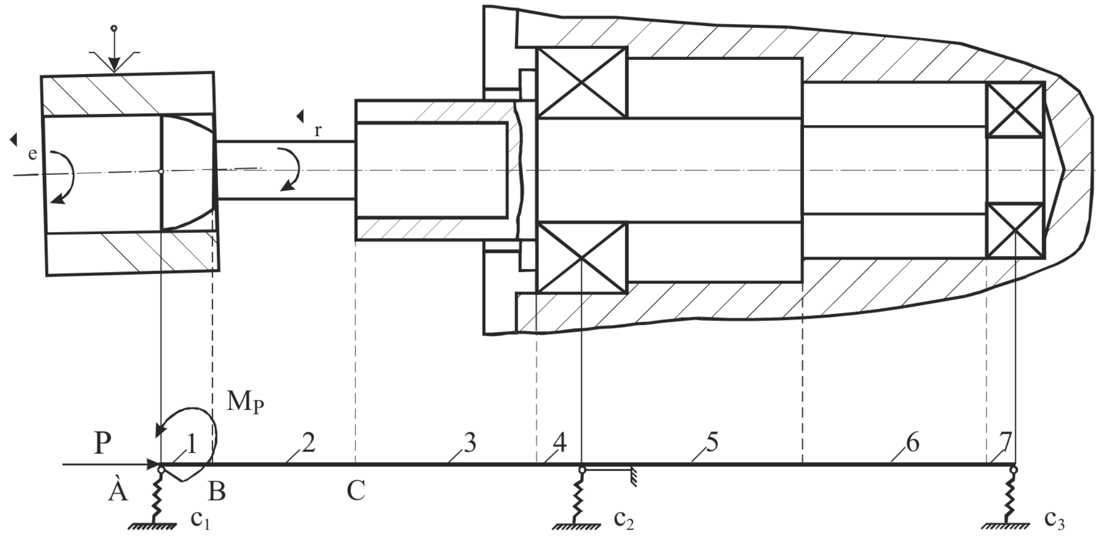
4.6 Числови резултати

В този параграф ще решим три реални задачи от практиката. И в трите се прилагат изведените математически модели и съответните вариационни представяния. След това се прилага МКЕ за определяне на преместванията и напреженията в съответната греда.

Задачите са решени при реални параметри от инженерната практика. Получените резултати са реалистични. Те могат да бъдат сравнени с получени по експериментален път данни (чрез тензометрията).

Пример 4.1

Първият пример илюстрира модел на греда върху еластична основа. Гредата е представена чрез шпиндел на устройство за протяжка със сферичен край (Фиг. 4.8). Другият край е закрепен върху дорник (супорт) на конвенционален струг [103].



Фигура 4.8: Схема на шпиндел, моделиращ греда върху еластична основа

Моментният вектор $\overrightarrow{\mathcal{M}_p}$ е перпендикулярен на оста на инструмента и се върти около оста с ъглова скорост ω. Един елементарен двумерен модел на непрекъсната греда върху еластични опори е именно разгледаната ситуация, където

$$|\overrightarrow{P}| = 1840 \text{ N}; \quad \overrightarrow{\mathcal{M}_p} = 21 \sin \omega t \text{ N} \times \text{m}; \quad \omega = 167.5 \text{s}^{-1}.$$

Физичните параметри на гредата са: модулът на еластичност е $E = 2 \times 10^{11}$ Pa, отношението на Poisson е $\mu = 0.3$, а плътността е $\rho = 7850$ kg/m^3.

Решаваме две задачи:

- Определяне на динамичните нормални напрежения в периферна точка (точка от повърхността) на гредата;
- Сравнение на случаите с динамично и статично натоварване.

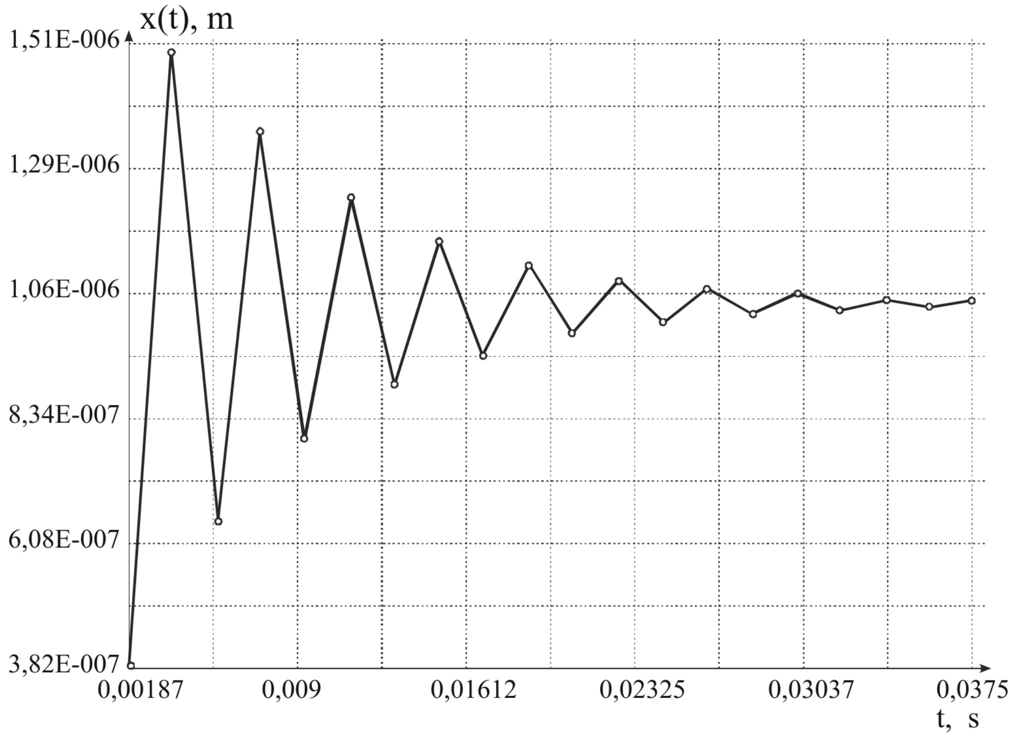
За по-голяма достоверност на приближенията, гредата е дискретизирана с крайни елементи от тип BEAM2D (виж [33]). Използваното разделяне е равномерно. Получените приближени функции имат за аргумент времевата променлива t и преместването се отчита по абсцисната ос (Фиг. 4.9).

Глобалната матрица на коравина може да се представи като сбор от две матрици, т.е.

$$[K] = \left[\overline{K}\right] + [K(p)]\,,$$

където $\left[\overline{K}\right]$ е конвенционалната матрица на коравина, а $[K(p)]$ е диференциалната матрица на коравина, образувана от въздействието на външната аксиална сила.

Фигура 4.9 представя аксиалното (осно) преместване в точка 1 (точка A от Фиг. 4.8) за $t \in [0, \dfrac{2\pi}{\omega}]$. Фиг. 4.10 изобразява завъртане на сечението в същата точка A, когато е приложена аксиалната сила $\overrightarrow{P}$.



Фигура 4.9: Преместване по оста x във функция на времето t

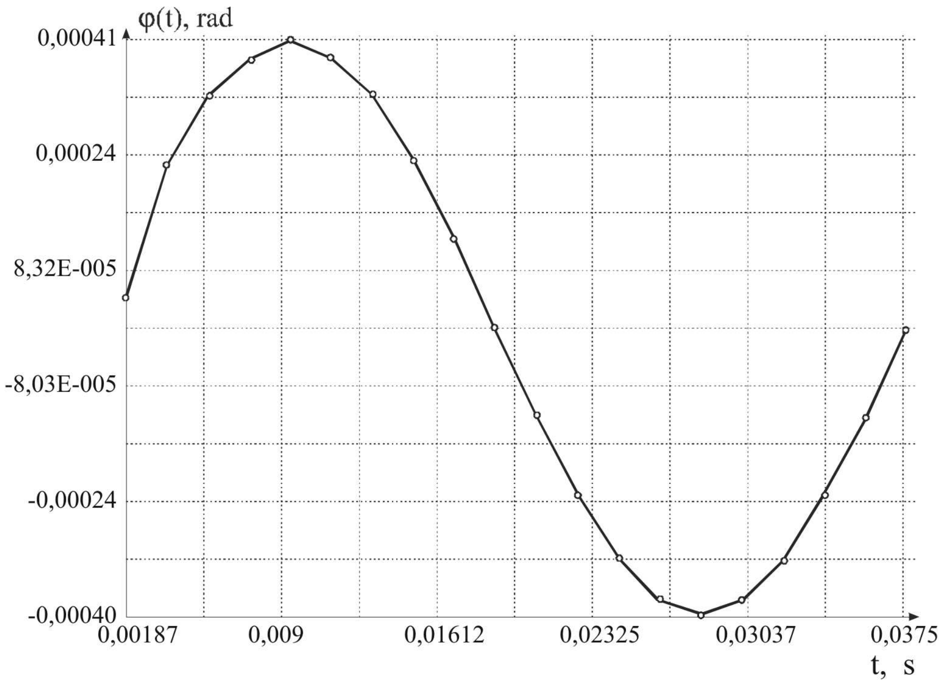
Максималното динамично напрежение е отчетено в периферната точка на напречното сечение C (Фиг. 4.8). Така на Фиг. 4.11 е показан законът на изменение на динамичното напрежение в посока на външната нормала за един цикъл, т.е. $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$.

Този закон е необходим при определяне на жизнен цикъл (fatique life) при умора на материала за даден инструмент [131]. Отчетеното максимално нормално напрежение е

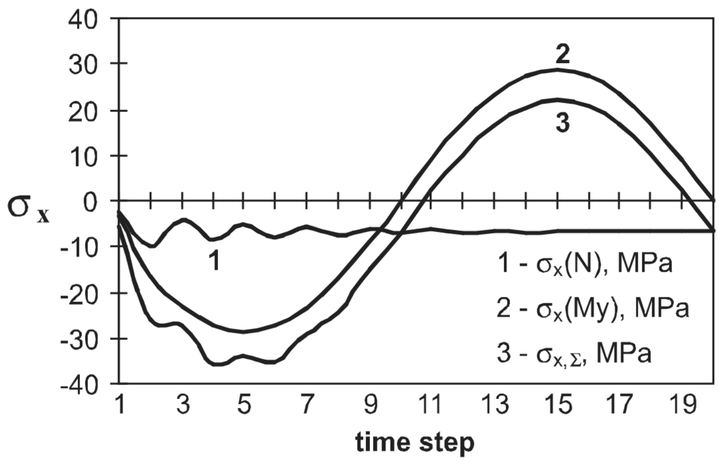
$$\sigma_{x,\Sigma} = 35.9 \text{ MPa}.$$

На Фиг. 4.12 са представени диаграми на големините на огъвния момент $\overline{\mathcal{M}}(x)$ и нормалната сила (реакция) $\overline{\mathcal{N}}(x)$, когато външната сила, която въздейства върху инструмента, е постоянна. Максималното нормално напрежение в периферна точка на сечението B (виж Фиг. 4.8) е

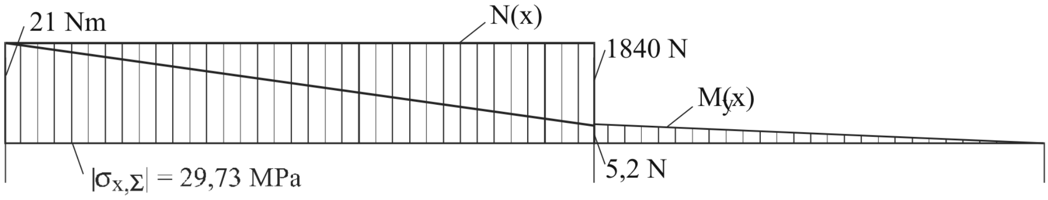
$$\sigma_{x,\Sigma} = 27.4 \text{ MPa}.$$



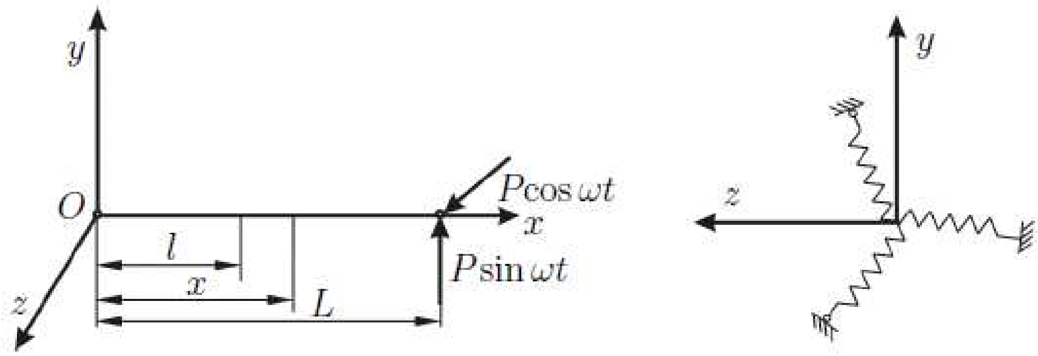
Фигура 4.10: Завъртане на сечението в т. A вследствие на външното въздействие (силата P)



Фигура 4.11: Динамични напрежения в напречното сечение C



Фигура 4.12: Диаграми на моментите $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в случай на статично външно въздействие



Фигура 4.13: Принципна схема на греда, част от която лежи върху Винклерова основа. Опората е представена чрез три пружини

Пример 4.2

В този пример се разглежда цилиндрична (права) греда, част от която е поставена върху Винклерова основа.

Физичните параметри са (виж Фиг. 4.4): $l = 40$ mm, $L = 120$ mm, а диаметърът е $d = 10$ mm.

Основата от Винклеров тип, когато $x \in (0, l)$, е с коефициент $C = 10^5$ N/mm^2. Именно тази основа ще трансформираме посредством три равноотдалечени пружини ($n = 3$). Така те образуват помежду си ъгли, равни на 120° (Фиг. 4.13).

Решаваме следната задача: Търсим функция на динамичните напрежения по нормалата $\sigma_x(t)$ в критичната точка $x = l$, където (виж [130])

$$\sigma_x(t) = \frac{32}{\pi d^2} \frac{\partial^2 \overline{W}(x,t)}{\partial x^2}.$$

Срязващата сила $\overrightarrow{P}$ е представена като геометричен сбор на две периодични функции, зависещи от времето, т.е.

$$P_Z = P \cos \omega t; \quad P_Y = P \sin \omega t,$$

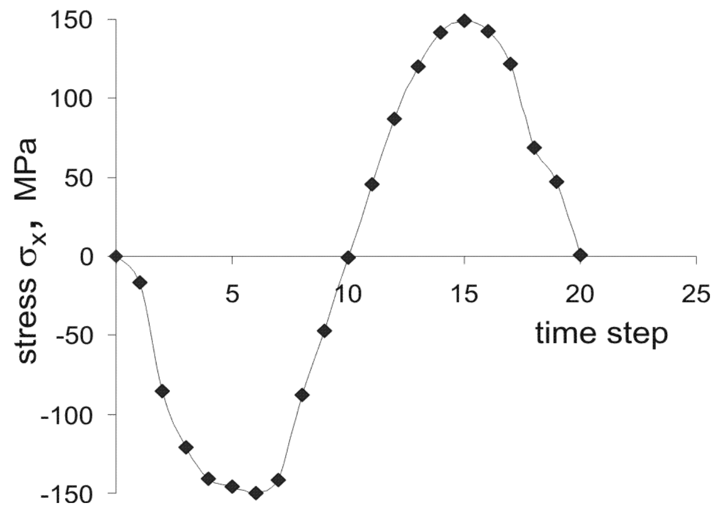
където големината на силата $\overrightarrow{P}$ е означена с P и $P = 180$ N, а $\omega = 20\pi$ s^{-1} са дадени константи.

Изчисленията са извършени чрез разделяне на интервала $(0, l)$ на 30 крайни елементи, т.е. $m = 30$.

Еластичната коравина в коя да е от пружините е:

$$C_m = \frac{Cl}{nm}, \quad \text{тогава } C_{30} = 44444.4 \text{ N/mm}.$$

На Фиг. 4.14 е изобразено изменението на динамичното натоварване в критичната точка $x = l$ за един цикъл, т.е. при $t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$.



Фигура 4.14: Изменение на нормалното напрежение за един цикъл

Пример 4.3

Последният пример е посветен на динамичната задача за винтово свредло с цилиндрична опашка. Неговите физични параметри са (виж Фиг. 4.5): $l = 88$ mm, $L = 132$ mm, диаметърът е $d = 10$ mm, а стъпката на канала (жлеба) е $s = 54$ mm.

Основните осови инерционни моменти са (виж Фиг. 4.6): $J_1 = J_\eta = 0.0041$ d^4 и $J_2 = J_\zeta = 0.025$ d^4.

Стоманата, от която е направено свредлото, има следните характеристики: модул на Young $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, отношение на Poisson $\mu = 0.3$, плътност $\rho = 7850$ kg/m^3.

Изменението на центъра на равновесие в точката C (виж Фиг. 4.6) е представено чрез функциите

$$y = |\overrightarrow{f}|\sin\omega t; \quad z = |\overrightarrow{f}|\cos\omega t,$$

където $\omega = 105$ s^{-1}, $|\overrightarrow{f}| = 1$ mm, а времето $t \in [0, 0.06]$ s. Освен това коефициентът на хистерезиса на материала има стойност 0.01.

Основата от Винклеров тип, т.е. при $x \in (0, l)$, има коефициент $C = 10^5$ N/mm^2.

Отново ще приложим метода на редукция на Винклеровата основа, като я заменим с три ($n = 3$) групи от пружини, разположени равномерно. Следователно, ъглите между тях са 120°. Всяка една от трите групи съдържа m на брой пружини.

Решаваме следната задача: Да се установи максималното нормално напрежение σ_x в критичната точка $x = l$.

Осовата коравина на всяка група във Винклеровата основа е

$$C_m = \frac{C(L-l)}{nm}.$$

При $m = 30$ се получава $C_{30} = 48888.9$ N/mm.

Свободната част на свредлото е дискретизирана чрез крайни елементи от тип BEAM3D. Нормалните напрежения се пресмятат по формулата [130]

$$\sigma_x(x,\eta,\zeta,t) = E\zeta\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - E\eta\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}.$$

Максималното напрежение в периферна точка от сечението с абсциса $x = l$ е в момента $t = t^{\star}$, когато векторът $\overrightarrow{f}$ е перпендикулярен на основната инерционна ос $C_0\zeta$, а C_0 е центърът на сечението. Тогава

$$\max \sigma_x = 451.3 \text{ MPa}.$$

В този случай критичната точка е пресечницата на втората главна инерционна ос $C_0\eta$ с контура на сечението.

Заключение

Получените в дисертацията резултати могат да се резюмират в следните няколко пункта:

1. Направен е пълен анализ за вариационните аспекти на едномерни и многомерни спектрални задачи от четвърти ред в смесена формулировка. Предложена е нова апостериорна техника за смесената бихармонична спектрална задача.

2. Получени са оценки за устойчивост при смесена формулировка спрямо времевата променлива за задача от вискоеластичността.

3. Представен и анализиран е нов подход в МКЕ чрез елементи с интегрални степени на свобода за широк клас спектрални задачи с "нестандартни" гранични условия.

4. Доказани са свойства на някои неконформни крайни елементи и са приложени в апостериорните техники.

5. Дисертацията дава принос в получаване на долни граници на собствените стойности за елиптични оператори от втори и четвърти ред. За пръв път, в този аспект, се извършват числови експерименти с вариант на правоъгълен аналог на елемент на Morley. Предложен е и оригинален алгоритъм за получаване на двустранни оценки на собствените стойности.

6. Даден е нов подход при извод на вариационен математически модел на греда върху Винклерова основа.

7. Предложени са апостериорни алгоритми за ускоряване на сходимостта при смесен и неконформен МКЕ и са дадени условията за тяхната реализация.

Декларация за оригиналност на резултатите

Декларирам, че настоящата дисертация съдържа оригинални резултати, получени при проведени от мен научни изследвания. Резултатите, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са надлежно и подробно цитирани в библиографията.

Настоящата дисертация не е прилагана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Библиография

[1] G. Acosta, P.G. Duràn, The maximum angle condition for mixed and non conforming elements: Application to the Stokes equations. SIAM J. Numer. Anal., **37** (2000), 18-36.

[2] A. Adini and R. Clough, Analysis of plate bending by the finite element method, NSF Report G. 7337, 1961.

[3] K. Adolfsson, M. Enelund, and S. Larsson, Adaptive discretization of an integrodifferential equation with a weakly singular convolution kernel, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **192** (2003), 5285-5304.

[4] K. Adolfson, M. Enelund, S. Larsson and M. Racheva, Discretization of integro-differential equations modelling dynamic fractional order viscoelasticity, Lecture Notes in Computer Science, 2006, Volume 3743 (2006), 76-83.

[5] A.B. Andreev, Superconvergence of the gradient of finite element eigenfunctions, Comp. rend. Acad. bulg. Sci. **43** (1990), 9-11.

[6] A.B. Andreev, Supercloseness between the elliptic projection and the approximate eigenfunction and its application to a postprocessing of finite element eigenvalue problems, LNCS 3401, Springer-Verlag, 100-107, 2005.

[7] A.B. Andreev, R.D. Lazarov, Lumped mass finite element method for parabolic and eigenvalue problems, Mathematica Balkanica, New Series, Vol. 2, 1988 Fasc. 1, 85-92.

[8] A. B. Andreev, R. D. Lazarov and M. R. Racheva, Postprocessing and higher order convergence of mixed finite element approximations of biharmonic eigenvalue problems, JCAM, Vol. 182(2), 2005, 333-349.

[9] A.B. Andreev, R.D. Lazarov and M.R. Racheva, Postprocessing and improved accuracy of the lowest-order mixed finite element method for biharmonic eigenvalues, Lecture Notes in Computer Science, 2006, Volume 3743 (2006), 613-620.

[10] A.B. Andreev, J.T. Maximov and M.R. Racheva, Finite element method for calculation of dynamic stresses in the continuous beam on elastic supports, Sib. JNM, 6(2), 2003, 113-124.

[11] A. B. Andreev, J. T. Maximov and M. R. Racheva, Beams and plates with dynamic loads on an elastic foundation of Winckler's type, Journal of TU-Gabrovo, Vol. 30, 151-158, 2004.

[12] A. B. Andreev, J.T. Maximov and M.R. Racheva, Modelling of the elastic line for twist drill with straight shank fixed in three-jaw chuck, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3401, Springer-Verlag, 116-124, 2005.

[13] A. B. Andreev, J. T. Maximov and M. R. Racheva, Finite element modelling for a beam on the Winckler's type foundation with variable rigidity, Sib. JNM, Vol. 8, No1, 23-30, 2005.

[14] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Superconvergence FE postprocessing for eigenfunctions, Comp. rend. Acad. bulg. Sci. 55, 17-22, No2, 2002.

[15] A. Andreev, M. Racheva, Variational aspects of the mixed formulation for fourth-order elliptic eigenvalue problems, Mathematica Balkanica, Vol.18, Fasc. 1-2, 41-51, 2004.

[16] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Superconvergence of the interpolated quadratic finite elements on triangular meshes, Math. Balkanica, New Series **19**, 3-4, 385-404 (2005).

[17] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Superconvergent finite element postprocessing for eigenvalue problems with nonlocal boundary conditions, Springer LNCS 4818 (2008), 645-653.

[18] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Optimal order finite element method for a coupled eigenvalue problem on overlapping domains, Springer LNCS 4818 (2008), 637-644.

[19] A. Andreev, M. Racheva, Integral type finite elements and its relation to the superconvergence technique, 8th International Conference "Research and Development in Mechanical Industry"RaDMI'08, Užice, Serbia (2008), 673-679.

[20] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Optimal order FEM for a coupled eigenvalue problem on 2D overlapping domains, Numerical Analysis and Its Applications, Springer LNCS 5434 (2009), 151-158.

[21] A.B. Andreev, M.R. Racheva, New approach of FEM for eigenvalue problems with non-local transition conditions, Numerical Analysis and Its Applications, Springer LNCS 5434 (2009), 159-167.

[22] A.B. Andreev, M. R. Racheva, Finite elements with integral degrees of freedom, International Conference UNITECH'09, 20-21 Nov. 2009, Gabrovo, Vol. 3, III-480-III-484.

[23] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Acceleration of Convergence for eigenpairs approximated by means of non-conforming finite element methods, Springer LNCS 5910 (2010), 695-702.

[24] A. Andreev and M. Racheva, On a property of the elliptic bilinear form by nonconforming finite elements, International Conference UNITECH 2010, 19-20 Nov. 2010, Gabrovo, Vol. 3, III-467-III-470.

[25] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Lower bounds for eigenvalues by nonconforming FEM on convex Domain, AIP Conf. Proc. – November 25, 2010 - Vol. 1301, 361-369.

[26] A.B. Andreev, M.R. Racheva, G.S. Tsanev, A Nonconforming Finite Element with Integral Type Bubble Function, Proceedings of 5th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM'10, 3-6, 2011.

[27] A. Andreev, M. Racheva, Properties and estimates of an integral type nonconforming finite element, Springer LNCS 7116, 523-530, 2012.

[28] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Quadratic finite element approximation of a contact eigenvalue problem, Springer LNCS 7116, 531-538, 2012.

[29] A. Andreev, M. Racheva, Why shouldn't some nonconforming finite elements be involved in patch-recovery technique?, International Conference UNITECH 2012, 16-17 Nov. 2012, Gabrovo, Vol. 3, 419-422.

[30] A. Andreev, M. Racheva, Nonconforming rectangular Morley finite elements, Springer LNCS 8236, 158-165, 2013.

[31] A. Andreev and M. Racheva, Two-sided bounds of eigenvalues of second- and fourth-order elliptic operators, Appl. Math., (to appear, 2013).

[32] M. Ainsworth and J.T. Oden, A-posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis, Wiley, New York (2000).

[33] J. Argyris, H.P. Mlejnek, Finite Element Methods, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1986.

[34] M.G. Armentano, R.G. Duràn, Asymptotic lower bounds for eigenvalues by nonconforming finite element methods, Electron. Trans. Numer. Anal. **17** (2004) 93-101.

[35] D.N. Arnold, F. Brezzi, Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates, RAIRO, Model. Math. Anal. Numer., **19** (1985), 7-32.

[36] K. Atkinson and W. Han, Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework, In: Text in Applied Mathematics **39**, 2nd ed., 2007.

[37] I. Babuška, A.K. Aziz, Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method, The Math. Foundations of the FEM with Applications to PDE, A.K.Aziz ed., Academic Press, New York, 1972.

[38] I. Babuška, J. Osborn, Eigenvalue Problems, In Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, (Eds. P. G. Lions and Ciarlet P.G.), Finite Element Methods (Part 1) North-Holland, Amsterdam, 641-787, 1991.

[39] I. Babuška, T. Strouboulis, The Finite Element Method and its Reliability, Oxford Science Publications, 2001.

[40] R. L. Bagley and P. J. Torvik, Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, AIAA Journal **21** (1983), 741-748.

[41] R. L. Bagley and P. J. Torvik, A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity, Journal of Rheology, Vol. 27, No 3 (1983), 201-210.

[42] K.-J. Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Englewood Cliffs, New York: Prentice Hall, Inc., 1982.

[43] A. Baumgart, A mathematical model for wind turbine blade, Journal of Sound and Vibration, Vol. 251, 2002, 1-12.

[44] G.P. Bazaley, Y.K. Cheung, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz, Triangular elements in plate bending - conforming and non-conforming solutions, In: Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, 1965, 547-576.

[45] H. Blum and R. Rannacher, On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners, Math. Meth. in the Appl. Sci., **2** (1980), 556-581.

[46] J.H. Bramble, S. Hilbert, Bounds for the class of linear functionals with application to Hermite interpolation, Numer. Math. V. 16, 1971, No 4, 362-369.

[47] A. Bramwell, Helicopter Dynamic, Edward Arnold, New York, 1989.

[48] S. Brenner, L.R. Scott, The Mathematical Theory for Finite Element Methods, Springer-Verlag, New York, 1994.

[49] F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers, R.A.I.R.O. Anal. Numer., R2, **8** (1974), 129-151.

[50] F. Brezzi and M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[51] F. Brezzi, P.-A. Raviart, Mixed finite element methods for 4th order elliptic equations, Topics in Numer. Anal., vol. III (ed. by J. J. H. Miller), Academic Press, London, 1977, 33Ц56.

[52] X.C. Cai, M. Dryja, M. Sarkis, Overlapping nonmatchinggrids mortar element methods for elliptic problems, SIAM J. Numer. Anal., **36**(2) (1999), 581-606.

[53] C. Canuto, Eigenvalue approximations by mixed methods, RAIRO, Anal. Numer. R3 **12** (1978), 27-50.

[54] C. Canuto, A hybrid finite element method to compute the free vibration frequencies of a clamped plate, R.A.I.R.O. Anal. Numer., **15**(2) (1981), 101-118.

[55] C. Carstensen, S. Bartels and S. Jansche, A posteriori error estimates for nonconforming finite element methods, Numer. Math. **92**(2), 2002, 233-256.

[56] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1978.

[57] P.G. Ciarlet, Basic error estimates for elliptic problems, in: P.G. Ciarlet, J.L. Lions (Eds.), Finite Element Methods (Part 1), in: Handbook of Numerical Analysis, vol. 2, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1991, 21-343.

[58] P.G. Ciarlet, P.-A. Raviart, A mixed finite element method for the biharmonic equation, In Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential equations (C. de Boor, editor), 125-145, Academic Press, New York, 1974.

[59] L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen, Leipzig, Acad. Verlag, 1963.

[60] M.I.M. Copetti, D.A. French, Numerical approximation error control for a termoelastic contact problem, Appl. Numer. Math. **55**(4) (2005), 439-457.

[61] F. Chatelin, Spectral Approximation of Linear Operators. Academic Press, New York, 1983.

[62] Z. Chen and J. Zou, Finite element methods and their convergence for elliptic and parabolic interface problems, Numer. Math. **79** (1998), 175-202.

[63] Z. Chen, Y.D. Yang, The global stress superconvergence of Wilson's brick, Numer. Math. J. Chinese Univ. **27** (special issue) (2005) 301-305.

[64] R. Courant, D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, New York: Interscience, Vol. II, 1962.

[65] M. Crouzeix, P.-A. Raviart, Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationar Stokes equations, RAIRO Anal. Numer. **3** (1973), 33-75.

[66] A.K. Datta, Biological and Bioinvironmental Heat and Mass Transfer, Marcel Dekker, New York, 2002.

[67] H. De Shepper, Finite element analysis of a coupling eigenvalue problem on overlapping domains. J. Comput. Appl. Math., **132** (2001), 141-153.

[68] H. De Shepper, R. Van Keer, On a finite element method for second order elliptic eigenvalue problems with nonlocal Dirichlet boundary conditions, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., **18**(384), 283-295 (1997).

[69] H. De Shepper, R. Van Keer, On a variational approximation method for 2nd order eigenvalue problems in a multi-component domain with nonlocal Dirichlet transition conditions, Numer. Func. Anal. Optim. **19**(9&10), 971-994 (1998).

[70] H. De Shepper, R. Van Keer, A finite element method for elliptic eigenvalue problems in a multi-component domain in 2D with non-local Dirichlet transition conditions, J. Comput. Appl. Math. **111**, 253-265 (1999).

[71] H. De Shepper, R. Van Keer, Finite element approximation of a contact vector eigenvalue problem, Applications of Mathematics, Vol. 48, No 6, 559-571 (2003).

[72] C. Erath, A Posteriori Error Estimate and Adaptive Mesh-Refinement for the Cell-Centered Finite Volume Method for Elliptic Boundary Value Problems, Dirk Praetorius I Vienna University of Technology, Institute for Analysis and Scientific Computing, ASC Report No. 02/2007.

[73] J. Escher, Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions, Commun. in PDEs, **18**(788), 1309-1364, 1993.

[74] R.H. Fabiano and K. Ito, Semigroup theory and numerical approximation for equations in linear viscoelasticity, SIAM J. Math. Anal. 21 (1990), 374-393.

[75] R. Falk and J. Osborn, Error estimates for mixed methods, R.A.I.R.O. Anal. Numer., **14**(3) (1980), 249-277.

[76] G.A. Galin, Contact Problems: The Legacy of L.A. Galin. In: G.M.L. Gladwell, Editor, Springer, Dordrecht (2008).

[77] L. Greenberg and I. Babuška, A continuous analogue of Sturm sequences in the context of Sturm-Liouville equations, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 26, No 4, 920-945, 1989.

[78] P. Grisvard, Elliptic Problems in Nonsmooth Domain, Pitman, Boston, 1985.

[79] P. Grisvard, Singularities in Boundary Problems. MASSON and Springer - Verlag, 1985.

[80] E.J. Hang, K.K. Choi and V. Komkov, Design Sensitivity Analysis of Structural System, Academic Press Inc., 1985.

[81] D.B. Hinton, J.K. Shaw, Differential operators with spectral parameter incompletely in the boundary conditions, Funkcialaj Ekvacioj (Serio Internacia) Vol.33, 363-385, 1990.

[82] H.T. Huang, Z.C. Li, Q. Lin, New expansions of numerical eigenvalues by finite elements, Journal of Computational and Applied Mathematics **217** (2008), 9-27.

[83] Y.Q. Huang, J.C. Xu, A conforming finite element method for overlapping and nonmatching grids, Math. Comp. **72**(243), 1057-1066 (2003).

[84] B.M. Irons, A. Razzaque, Experience with the patch test for convergence of finite elements, in Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differenial Equations (A.K. Aziz, editor), 557-587, Academic Press, New York, 1972.

[85] K. Ishihara, A mixed finite element method for the biharmonic eigenvalue problem of plate bending, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto University, **14** (1978), 399-414.

[86] K. Ishihara, On the mixed finite element approximation for the buckling of plates, Numer. Math., **33** (1979), 195-210.

[87] R.C. Koeller, Application of fractional calculus to the theory of viscoelasticity, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 51 (1984), 299-307.

[88] J. Kraus, S. Margenov and J. Synka, On the multilevel preconditioning of Crouzeix-Raviart elliptic problems, Num Lin. Alg. Appl., **15** (2008), 395-416.

[89] M.G. Larson, A-posteriori and a-priori error analysis for finite element approximations of self-adjoint eigenvalue problems, SIAM J. Numer. Anal. **38** (2000), 562-580.

[90] P. Lascaux, P. Lesaint, Some nonconforming finite elements for the plate bending problem, Rev. Française Automat. Informat. Recherche Operationnelle Sér. Rouge Anal. Numer. R-1 (1975), 9-53.

[91] P. Lesaint, M. Zlamal, Convergence of the nonconforming Wilson element for arbitrary quadrilateral meshes, Numer. Math. **36** (1980) 33-52.

[92] Q. Lin, H.T. Huang, Z.C. Li, New expansions of numerical eigenvalues for $-\Delta u = \lambda \rho u$ by nonconforming elements, Math. Comp. **77** (2008), 2061-2084.

[93] Q. Lin, H.T. Huang, Z.C. Li, New expansions of numerical eigenvalues by Wilson's elements, J. Comput. Appl. Math. **225** (2009) 213-226.

[94] Q. Lin, J.F. Lin, Finite Element Methods: Accuracy and Improvement, Science Press, Beijing, 2006.

[95] Q. Lin, N. Yan, The Construction and Analysis for Effective Finite Element Methods, Hebei University Publishers, Baoding, 1996.

[96] Q. Lin, N. Yan, A. Zhou, A rectangle test for interpolated finite elements. In: Proceedings of Systems Science & Systems Engineering, 217-229, Culture Publish Co. (1991).

[97] Q. Lin, H. Xie, F. Luo, Y. Li, Y. Yang, Stokes eigenvalue approximation from below with nonconforming mixed finite element methods, Mathematics in Practice and Theory, 40(19) (2010), 157Ц168.

[98] Q. Lin, H. Xie, J. Xu, Lower bounds of the discretization for piecewise polynomials, http"//arxiv.org/abs/1106.4395, 2011.

[99] W. Liu, C. Huang, Vibrations of a constrained beam carrying a heavy tip body, Journal of Sound and Vibration, **123** (1989), 15-19.

[100] H.P. Liu, N.N. Yan, Four finite element solutions and comparison of problem for the Poisson equation eigenvalue, Chinese J. Numer. Meth. Comput. Appl. **2** (2005) 81-91.

[101] C. Lubich, Convolution quadrature and discretized operational calculus. I., Numerische Mathematik **52** (1988), 129-145.

[102] Z.L. Mahri, M.S. Rouabah, Calculation of dynamic stresses using finite element method and prediction of fatique failure for wind turbine rotor, WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics, Issue 1, Vol. 3, Jan. 2008, 28-41.

[103] J.T. Maximov, Forming of cross-profile holes by adding rotations round coplanar axes, International Journal of Machine Tools and Manifacture, 2002 **42**(3), 313-320.

[104] B. Mercier, Numerical solution of the biharmonic problem by mixed finite elements of class C^0, Bull. Un. Math. Ital., **10** (1974), 133-149.

[105] B. Mercier, J. Osborn, J. Rappaz and P.A. Raviart, Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods, Math. Comput., **36** (154) (1981), 427-453.

[106] T. Miyoshi, A finite element method for the solution of fourth order partial differential equations, Kumamoto J. Sci. (Math.), **9** (1973), 87-116.

[107] L.S.D. Morley, The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems, Aero. Quart., **19** (1968), 149-169.

[108] S. Nicaise, A posteriori error estimations of some cell-centered finite volume methods, SIAM J. Numer. Anal., **43**(04) (2005), 1481-1503.

[109] A. K. Pani, V. Thomée, and L. B. Wahlbin, Numerical methods for hyperbolic and parabolic integro-differential equations, J. Integral Equations Appl. 4 (1992), 533-584.

[110] C. Park, D. Cheen, A quadrilateral Morley element for biharmonic equations, Numerische Mathematik, Volume 124 (2013), Issue 2, 395-413.

[111] M. Racheva, Fourth-order elliptic problems with eigenvalue parameter on the boundary, J. of Tech. Univ. of Gabrovo, Vol. 32, 3-6, 2005.

[112] M. Racheva, Dynamic loads and stresses acting on wind turbine blades, Journal of TU-Gabrovo, Vol. 42 (2011), 3-6.

[113] M. Racheva, Mixed variational formulation for some fourth order beam problems, Comp. rend. Acad. bulg. Sci. Tome 64, No 11, 2011, 1525-1532.

[114] M. Racheva, Stability estimate for fully discrete dynamic model of viscoelastic materials, International Conference UNITECH 2011, III357-III361, 2011.

[115] M.R. Racheva, Approximation from below of the exact eigenvalues by means of nonconforming FEMs, Mathematica Balkanica (to appear).

[116] M.R. Racheva and A.B. Andreev, Superconvergence postprocessing for eigenvalues, Comp. Methods in Appl. Math., **2** (2002), No 2, 171-185.

[117] R. Rannacher, Nonconforming finite element method for eigenvalue problems in linear plate theory, Numer. Math., **3**, 23-42, 1979.

[118] R. Rannacher, S. Turek, Simple nonconforming quadrilateral Stokes element, Numer. Methods Partial Differential Equations **8** (1992), 97-111.

[119] P.A. Raviart and J.-M. Thomas, Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Derivées Partielles, Masson, Paris, 1988.

[120] A.B. Reece, T.W. Presfon, Finite Element Methods in Electric Power engineering, Oxford University Press, Oxford (2004).

[121] B. Rivier and J.R. Whiteman, Discontinuous Galerkin finite element methods for dynamic linear solid viscoelasticity problems, Numer. Methods Partial Differential equations **23** (2007), 1149-1166.

[122] Z.J. Senderz, Vector finite elements for electromagnetic field problems, IEEE Transactions on Magnetics - 1991, Vol.27, No5, 3958-3966.

[123] S. Shaw and J.R. Whiteman, A posteriori error estimates for space-time finite element approximation of quasistatic hereditary linear viscoelasticity problems, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 193 (2004), 5551-5572.

[124] Z.-C. Shi, On the error estimates of Morley element, Numerica Mathematica Sinica, **12** (1990), 113-118.

[125] Z.-C. Shi, A convergence condition for the quadrilateral Wilson element, Numer. Math. **44** (1984) 349-361.

[126] Z.-C. Shi, A remark on the optimal order of convergence of Wilson's nonconforming element, Math. Numer. Sin. **8**(2) (1986) 159-163 (in Chinese).

[127] T.M. Shin, Numerical Heat Transfer, Hemisphere Publ. Corp., Washington - New York - London (1984).

[128] G. Strang, Variational crimes in the finite element method, in Mathematical foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differenial Equations (A.K. Aziz, editor), 689-710, Academic Press, New York, 1972.

[129] G. Strang, G.J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

[130] S.P. Timoshenko, D.H. Goodier, Theory of Elasticity, London: McGraw Hill Intern. Editions, 1982.

[131] S.P. Timoshenko, W. Weaver and D.H. Young, Vibration Problems in Engineering. John Wiley, New York, fifth edition (1990).

[132] S. Timoshenko, S. Woinowski-Krieger, Theory of Plates and Shells, McGraw - Hill, New York, 1991.

[133] R. Van Keer, H. De Shepper, Finite element approximation for second order elliptic eigenvalue problems with nonlocal boundary or transition conditions, Applied Math. and Computation, **82**, 1-16 (1997).

[134] P.S. Vasilevski, Multilevel Block Factorization Preconditioners: Matrix-based Analysis and Algorithms for Solving Finite Element Equations, Springer, 2008.

[135] P.S. Veers, T.D. Ashwill, Trends in design manufacture an evaluation of wind turbine, Wind Energy, Vol.6, 2003, 245-259.

[136] L. Wang, X. Xie, Uniformly stable rectangular elements for fourth order elliptic singular perturbation problems, eprint arXiv:1101.1218 (2011arXiv1101.1218W).

[137] M. Wang and J. Xu, The Morley element for fourth order elliptic equations in any dimensions, Numer. Math., **103**:1 (2006), 155-169.

[138] M. Wang, J. Xu, Minimal finite element spaces for 2m-th-order partial differential equations in R^n, Mathematics of Computation **82**(281), 2013, 25-43.

[139] M. Wang, Z.-C. Shi and J. Xu, Some n-rectangle nonconforming finite elements for fourth order elliptic equations, J. Comput. Math., **25**(4) (2007), 408-420.

[140] A. Weinstein, W. Stenger, Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues, Theory and Applications, Academic Press, 1972.

[141] E.L. Wilson, R.L. Taylor, W.P. Doherty, J. Ghaboussi, Incompatible displacement methods, in: S.J. Fenves (Ed.), Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Academic Press, New York, 1973.

[142] Y.D. Yang, A posteriori error estimates in Adini finite element for eigenvalue problems, J. Comput. Math., 2000, 18: 413-418.

[143] Y.D. Yang, Z.M. Zhang, F.B. Lin, Eigenvalue approximation from below using nonconforming finite elements, SCIENCE CHINA, Mathematics (2010), Vol. 53 No. 1, 137-150.

[144] J. Xu and A. Zhou, A two-grid discretization scheme for eigenvalue problems, Math. of Comput., **70** No 233 (2001), 17-25.

[145] M.B. Zaaijer, J.H. Vugts, Sensitivity of dynamics of fixed offshore support structures to foundation and soil properties, Proceedings of the European Wind Energy Conference and Exhibition 2001, Denmark, July 2001.

[146] H. Zhang and M. Wang, The Mathematical Theory of Finite Elements, Science Press, Beijing, 1991.

[147] Z. Zhang, Y.D. Yang, Z. Chen, Eigenvalue approximation from below by Wilson's element, Chinese J. Numer. Math. Appl. **29**(4) (2007) 81-84.

[148] O.C. Zienkiewich, J.Z. Zhu, The superconvergence patch-recovery and aposteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity, Int. J. Numer. Methods Eng., **33**, 1365-1382 (1992).

[149] O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung, The Finite Element Method in Structrural and Continuum Mechanics, New York: McGraw-Hill, 1967.

[150] А.Б. Андреев, М.Р. Рачева, Нижние границы для собственных значений и постобработка неконформным методом конечных элементов (МКЭ) интегрального типа, Сибирский журнал вычислительной математики, Т. 15, No 3, с. 235-249. (English version: A.B. Andreev, M.R. Racheva, Lower bounds for eigenvalues and postprocessing by an integral type nonconforming FEM, Numerical Analysis and Applications, Vol. 5, Issue 3, 191-203 (2012).)

[151] С. Михлин, Вариационные методы математической физики, Наука М. 1964.

[152] М. Рачева, Числов анализ и приложения на елиптични спектрални задачи от четвърти ред, Дисертация за присъждане на образователна и научна степен "Доктор", София (2002).