



БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО ИНФОРМАЦИОННИ
И КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ

Мария Димитрова Лимбъри

ОПТИМАЛНИ МНОГОНИВОВИ МЕТОДИ ЗА
КОНФОРМНИ КВАДРАТИЧНИ, БИКВАДРАТИЧНИ И
БИКУБИЧНИ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ

ДИ С Е Р Т А Ц И Я

за присъждане на
образователната и научната степен „Доктор“

Научна специалност: 01.01.09. „Изчислителна Математика“

Научен ръководител: проф. Светозар Маргенов

Научен консултант: доц. Йоханес Краус

София, 2013г.

Съдържание

Увод	4
1 Въведение	17
1.1 Диференциална задача и МКЕ	17
1.2 Итерационни методи за решаване на системи с разредени матрици . . .	22
1.2.1 Метод на спрегнатия градиент	22
1.2.2 Метод на спрегнатия градиент с преобуславяне	24
1.2.3 Обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне	26
1.3 AMLI методи	28
1.3.1 Константа в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц	29
1.3.2 Алгебрични двунивови методи	31
1.3.3 Алгебрични многонивови методи	37
1.3.4 Условия за оптималност	40
2 Йерархични базисни разделяния за квадратични елементи	43
2.1 Мотивация	44
2.2 Крайноелементна матрица на коравина	44
2.3 Йерархични двунивови разделяния	45
2.3.1 DA разделяне	46
2.3.2 FR разделяне	47
2.3.3 P разделяне	48
2.4 Ортоотропна елиптична задача	49
2.4.1 Равномерни оценки на константата на КБШ	50
2.4.2 Решаване на системи с главния блок	51
2.4.3 Основен резултат	53

2.5	Числени експерименти	53
2.6	Заклучение	55
3	Йерархични базисни разделяния за биквадратични и бикубични еле-	
	менти	57
3.1	Мотивация	58
3.2	Биквадратични (Q_2) елементи	58
3.2.1	Равномерно SC сгъстяване на мрежата	58
3.2.2	Балансирано SC сгъстяване на мрежата	67
3.3	Бикубични (Q_3) елементи	72
3.3.1	Равномерно SC сгъстяване на мрежата	72
3.3.2	Балансирано SC сгъстяване на мрежата	81
3.4	Заклучение	86
4	Нейерархични базисни разделяния за квадратични елементи	89
4.1	Мотивация	90
4.2	Рекурсивно построени многонивови методи	91
4.2.1	Разширена груба мрежа	91
4.2.2	Апроксимация на допълнението на Шур	97
4.3	Анализ на оператора на изглаждане	101
4.4	Двунивов анализ	105
4.5	Числени експерименти	110
4.6	Заклучение	115
	Заклучение	119
	Списък на използвани съкращения	123
	Литература	125

Увод

Съвременно състояние и актуалност на темата

Компютърното моделиране е една бързо развиваща се интердисциплинарна област, която намира все повече нови приложения при решаването на различни задачи от физиката, астрофизиката, химията, биологията, икономиката, психологията, социалните и инженерни науки. То включва създаването на: а) математически модел, който адекватно описва съответния реален феномен; б) числени методи, с които се дискретизират диференциалните и/или интегрални уравнения в математическия модел; в) ефективни методи и алгоритми, с които се решават системите линейни алгебрични уравнения, получени след дискретизацията; г) алгоритми, с които се визуализират и анализират резултатите от проведените числени експерименти; д) високопроизводителни компютърни програми, които максимално използват възможностите и архитектурата на съвременните изчислителни системи. Компютърните симулации дават възможност за икономии при скъпо струващи лабораторни и практически експерименти. Те са особено приложими и важни също така при моделирането на нови материали и технологии, както и при изследването на процеси, за които измерванията и наблюденията са невъзможни, а аналитичното решение твърде сложно.

Съществуват различни техники за дискретизация на моделната задача, като едни от най-утвърдените са методът на крайните елементи (МКЕ) и методът на крайните разлики (МКР), виж например [22, 24, 37, 71]. Тяхното прилагане води до система от линейни алгебрични уравнения, [1, 3], която притежава важното свойство, че съответната матрица е разреждана, т.е., броят на ненулеви елементи във всеки ред или стълб е ограничен от константа, независеща от параметъра на дискретизация на съответния метод. Тези системи също така могат да имат голяма размерност, което налага развитието на специални числени методи и алгоритми, предназначени за

ефективното решаване на задачи с разредени матрици. Нарастването на производителността на изчислителната техника променя разбирането за голяма размерност, но независимо от прогреса в това направление, определящи за развитието на компютърното моделиране са постиженията в областта на числените методи и алгоритмите за тяхната реализация, [3, 8]. Резултатите, които представяме в настоящата дисертация, са в тази област.

МКЕ и МКР принадлежат към групата на така наречените *мрежови методи*. При определени предположения матриците, получени след дискретизацията на моделната задача по двата метода, имат близки свойства и дори могат да съвпадат, но по отношение на общността и алгоритмите за неговата реализация МКЕ има известно преимущество. В настоящия труд системно се използват терминологията и свойствата на МКЕ.

Дискретизацията с конформни линейни крайни елементи е най-естественият избор и най-добре изученият случай на прилагане на МКЕ, като за ефективното решаване на произтичащите линейни системи са разработени специални числени алгоритми. Както е показано в [9] и [60] обаче, тези алгоритми не са робастни за крайноелементни задачи, при които посредством специални техники на разделяне на крайноелементното пространство първоначалната система, базирана на дискретизация с конформни квадратични елементи, се свежда до система, съответстваща на конформни линейни елементи. Важно е да отбележим, че независимо от по-голямата точност на приближеното решение при използването на крайни елементи от по-висок ред, [28], и приложението им в редица приложни задачи, като например от областта на физика на плазмата, [43], свързаните крайноелементни системи от по-висок ред досега са изследвани в много малка степен, виж например [61].

Това са някои от причините за специалния интерес към използването на тези елементи за ефективно числено решаване на диференциални уравнения, което е предмет на настоящата дисертация.

Ако за численото решаване на елиптична гранична задача в област $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, използваме мрежов числен метод, при много общи предположения диференциалната задача се свежда до система от линейни алгебрични уравнения с $(N \times N)$ матрица A , която е симетрична и положително определена (SPD). Съществуват два основни подхода при решаването на такъв клас линейни системи - преки и итерационни. Класически представител на преките методи е методът на Гаус, виж [1, 3], чиято из-

числителна сложност е $\mathcal{O}(N^3)$. Най-бързият измежду преките методи с изчислителна сложност $\mathcal{O}(N^{3/2})$ е методът на вложените сечения (Nested Dissection), виж например [8], който се базира на рекурсивното разделяне на графа, представящ структурата на ненулевите елементи на матрицата A . Асимптотично същата сложност има и методът на спрегнатия градиент, който е един от най-популярните итерационни методи. Поради тази причина итерационните методи са се наложили над преките, особено при решаването на задачи с достатъчно голяма размерност.

Методът на спрегнатия градиент е съвременен итеративен метод, минимизиращ квадратичен функционал върху редица от подпространства на Крилов, виж [6, 8, 22]. Негово обобщение е методът на спрегнатия градиент с преобуславяне, чиято ефективност се определя от качествата на преобусловителя. Когато се използва модифицирана непълна факторизация на Холецки (MIS) за преобусловител, общата изчислителна сложност на алгоритъма е $\mathcal{O}(N^{5/4})$, виж [39]. Да отбележим също така, че в този конкретен случай методът на спрегнатия градиент с преобуславяне има доказано ефективна паралелна реализация, виж [4, 20]. Изследванията в областта на конструирането на така наречените *оптимални преобусловители*, за които методът на спрегнатия градиент с преобуславяне има изчислителната сложност $\mathcal{O}(N)$, допринасят значително за развитието на методите за решаване на линейни системи.

Методите, построени върху последователност (йерархия) от дискретизации, играят важна роля в теорията на съвременните итерационни методи, и се разделят основно на две групи - многомрежови (multigrid), [11, 23, 40], и многонивови (multilevel) методи, [12, 14, 15, 56, 73]. Особеност на многомрежовите методи е, че използват повече свойствата на диференциалната задача, докато при многонивовите конструкцията е в значителна степен алгебрична. Рекурсивните итерационни методи, основаващи се на последователност от вложени мрежи, за първи път са въведени от Р. Федеронко през 1961 година, [32]. През 1987 година П. Василевски, Р. Лазаров и С. Маргенов в [56] представят конструкцията на почти оптимален алгебричен многонивов метод, като решителна следваща стъпка е направена в работите на Акселсон и Василевски, [14, 15], поставящи началото на AMLI методите. Свързана публикация, разглеждаща почти оптимални преобусловители за елиптични задачи, е в областта на циркулантните блочни факторизации, виж [57].

Както в други дялове на математиката и компютърните науки, и в областта на оптималните алгебрични итерационни методи можем напълно заслужено да говорим

за българска школа, която успешно продължава да се развива. Съществени приноси в това направление имат Панайот Василевски, Райчо Лазаров, Светозар Маргенов, Мая Нейчева, Людмил Зикатанов. Важно е да споменем и близкото сътрудничество на българската школа с редица водещи учени в тази област, сред които са Уве Акселсон, Улрих Лангер, Радим Блахета и Йоханес Краус.

Методология на изследването

Понятията изчислителна сложност, скорост на сходимост и робастност (от англ. *robustness* или *устойчивост*) са основни в методологията на изследване в дисертацията. Представените резултати са с конструктивен характер, а предложените методи имат ясна алгоритмична структура и анализ.

Методът на спрегнатия градиент с преобуславяне се е наложил сред останалите съвременни итерационни методи. Определящи за неговата ефективност са скоростта на сходимост, която зависи от спектралното число на обусловеност на преобусловената матрица $\kappa(B^{-1}A)$, и изчислителната сложност на решаването на системи с преобусловителя B .

В случая на многонивови преобусловители числото на обусловеност може да се оцени с помощта на константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ). Нови оптимални многонивови алгоритми са предложени и анализирани в дисертационния труд. Използваният апарат на изследване включва построяването на спектрално еквивалентни приближения за специални класове матрици, възникващи в процеса на многонивова факторизация, получаването на нови равномерни оценки за константата в усиленото неравенство на КБШ и дефинирането на подходящи оператори на изглаждане, стабилизиращи числото на обусловеност.

Представените методи и алгоритми в дисертационния труд имат програмна реализация. Проведени са числени експерименти, чиито резултати са анализирани.

Цели на дисертационния труд

Основните цели на изследванията в представената дисертация са:

- Разработване и изследване на оптимални преобусловители от класа на алгеб-

ричните многонивови (Algebraic Multilevel Iteration или AMLI) методи, които се основават на йерархични базисни разделяния за крайноелементни дискретизации с конформни квадратични елементи на елиптичната гранична задача от втори ред.

- Разработване и изследване на оптимални преобусловители от класа на алгебричните многонивови методи, които се основават на йерархични базисни разделяния за крайноелементни дискретизации с конформни биквадратични и конформни бикубични елементи на елиптичната гранична задача от втори ред.
- Разработване и изследване на оптимални преобусловители от класа на алгебричните многонивови методи, които се основават на нейерархични базисни разделяния за крайноелементни дискретизации с конформни квадратични елементи на елиптичната гранична задача от втори ред.

Работата по дисертацията цели не само теоретичното изследване на предложените алгоритми, но и тяхната програмна реализация. Представен е анализ на резултатите от проведените числени експерименти.

Съдържание на дисертацията

Глава 1. Въведение

Първата глава има за цел да въведе читателя в тематиката и терминологията на проведеното изследване. Тя започва с представяне на диференциалната задача и нейната дискретизация, като накратко описва метода на крайните елементи и основни негови свойства. В Раздел 1.2 се разглеждат итерационни методи за решаване на системи линейни уравнения с разреждени матрици, като по-детайлно е представен методът на спрегнатия градиент с преобуславяне. Дадена е оценка за неговата скорост на сходимост с помощта на числото на обусловеност на матрицата на системата и са формулирани стратегията за конструиране на ефективни преобусловители и условията за оптималност.

Въведение в теорията на оптималните алгебрични многонивови методи е направено в раздел 1.3. Многонивовите методи представляват рекурсивно обобщение и разширение на съответните двунивови методи, базирани на двунивово разделяне на

крайноеlementното пространство. Оценка на качеството на двунивовите разделяния може да се направи посредством изследване на константата в усиленото неравенство на КБШ, която се използва при анализа на числото на обусловеност на преобуславената матрица. Разгледан е двунивовият мултипликативен преобусловител и неговото многонивово обобщение.

Изложението в тази глава завършва с представянето на основните резултати за сходимостта на линейните и нелинейни AMLI алгоритми, използващи този преобусловител, и съответните условия за оптималност.

Глава 2. Йерархични базисни разделяния за квадратични елементи

Раздел 2.1 представя мотивацията за изследването на йерархични базисни разделяния за конформни квадратични крайни елементи, като се акцентира върху потенциала на йерархичния базис при разработването на робастни многонивови методи.

В следващия раздел е получена елементната матрица на коравина за конформен квадратичен елемент и е показано основно трансформационно свойство на крайноеlementните функции между два елемента. В Раздел 2.3 са описани основните техники за получаване на йерархични двунивови разделяния, а именно DA, FR и P разделянията.

Ортотропната елиптична задача е във фокуса на Раздел 2.4. За нея е доказана равномерна оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ, откъдето следва и резултатът за спектралното число на обусловеност на преобуславената система. Предложен е оптимален преобусловител на водещия блок на матрицата при йерархично двунивово разделяне. Като основен резултат е доказано, че така конструираният AMLI преобусловител за ортотропната елиптична задача има оптимална изчислителна сложност.

В Раздел 2.5 са представени числени експерименти за DA, FR и P йерархичните разделяния за произволен елиптичен оператор, както и числено пресметнати стойности на числото на обусловеност на преобусловената система с допълнението на Шур за ортотропната елиптична задача. Заключение, анализиращо получените числени резултати, е представено в Раздел 2.6.

Глава 3. Йерархични базисни разделяния за биквадратични и бикубични елементи

В тази глава са изследвани йерархични базисни двунивови разделяния за конформни биквадратични и бикубични елементи, където сгъстяването на мрежата на всяка стъпка се извършва по едно от координатните направления. Раздел 3.1 представя мотивацията за избора на процедура на сгъстяване, като изтъква нейното успешно приложение за билинейни дискретизации и възможността за паралелно реализиране. Раздел 3.2 е посветен на биквадратичните елементи, за които са разгледани равномерният и балансираният вариант на предложената процедура съответно в Раздел 3.2.1 и Раздел 3.2.2. Пресметната е елементната матрица на коравина за биквадратичен конформен елемент и са получени равномерни оценки на КБШ константите. Разгледан е въпросът за решаването на системи с главния блок на матрицата на коравина при йерархично двунивово разделяне на неизвестните. На базата на тези резултати са конструирани оптимални AMLI преобусловители. Представените числени експерименти потвърждават асимптотичната точност на получени оценки.

В Раздел 3.3 се разглеждат същите процедури на сгъстяване на мрежата, както за биквадратичните елементи, но за бикубични. В Раздели 3.3.1 и 3.3.2 са представени съответно резултати за случаите на равномерно и балансирано разделяне. По-детайлно, за конформен бикубичен елемент е получена елементната матрица на коравина. Оптимални AMLI преобусловители са конструирани на базата на доказани равномерни оценки на КБШ константите и оптималното решаване на системи с главния блок. Представените числени експерименти се съгласуват с получените оценки. Главата завършва с Раздел 3.4, представящ заключителни коментари.

Глава 4. Неийерархични базисни разделяния за квадратични елементи

Глава 4 е посветена на изследването на алтернативна техника, избягваща използването на йерархичен базис, за получаването на робастни многонивови преобусловители. Мотивацията в Раздел 4.1 подчертава нуждата от нов подход за ефективното решаване на силно анизотропни елиптични крайноелементни системи, базирани на конформни квадратични елементи, и изброява някои от предимствата на предложе-

ния иновативен подход. Раздел 4.2 представя рекурсивната конструкция на много-нивови методи, базирани на апроксимация на допълнението на Шур върху редица от вложени разширени мрежи.

Оператор на изглаждане е конструиран и анализиран в Раздел 4.3. Оценка на грешката от прилагането на двунивовия преобусловител е дадена в Раздел 4.4, където доказателството е изцяло конструктивно. Проведени са числени експерименти с нелинеен AMLI преобусловител. В Раздел 4.6 са представени заключителни забележки.

Списък на публикациите по дисертацията

Научни публикации в международни списания с импакт фактор (IF)

- M. Lyubery, S. Margenov: Robust Semi-Coarsening Multilevel Preconditioning of Biquadratic FEM Systems, Cent. Eur. J. Math., 10(1), 2012, 357-369. IF=0.44
- J. Kraus, M. Lyubery, S. Margenov: Robust multilevel methods for quadratic finite element anisotropic elliptic problems. Numerical Linear Algebra With Applications, to appear, 24 pages. IF=1.168

Научни публикации в международни поредици с SJR ранг:

- I. Georgiev, M. Lyubery, S. Margenov: Analysis of the CBS Constant for Quadratic Finite Elements, LNCS, 6046, 2011, 412-419. SJR=0.33
- J. Kraus, M. Lyubery, S. Margenov: On the Robustness of Two-Level Preconditioners for Quadratic FE Orthotropic Elliptic Problems, LNCS, 7116, 2012, 582-589. SJR=0.33
- M. Lyubery, S. Margenov: Robust Balanced Semi-Coarsening AMLI Preconditioning of Biquadratic FEM Systems, AIP Conf. Proc., 1404, 2011, 438-447. SJR=0.14
- J. Kraus, M. Lyubery, S. Margenov: Semi-Coarsening AMLI Preconditioning of Higher Order Elliptic Problems, AIP Conf. Proc., 1487, 2012, 30-41. SJR=0.14

Глави в книги:

- J. Kraus, M. Lymbery, S. Margenov: Robust Algebraic Multilevel Preconditioners for Anisotropic Problems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, volume “Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Algorithms and their Applications in honor of Professor Raytcho Lazarov’s 40 years in Computational and Applied Mathematics”. (to appear, 27 pages)

Научни публикации в сборници с разширени абстракти:

- I. Georgiev, J. Kraus, M. Lymbery, S. Margenov: On Two-level Splittings for Quadratic FEM Anisotropic Elliptic Problems, Annual Meeting of BGSIAM’10, 35-40.

Апробация на резултатите

Съществени части от дисертацията са представени на следните специализирани международни научни конференции:

- 7th International Conference on “Numerical Methods and Applications”, Боровец, България, 2010
- 8th International Conference on “Large-Scale Scientific Computations”, Созопол, България, 2011
- 3rd Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the “Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences”, Албена, България, 2011
- 4th Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the “Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences”, Св. Св. Константин и Елена, Варна, България, 2012
- “European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering”, Виена, Австрия, 2012

Резултати от дисертацията са докладвани и в рамките на:

- 5th Annual Meeting of BGSIAM’10, София, България, 2010

- семинар към Йохан Радон Института по Изчислителна и Приложна Математика, Австрийска Академия на Науките, Линц, Австрия, 2011
- семинар към Института по Информационни и Комуникационни Технологии, Българска Академия на Науките, София, България, 2012

Участие в научни проекти

- Център за върхови научни постижения „Суперкомпютърни приложения”, фонд „Научни изследвания”, ДО02-115/2008.
- Доизграждане на Център за върхови научни постижения „Суперкомпютърни приложения”, фонд „Научни изследвания”, ДЦВП02/1.
- Ефективни многонивови методи и алгоритми за задачи с хетерогенни коефициенти, фонд „Научни изследвания”, ДМУ 03-62/2011.
- Съвременните пресмятания в полза на иновацията, фонд „Капацитети” в 7-ма Рамкова програма на Европейската комисия (ЕК), „Научно-изследователски потенциал в конвергентните райони”, FP7, договор 316087.

Благодарности

Поднасям своята най-дълбока благодарност на научния си ръководител проф. д-р Светозар Маргенов за ефективното ръководство и ползотворното съдействие в успешната съвместна работа по задачите от дисертацията.

Най-сърдечно благодаря на научния си консултант доц. Йоханес Краус за ценните напътствия, дискусии и морална подкрепа при провеждането на настоящето изследване. Благодаря също на колегите от Йохан Радон Института по Изчислителна и Приложна Математика, Австрийска Академия на Науките, Линц, за проявеното гостоприемство и отзивчивост и полезни дискусии по време на посещенията ми там.

Изключително задължена съм и на д-р Райна Георгиева за оказаната техническа помощ, както и на всички колеги от ИИКТ БАН за съветите, подкрепата и стимулиращата творческа атмосфера. Благодарна съм за оказаната подкрепа в рамките на цитираните научни проекти към фонд "Научни Изследвания".

Посвещавам дисертацията на цялото си семейство, които проявиха непрекословна подкрепа, търпение и разбиране.

Глава 1

Въведение

Настоящата глава цели да въведе читателя в предметната област на изследванията в дисертацията. В нея се обобщават известни факти, необходими при изложението на представените в следващите глави авторски резултати.

Този труд е посветен на разработването на ефективни итерационни алгоритми за решаване на системи, получени чрез дискретизации по МКЕ с конформни крайни елементи от по-висок ред. В следващите раздели на кратко описваме диференциалната задача, обект на нашето изследване, основни резултати за метода на крайните елементи, представяме методите на спрегнатия градиент, спрегнатия градиент с преобуславяне и обобщения метод на спрегнатия градиент с преобуславяне. Направено е въведение в теорията на оптималните AMLI алгоритми, базирани на многонивови блочни факторизации.

1.1 Диференциална задача и МКЕ

Разглеждаме елиптичната гранична задача от втори ред

$$Lu \equiv -\nabla \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega, \quad (1.1.1a)$$

$$u = 0 \quad \text{върху } \Gamma_D, \quad (1.1.1b)$$

$$(\mathbf{a}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{върху } \Gamma_N, \quad (1.1.1c)$$

където Ω е изпъкнала многоъгълна област в \mathbb{R}^2 , f е отнапред зададена функция в $L_2(\Omega)$, а неизвестната функция u , удовлетворяваща граничните условия (1.1.1b)–

(1.1.1в), търсим в пространството

$$H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} < \infty\}.$$

Границата $\Gamma = \partial\Omega$ е обединението на непразна част Γ_D , върху която хомогенното условие на Дирихле (1.1.1б) е наложено и (възможно празна) част Γ_N , върху която решението u трябва да удовлетворява хомогенното условие на Нойман (1.1.1в), т.е., $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Външната нормала към границата $\Gamma = \partial\Omega$ е означена с \mathbf{n} . Ще считаме, че коефициентната матрица $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^2$ е SPD и равномерно ограничена в Ω , т.е. съществуват положителни константи c_1 и c_2 , такива че

$$c_1 \|\mathbf{v}\|^2 \leq \mathbf{v}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \leq c_2 \|\mathbf{v}\|^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.1.2)$$

Задача (1.1.1) ще решаваме посредством метода на крайните елементи. Това е вариант на класическия метод на Рунге, при който екстремумът на функционала, дефиниран чрез вариационната формулировка на метода, се търси в на части полиномиално крайномерно пространство.

Този метод първоначално е използван за решаването на инженерни задачи. По-късно МКЕ се превръща в един от утвърдените методи за числено решаване на широк спектър от задачи, виж [8, 26, 71], поради изключителната му приложимост за области с произволна геометрия и неструктурирани мрежи, елегантна формулировка и робастност.

Задача (1.1.1) има следната вариационна формулировка: За дадена дясна част $f \in L_2(\Omega)$, търсим $u \in \mathcal{V} \equiv H_D^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ върху } \Gamma_D\}$, такава че

$$\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (1.1.3)$$

където

$$\mathcal{A}(u, v) := \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \mathcal{L}(v) := \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Идеята е пространството \mathcal{V} да се замени с подходящо крайномерно подпространство \mathcal{V}_h , в което да се търси решението на вариационната задача (1.1.3). Най-честият избор в МКЕ са подпространствата \mathcal{V}_h , които съдържат на части полиномиални функции.

Нека Ω е многоъгълна област. При МКЕ тя се разделя на краен брой подобласти, наричани крайни елементи, които обикновено имат проста форма и формират

крайнолементна мрежа (триангулация). Мрежа \mathcal{T}_h , състояща се от еднакви елементи e , наричаме равномерна. Характерният размер на даден елемент e се означава h_e , докато числото $h := \max_{e \in \mathcal{T}_h} h_e$ е мрежовият параметър.

Нека означим с $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ пространството от непрекъснати функции, дефинирани върху $\bar{\Omega}$. Тогава при предположение, че

$$\mathcal{V}_h := \{v : v|_e \in \mathcal{P}_r(e), e \in \mathcal{T}_h\},$$

където $\mathcal{P}_r(e)$ е пространството от полиноми от степен най-много r върху e , следното условие за непрекъснатост е в сила, виж например [44]

$$\mathcal{V}_h \subset H^1(\Omega) \text{ тогава и само тогава, когато } \mathcal{V}_h \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}). \quad (1.1.4)$$

Безкрайномерното пространство \mathcal{V} в (1.1.3) се заменя с крайномерното \mathcal{V}_h и получаваме следната формулировка на задачата: Търсим $u_h \in \mathcal{V}_h$, такава че

$$\mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \mathcal{L}_h(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h, \quad (1.1.5)$$

където

$$\mathcal{A}_h(u_h, v_h) \equiv \mathcal{A}(u_h, v_h) := \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.1.6a)$$

$$\mathcal{L}_h(v_h) \equiv \mathcal{L}(v_h) := \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.1.6b)$$

Билинейната форма $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)_h$ за елиптичната моделна задача може да се представи още във вида

$$\mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \int_e \mathbf{a}(e) \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\mathbf{x}, \quad (1.1.7a)$$

където \mathbf{a}_e е на части константна SPD матрица, определена от интегрално усреднените стойности на $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ върху всеки елемент $e \in \mathcal{T}_h$, т.е.,

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{|e|} \int_e \mathbf{a}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall e \in \mathcal{T}_h. \quad (1.1.8)$$

Всеки МКЕ с на части полиноми, за който $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, наричаме конформен метод [22], а когато тестовите функции v_h са от същото пространство, в което се търси приближеното решение u_h , МКЕ се нарича стандартен метод на *Галъоркин*.

От (1.1.3) и (1.1.5) следва, че за конформните методи е в сила

$$\mathcal{A}(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h, \quad (1.1.9)$$

откъдето следва, че u_h е елементът на най-добро приближение на точното решение u в подпространството \mathcal{V}_h в нормата, породена от $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$, т.е.

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{A}} \leq \|u - v_h\|_{\mathcal{A}}, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h.$$

Нека $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ е базисът на крайноелементното пространство \mathcal{V}_h . Тогава всяка функция $v_h \in \mathcal{V}_h$ има единствено представяне $v_h = \sum_{i=1}^N v_i \phi_i$, където v_i са реални числа. Ако разложим решението на (1.1.5) по базисните функции, т.е. $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$, задача (1.1.5) може да се формулира като

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_h(\phi_i, \phi_j) u_i = \mathcal{F}_h(\phi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1.10)$$

което записано в матрична форма има вида

$$A_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}_h, \quad (1.1.11)$$

където $\mathbf{u}_h = \{u_i\}_{i=1}^N$ е търсеният вектор, а $\mathbf{b}_h = \{b_i\}_{i=1}^N$ се определя от

$$b_j = \mathcal{F}_h(\phi_j), \quad 1 \leq j \leq N.$$

Поради факта, че базисните функции ϕ_i имат локален носител, така наречената матрица на коравина $A = A_h = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ с елементи

$$a_{ij} = \mathcal{A}_h(\phi_i, \phi_j)$$

е *разредена* матрица, т.е. броят на ненулевите елементи във всеки ред е $\mathcal{O}(1)$.

От свойствата на елиптичната билинейна форма $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$, също така следва, че матрицата на коравина е SPD матрица.

За спектралното число на обусловеност на матрицата на коравина за елиптична задача от втори ред е в сила оценката

$$\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} = \mathcal{O}(h^{-2}), \quad (1.1.12)$$

където h е характерният размер на квази-регулярната мрежа \mathcal{T}_h .

Настоящата дисертация използва математическата концепция за силна анизотропия или ортотропия на елиптичната задача (1.1.1), (виж например [29]). Нека означим собствените стойности и вектори на коефициентната матрица $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ съответно с $0 < \mu_1(\mathbf{x}) \leq \mu_2(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2$, където $\mathbf{x} \in \Omega$. Тогава

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mu_1(\mathbf{x}) \mathbf{q}_1(\mathbf{x})\mathbf{q}_1(\mathbf{x})^T + \mu_2(\mathbf{x})\mathbf{q}_2(\mathbf{x})\mathbf{q}_2(\mathbf{x})^T$$

и очевидно

$$\mu_1(x)\mathbf{q}^T\mathbf{q} \leq \mathbf{q}^T\mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{q} \leq \mu_2(x)\mathbf{q}^T\mathbf{q}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2.$$

Различните варианти на собствените стойности $\mu_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2$ определят различни сценарии за силно анизотропни материали. Коефициентът на анизотропия се дефинира като

$$\kappa(\mathbf{a}) := \max_{\mathbf{x}} \frac{\mu_2(\mathbf{x})}{\mu_1(\mathbf{x})},$$

а посоката на доминираща анизотропия се определя от собствения вектор $\mathbf{q}_2(\mathbf{x})$.

В следващите глави ще изследваме три представителни варианта на коефициентната матрица \mathbf{a}_e от (1.1.8):

(a) *Ортотропната анизотропна задача*, където

$$\mathbf{a}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{e:11} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{e:22} \end{bmatrix}, \quad 0 < \mathbf{a}_{e:22} \leq \mathbf{a}_{e:11}; \quad (1.1.13)$$

(b) *Неортотропната анизотропна задача*, за която

$$\mathbf{a}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{e:11} & \mathbf{a}_{e:12} \\ \mathbf{a}_{e:12} & \mathbf{a}_{e:22} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} 0 < \mathbf{a}_{e:22} \leq \mathbf{a}_{e:11}, \\ -\sqrt{\mathbf{a}_{e:11}\mathbf{a}_{e:22}} < \mathbf{a}_{e:12} < \sqrt{\mathbf{a}_{e:11}\mathbf{a}_{e:22}}; \end{array} \quad (1.1.14)$$

(c) Задачата със завъртаща се посока на доминираща анизотропия, (на англ. *rotated diffusion problem*), представена с

$$\mathbf{a}_e = \begin{bmatrix} \iota + \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \iota + \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \iota I + \mathbf{d}\mathbf{d}^T, \quad (1.1.15)$$

където $\iota > 0$ и $\mathbf{d}^T = (\cos \theta, \sin \theta)$ за на части константен ъгъл $\theta = \theta_e$.

1.2 Итерационни методи за решаване на системи с разредени матрици

1.2.1 Метод на спрегнатия градиент

Нека A е SPD матрица. При тези условия решението на линейната система

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1.2.16)$$

съвпада с минимума на квадратичния функционал ψ

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}, \quad (1.2.17)$$

който е $-\frac{1}{2}\mathbf{b}^T A^{-1}\mathbf{b}$ и се достига за $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. За да минимизираме $\psi(x)$, построяваме редицата от приближени решения $\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(k)}, \dots$ посредством следната проста итерационна процедура

$$\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{(n-1)} + \alpha_{(n)}\mathbf{r}_{(n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.2.18)$$

където с $\mathbf{r}_{(n-1)}$ сме означили резидуала

$$\mathbf{r}_{(n-1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_{(n-1)} = \nabla\psi(\mathbf{x}_{(n-1)}), \quad (1.2.19)$$

а $\alpha_{(n)}$ минимизира $\nabla\psi(\mathbf{x}_{(n-1)} + \alpha_{(n)}\mathbf{r}_{(n-1)})$. Така получаваме

$$\alpha_{(n)} = \frac{\mathbf{r}_{(n-1)}^T \mathbf{r}_{(n-1)}}{\mathbf{r}_{(n-1)}^T A \mathbf{r}_{(n-1)}}. \quad (1.2.20)$$

Итерационният процес (1.2.18)–(1.2.20) е известен в математическата литература като *метод на най-бързото спускане*, тъй като $\mathbf{r}_{(n-1)}$ е отрицателният градиент на ψ в $\mathbf{x}_{(n-1)}$. За грешката на n -тата итерационна стъпка е в сила оценката

$$\|\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}\|_A^2 \leq \|\mathbf{x}_{(n-1)} - \mathbf{x}\|_A^2 \left(1 - \frac{4}{2 + \kappa(A) + 1/\kappa(A)} \right), \quad (1.2.21)$$

където $\|\cdot\|_A$ е енергетичната норма, породена от матрицата A , т.е.

$$\|\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}\|_A^2 = \langle (\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}), (\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}) \rangle_A = (\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x})^T A (\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}).$$

Методът на най-бързото спускане обаче, често се сходя бавно, особено в случаите когато направленията на търсене, в случая \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, имат много близки

посоки. За да преодолеем този проблем, можем да наложим допълнителното изискване те да бъдат взаимно ортогонални по отношение на енергетичното скалярно произведение, виж например [53].

Методът на спрегнатия градиент (Conjugate Gradient или CG) е предложен през 1952 година от Hestenes и Stiefel в [42] и изпълнява това условие. Съответният алгоритъм има следния вид:

Алгоритъм 1.2.1. *[CG метод](виж например [36, 53])*

```

n = 0;  x(0);  r(0) = b - Ax(0);
for n = 1 to n = n_max
    if (критерий за спиране е изпълнен) stop
    if (n == 1) then
        P(1) = r(0)
    else
         $\tau_n = -\frac{\langle \mathbf{r}_{(n-1)}, \mathbf{P}_{n-1} \rangle_A}{\langle \mathbf{P}_{(n-1)}, \mathbf{P}_{(n-1)} \rangle_A}$ 
        P(n) = r(n-1) +  $\tau_n \mathbf{P}_{(n-1)}$ 
    end
     $\alpha_n = \frac{\langle \mathbf{r}_{(n-1)}, \mathbf{r}_{(n-1)} \rangle}{\langle \mathbf{P}_{(n)}, \mathbf{P}_{(n)} \rangle_A}$ 
    x(n) = x(n-1) +  $\alpha_n \mathbf{P}_{(n)}$ 
    r(n) = b - Ax(n)
end

```

Следната фундаментална лема е в сила за CG метода:

Лема 1.2.1. *След реализацията на n стъпки в метода на спрегнатия градиент са в сила равенствата*

$$\text{span}\{\mathbf{P}_{(1)}, \mathbf{P}_{(2)}, \dots, \mathbf{P}_{(n)}\} = \text{span}\{\mathbf{r}_{(0)}, \mathbf{r}_{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{(n-1)}\} \quad (1.2.22a)$$

$$= \text{span}\{\mathbf{r}_{(0)}, A\mathbf{r}_{(0)}, \dots, A^{n-1}\mathbf{r}_{(0)}\}$$

$$\langle \mathbf{r}_{(i)}, \mathbf{r}_{(j)} \rangle = 0 \text{ за } i \neq j, \quad 0 \leq i, j \leq n-1, \quad (1.2.22b)$$

$$\langle \mathbf{r}_{(i)}, \mathbf{r}_{(j)} \rangle_A = 0 \text{ за } i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (1.2.22b)$$

$$\text{span}\{\mathbf{P}_{(1)}, \mathbf{P}_{(2)}, \dots, \mathbf{P}_{(n)}\} = \text{span}\{\mathbf{r}_{(0)}, \mathbf{P}_{(1)}, \dots, \mathbf{P}_{(n-1)}\}. \quad (1.2.22\Gamma)$$

Следващата важна теорема е следствие от Лема 1.2.1, виж например [2, 6, 53].

Теорема 1.2.1. Нека N е размерността на матрицата A . Тогава съществува $n \leq N$, такава че $A\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{b}$ в Алгоритъм 1.2.1 при условие за спиране на итерационния процес $\mathbf{r}_{(n)} = \mathbf{0}$.

Теорема 1.2.1 показва, че CG методът може да се разглежда като точен в термините на точна аритметика. При компютърната реализация обаче, точното решение може да не се достигне и за $n > N$ итерации поради грешките от закръгляване. Следващата теорема дава оценка за скоростта на сходимост на метода на спрегнатия градиент.

Теорема 1.2.2. За Алгоритъм 1.2.1 е в сила неравенството

$$it(\epsilon) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\kappa(A)} \ln \left(\frac{2}{\epsilon} \right) + 1, \quad (1.2.23)$$

където с $it(\epsilon)$ е означено най-малкото цяло положително число n , за което се удовлетворява условието

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(n)}\|_A \leq \epsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(0)}\|_A. \quad (1.2.24)$$

1.2.2 Метод на спрегнатия градиент с преобуславяне

От Теорема 1.2.2 следва, че броят итерации в CG метода, които са необходими за достигането на отнапред зададена относителна точност, зависи от спектралното число на обусловеност на матрицата на системата. За двумерни елиптични задачи от втори ред това означава, че броят итерации ще расте пропорционално на $\mathcal{O}(h^{-1}) = \mathcal{O}(N^{\frac{1}{2}})$.

Подобряването на сходимостта при решаването на лошо обусловени системи налага допълнителното прилагане на така наречената техника на преобуславяне към Алгоритъм 1.2.1, което в литературата е известно като метод на спрегнатия градиент с преобуславяне (Preconditioned Conjugate Gradient или PCG). При тази процедура изходната система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ се заменя с еквивалентната преобусловена система

$$\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}, \quad (1.2.25)$$

където $\tilde{A} = B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$, $\tilde{\mathbf{x}} = B^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}$, а $\tilde{\mathbf{b}} = B^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b}$, която вече решаваме по CG метода. Матрицата $B = B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$ се нарича преобусловяща или преобусловител.

Алгоритъм 1.2.2. [PCG метод] (виж например [19, 53])

$n = 0;$ $\mathbf{x}_{(0)};$ $\mathbf{r}_{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_{(0)};$
for $n = 1$ **to** n_{max}
 if (критерий за спиране е изпълнен) **stop**
 Решаваме $B\mathbf{z}_{(n-1)} = \mathbf{r}_{(n-1)}$ относно \mathbf{z} (1.2.26)
 $\chi_{n-1} = \langle \mathbf{r}_{(n-1)}, \mathbf{z}_{(n-1)} \rangle$
 if ($n == 1$) **then**
 $\mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{z}_{(0)}$
 else
 $\tau_n = \frac{\chi_{n-1}}{\chi_{n-2}}$
 $\mathbf{p}_{(n)} = \mathbf{z}_{(n-1)} + \tau_n \mathbf{p}_{(n-1)}$
 end
 $\mathbf{q}_{(n)} = A\mathbf{p}_{(n)}$
 $\alpha_n = \frac{\chi_{n-1}}{\langle \mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{q}_{(n)} \rangle}$
 $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{(n-1)} + \alpha_n \mathbf{p}_{(n)}$
 $\mathbf{r}_{(n)} = \mathbf{r}_{(n-1)} - \alpha_n \mathbf{q}_{(n)}$
 end

Алгоритъм 1.2.2 използва псевдо-резидуалите $\mathbf{z}_{(n)} = B^{-1}\mathbf{r}_{(n)}$ вместо $\mathbf{r}_{(n)}$. Квадратичният функционал, който се минимизира в този случай, е

$$\tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{A} \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{b}}, \quad (1.2.27)$$

Забележка 1.2.1. Пространствата на Крилов, участващи в Алгоритъм 1.2.2, се генерират от преобуславящата матрица, т.е.

$$W_n^* = \text{span}\{\mathbf{r}_{(0)}, (AB^{-1})\mathbf{r}_{(0)}, \dots, (AB^{-1})^{n-1}\mathbf{r}_{(0)}\}. \quad (1.2.28)$$

Скоростта на сходимост на PCG метода към точното решение на система (1.2.16) следва от Теорема 1.2.2, като този път в оценката (1.2.23) участва спектралното число на обусловеност на преобусловената матрица, $\kappa(B^{-1}A)$.

PCG методът притежава следните важни свойства, виж [53]:

- (1) Той е оптимален в смисъл, че минимизира на n -тата стъпка A -нормата на грешката $e_{(n)} = e_{(0)} - q^*$, където q^* е произволен елемент от съответното пространство на Крилов W_n^* (виж [53] за детайли).

- (2) С подходящ преобусловител можем значително да подобрим скоростта на сходимост на PCG метода.
- (3) За една итерация броят на аритметичните операции в Алгоритъм 1.2.2 включва едно умножение на матрица по вектор, три векторни операции и две скалярни произведения, като по принцип основната тежест пада на решаването на система с преобуславителя.
- (4) Алгоритъмът не зависи от параметри, които трябва да се оценяват.
- (5) Компютърната реализация на метода не изисква много памет. Необходимо е да се съхраняват само пет вектора, разредената матрица A и факторизирано представяне на оператора B^{-1} .

Свойства (2) и (3) са определящи за общата стратегия на преобуславяне при PCG метода, като целта е да удовлетворяват условията:

- Числото на обусловеност на преобусловената матрица да бъде значително по-малко от това на оригиналната матрица, т.е., $\kappa(B^{-1}A) \ll \kappa(A)$.
- Да съществува ефективен алгоритъм за решаване на системи с преобусловителя, чиято изчислителна сложност е много по-малка от сложността на решаване на системи с изходната матрица, т.е., $\mathcal{N}(B^{-1}\mathbf{x}) \ll \mathcal{N}(A^{-1}\mathbf{x})$.

Дефиниция 1.2.1. *Преобусловителят B наричаме оптимален, ако PCG метод с преобуславяща матрица B има оптимална изчислителна сложност $\mathcal{N}^{PCG} = \mathcal{O}(N)$, т.е. когато $\kappa(B^{-1}A) = \mathcal{O}(1)$ и $\mathcal{N}(B^{-1}\mathbf{x}) = \mathcal{O}(N)$, където с N сме означили размерността на системата.*

1.2.3 Обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне

При така наречения обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне (Generalized Conjugate Gradient или GCG) различни (променящи се) преобусловители могат да се използват на различни итерации, виж например [5, 16, 17, 53, 67], като в този случай преобуславителят не се дефинира като линеен оператор, а чрез самия итеративен процес. Поради по-общия вид на преобусловителя ортогоналността на

направленията на търсене $\mathbf{p}_{(n)}$ вече не е гарантирана и трябва да се наложи експлицитно.

Нека A е SPD матрица и $B[\cdot]$ е преобуславител, който може да бъде и нелинеен. Нека запишем стъпка (1.2.26) от Алгоритъм (1.2.2) като $B^{-1}[\mathbf{r}_{(n)}]$. Тогава направлението на търсене с номер n се ортонормализира спрямо m_n предходни направления на търсене по отношение на енергетичното скалярно произведение, дефинирано от A , т.е.,

$$\mathbf{p}_{(n)} = \mathbf{z}_{(n-1)} - \sum_{j=n-m_n}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{z}_{(n-1)}, A\mathbf{p}_{(j)} \rangle}{\langle \mathbf{p}_{(j)}, A\mathbf{p}_{(j)} \rangle} \mathbf{p}_{(j)}, \quad (1.2.29)$$

където $\{m_n\}_{n=1,2,\dots}$ са параметри.

Забележка 1.2.2. *Необходимостта да се пазят повече вектори и допълнителните изчисления прави GCG метода по-скъп от стандартния PCG метод.*

Алгоритъм 1.2.3. *[GCG метод](виж например [17, 53, 67])*

$n = 0$; $\mathbf{x}_{(0)}$; $\mathbf{r}_{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_{(0)}$;

for $n = 1$ **to** n_{max}

if (критерий за спиране е изпълнен) **stop**

$\mathbf{z}_{(n-1)} = B^{-1}[\mathbf{r}_{(n-1)}]$

$\mathbf{p}_{(n)} = \mathbf{z}_{(n-1)}$

$\mathbf{q}_{(n)} = A\mathbf{p}_{(n)} \quad (1.2.30)$

for $j = n - m_n$ **to** $n - 1$ (1.2.31)

$\tau = \frac{\langle \mathbf{q}_{(j)}, \mathbf{z}_{(n-1)} \rangle}{\chi_j}$

$\mathbf{p}_{(n)} = \mathbf{p}_{(n)} - \tau \mathbf{p}_{(j)}$

$\mathbf{q}_{(n)} = \mathbf{p}_{(n)} - \tau \mathbf{q}_{(j)}$

end

$\chi_n = \langle \mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{q}_{(n)} \rangle$

$\alpha_n = \frac{\langle \mathbf{r}_{(n-1)}, \mathbf{p}_{(n)} \rangle}{\chi_n}$

$\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{(n-1)} + \alpha_n \mathbf{p}_{(n)}$

$\mathbf{r}_{(n)} = \mathbf{r}_{(n-1)} - \alpha_n \mathbf{q}_{(n)}$

end

Ще отбележим, че изпълнението на стъпка (1.2.30) преди цикъла (1.2.31) гарантира A -ортогоналността на направленията на търсене. Записан по този начин, описаният алгоритъм се свежда до стандартния PCG метод при фиксиран линеен оператор $B^{-1}[\cdot] = B^{-1}$ и $m_n = n - 1$. В [5] е представен общ резултат за сходимостта на GCG метода.

Следващата теорема, виж [67], дава оценка за сходимостта в случая на нелинеен преобусловител, близък до линеен оператор.

Теорема 1.2.3. *Нека $N \times N$ матриците A и B са SPD, като $B^{-1}[\cdot]$ е изображение от \mathbb{R}^N в \mathbb{R}^N . Нека също така $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ и $\mathbf{x}_{(0)} \in \mathbb{R}^N$, а $\mathbf{r}_{(n)}$ и $\mathbf{x}_{(n)}$ са резидуалите и приближените решения съответно, получени за последователност от итерации на Алгоритъм 1.2.3 с преобуславител $B[\cdot]$ за линейната система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ако за някое n е изпълнено, че*

$$\frac{\|B^{-1}[\mathbf{r}_{(n)}] - B^{-1}\mathbf{r}_{(n)}\|_B}{\|B^{-1}\mathbf{r}_{(n)}\|_B} \leq \epsilon_n < 1,$$

то тогава

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(n+1)}\|_A}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(n)}\|_A} \leq \sqrt{1 - \frac{4\kappa(1 - \epsilon_n)^2}{(\kappa + \epsilon_n^2(\kappa - 1) + (1 - \epsilon_n^2))^2}}$$

където $\kappa = \kappa(B^{-1}A)$.

1.3 АМЛИ методи

Така нареченият алгебричен многонивов итерационен метод (Algebraic Multilevel Iteration Method или AMLI) дефинира оптимален преобусловител. Той е предложен за първи път в [14, 15] за случая на изотропна елиптична задача, дискретизирана с конформни крайни елементи, като по-късно е обобщен и развит и за по-широк клас диференциални задачи и дискретизации.

Нека симетричната положително полуопределена (SPSD) матрица A има следното две на две блочно представяне

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (1.3.32)$$

където A_{11} е неособена матрица. Ако със S означим допълнението на Шур, т.е.

$$S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}, \quad (1.3.33)$$

за матрицата A е в сила точната блочна факторизация

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \\ A_{21} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I_2 \end{bmatrix}. \quad (1.3.34)$$

Лема 1.3.1. Нека SPD матрицата A има представянето (1.3.32). Нека също така $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T$ е вектор, чиито компоненти са съгласувани с блочното разделяне (1.3.32) на A , като \mathbf{x}_2 е фиксирано. Тогава е в сила равенството

$$\mathbf{x}_2^T S \mathbf{x}_2 = \min_{\mathbf{x}_1} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}. \quad (1.3.35)$$

От Лема 1.3.1 следва, че ако матрицата A е SPD, то и нейното допълнение на Шур S е SPD матрица. Важно е да се отбележи, че в общия случай допълнението на Шур на разрежена матрица, не е разрежена матрица.

1.3.1 Константа в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц

Нека \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 са крайномерни векторни пространства, чиито размерности са съгласувани с блочното представяне (1.3.32) на SPSD матрица A с неособен блок A_{11} . Нека също така $\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$, $\mathbf{W}_1 = \{[\mathbf{v}_1^T, \mathbf{0}^T]^T, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{V}_1\}$ и $\mathbf{W}_2 = \{[\mathbf{0}^T, \mathbf{v}_2^T]^T, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_2\}$.

Константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ) се дефинира като минималната положителна константа γ , която за всеки два ненулеви вектора $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i$, $i = 1, 2$ удовлетворява неравенството

$$|\mathbf{v}_1^T A_{12} \mathbf{v}_2| \leq \gamma \{\mathbf{v}_1^T A_{11} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2\}^{1/2} \quad (1.3.36)$$

и характеризира блочното разделяне на матрицата A . Геометрично γ се интерпретира като косинуса на абстрактния ъгъл между пространствата \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 относно скаларното произведение породено от A .

Следните три лемии са ключови за извеждането на теоретични оценки на константата в усиленото неравенство на КБШ, виж например [6, 30, 53].

Лема 1.3.2. Нека A е SPSD матрица с положително определен първи блок A_{11} , а γ е най-малката константа, удовлетворяваща (1.3.36). Тогава са в сила твърденията

(a) $\gamma \leq 1$;

(б) $\gamma = 1$, ако съществува $\mathbf{w} = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T]^T \in \ker(A)$, за което $\mathbf{v}_2 \notin \ker(A_{22})$;

(в) $\gamma < 1$, ако за всяко $\mathbf{w} = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T]^T \in \ker(A)$ е в сила, че $\mathbf{v}_2 \in \ker(A_{22})$;

(г) От условие (в) следва, че

$$\gamma = \sup_{\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i \setminus \ker(A_{ii}), i=1,2} \frac{\mathbf{v}_1^T A_{12} \mathbf{v}_2}{(\mathbf{v}_1^T A_{11} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2)^{1/2}}.$$

Лема 1.3.3. Нека за SPSD матрицата A е изпълнено условие (в) от Лема 1.3.2. Тогава за γ са в сила твърденията

(а)

$$\gamma^2 = \sup_{\mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_2 \setminus \ker(A_{22})} \frac{\mathbf{v}_2^T A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2}; \quad (1.3.37)$$

(б) за всяко $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_2 \setminus \ker(A_{22})$

$$1 - \gamma^2 \leq \frac{\mathbf{v}_2^T S \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2} \leq 1, \quad (1.3.38)$$

където лявото неравенство е точно, а дясното е точно при условие $\ker(A_{12}) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Нека \mathcal{E} е множество от индекси, A_E са локални матрици, които са SPSD, и матрицата на системата A има представянето

$$A = \sum_{E \in \mathcal{E}} R_E^T A_E R_E, \quad \mathbf{v} = \sum_{E \in \mathcal{E}} R_E^T \mathbf{v}_E, \quad (1.3.39)$$

където операторите R_E изобразяват глобален вектор върху E , $E \in \mathcal{E}$. Локалните матрици A_E и съответните вектори \mathbf{v}_E могат да се представят в две на две блочна форма в съответствие с глобалното блочно разделяне на векторното пространство, както следва

$$A_E = \begin{bmatrix} A_{E:11} & A_{E:12} \\ A_{E:21} & A_{E:22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E:1} \\ \mathbf{v}_{E:2} \end{bmatrix}. \quad (1.3.40)$$

Следващата Лема представя основен резултат за локалния анализ на константата в усиленото неравенство на КБШ, виж например [2, 14, 53].

Лема 1.3.4. Нека локалните матрици A_E , удовлетворяващи (1.3.39), имат представянето (1.3.40). Ако с γ_E означим локалните константи в усиленото неравенство на КБШ, съответстващи на A_E , $E \in \mathcal{E}$ т.е.,

$$\gamma_E^2 = \sup_{\mathbf{v}_{E:2} \in V_{E:2} \setminus \ker(A_{E:22})} \frac{\mathbf{v}_{E:2}^T A_{E:21} A_{E:11}^{-1} A_{E:12} \mathbf{v}_{E:2}}{\mathbf{v}_{E:2}^T A_{E:22} \mathbf{v}_{E:2}}, \quad (1.3.41)$$

за глобалната константа в усиленото неравенство на КБШ γ ще бъде в сила неравенството

$$\gamma \leq \max_{E \in \mathcal{E}} \gamma_E. \quad (1.3.42)$$

1.3.2 Алгебрични двунивови методи

Нека с B_F означим мултипликативния двунивов преобуславител

$$B_F = \begin{bmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} A_{12} \\ & I \end{bmatrix}, \quad (1.3.43)$$

който е получен посредством заместването на допълнението на Шур S с A_{22} в точната блочна факторизация, (1.3.34), на A .

За относителното число на обусловеност на B_F може да се докаже оценката

$$\kappa(B_F^{-1} A) \leq \frac{1}{1 - \gamma^2}, \quad (1.3.44)$$

където γ е константата в усиленото неравенство на КБШ, виж например [2].

В по-обща постановка, виж например [53], този метод може да се дефинира като

$$B_F = \begin{bmatrix} B_{11} & \\ & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B_{11}^{-1} A_{12} \\ & I \end{bmatrix}, \quad (1.3.45)$$

където B_{11} и B_{22} са апроксимации съответно на A_{11} и S . В този случай, виж [9, 53, 66]), $\kappa(B_F^{-1} A)$ зависи от екстремалните собствени стойности на $B_{11}^{-1} A_{11}$ и $B_{22}^{-1} S$, т.е., от константите $0 < \check{\alpha}, \check{\beta} \leq 1$ и $1 \leq \hat{\alpha}, \hat{\beta} < \infty$, за които

$$\check{\alpha} \mathbf{v}_1^T A_{11} \mathbf{v}_1 \leq \mathbf{v}_1^T B_{11} \mathbf{v}_1 \leq \hat{\alpha} \mathbf{v}_1^T A_{11} \mathbf{v}_1, \quad \forall \mathbf{v}_1, \quad (1.3.46)$$

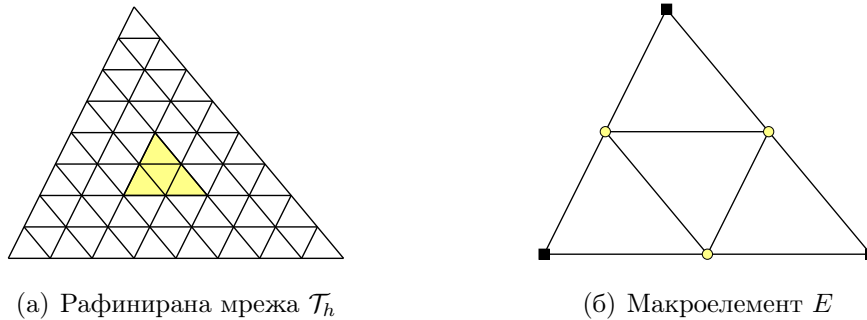
$$\check{\beta} \mathbf{v}_2^T S \mathbf{v}_2 \leq \mathbf{v}_2^T B_{22} \mathbf{v}_2 \leq \hat{\beta} \mathbf{v}_2^T S \mathbf{v}_2, \quad \forall \mathbf{v}_2. \quad (1.3.47)$$

Ако $B_{11} = A_{11}$, в сила е оценката, виж [66],

$$\kappa(B_F^{-1} A) \leq \kappa(B_{22}^{-1} S). \quad (1.3.48)$$

Двунивови преобуславители, базирани на йерархичен базис

В [11, 18] за първи път е представена теорията на оптималните двунивови методи. Основната идея при построяването на оптимални двунивови преобуславители е крайнолементното пространство да се раздели по такъв начин, че КБШ константата да бъде ограничена далеч от единица.



Фигура 1.1: Равномерно сгъстяване и двунивово разделяне на възлите на мрежа от конформни крайни елементи.

Нека разгледаме две последователни триангулации $\mathcal{T}_H \subset \mathcal{T}_h$ от конформни линейни крайни елементи, получени чрез равномерно сгъстяване на мрежата, както е показано на Фиг. 1.1. За съответните крайноелементни пространства е изпълнено, че $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}_h$, а множествата от възли N_H и N_h на двете мрежи удовлетворяват равенството $N_h = N_H \cup N_{h \setminus H}$, където $N_{h \setminus H}$ съдържа всички възли, които принадлежат само на по-фината мрежа \mathcal{T}_h . Нека $\{\phi_i^{(H)}\}_{i=1}^{N_H}$ и $\{\phi_i^{(h)}\}_{i=1}^{N_h}$ са базисните функции при стандартен възлов базис.

Дефиниция 1.3.1. Йерархичният възлов базис $\tilde{\Phi}^{(h)}$ се дефинира като

$$\tilde{\Phi}^{(h)} := \{\tilde{\Phi}_i^{(h)}\}_{i=1}^{N_h} = \{\phi_i^{(H)}, i \in N_{h \setminus H}\} \cup \{\phi_i^{(h)}, i \in N_H\}, \quad (1.3.49)$$

а матрицата \tilde{A} , съответстваща на йерархичен възлов базис, наричаме йерархична матрица на коравина.

Матриците A_h и \tilde{A}_h могат да бъдат представени в две на две блочна форма в съответствие с двунивовото разделяне (1.3.49)

$$A_h = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} N_{h \setminus H} \\ \} N_h \end{matrix}, \quad \tilde{A}_h = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} N_{h \setminus H} \\ \} N_h \end{matrix}, \quad (1.3.50)$$

където $\tilde{A}_{11} = A_{11}$ и $\tilde{A}_{22} = A_H$.

За конкретния случай на линейни конформни елементи те са свързани посредством трансформационната матрица J_h

$$\tilde{A}_h = J_h^T A_h J_h, \quad J_h = \begin{bmatrix} I & J_{12} \\ & I \end{bmatrix}, \quad (1.3.51)$$

като може да се докаже, че при такава базисна трансформация допълнението на Шур остана непроменено, т.е. $S_h = \tilde{S}_h$.

Йерархичното двунивово разделяне (1.3.49) на линейното конформно крайноеlementно пространство удовлетворява условията на Лема 1.3.4. В този случай индексите \mathcal{E} обхождат множеството от макроелементи $E \in \mathcal{T}_h$, където с A_E са означени съответните макроелементни матрици на коравина. Всеки макроелемент $E \in \mathcal{T}_h$ е получен при равномерното рафиниране на краен елемент от грубата мрежа и представлява съвкупност от триъгълни крайни елементи, виж Фиг. 1.1. Тогава от Лема 1.3.3 следва, че за локалните константи в усиленото неравенство на КБШ е изпълнено равенството

$$\gamma_E^2 = 1 - \mu_1, \quad (1.3.52)$$

където μ_1 е минималната собствена стойност на обобщената спектрална задача

$$\tilde{S}_E \mathbf{v}_{E:2} = \mu A_e \mathbf{v}_{E:2}, \quad \mathbf{v}_{E:2} \neq (c, c, \dots, c)^T. \quad (1.3.53)$$

Забележка 1.3.1. *Йерархичните разделяния на крайноеlementните пространства могат да се използват също така за получаването на апостериорни оценки на грешката, виж [53, 68].*

Двунивови преобуславители, базирани на апроксимацията на допълнението на Шур

Ще представим построяването на апроксимация Q на точното допълнение на Шур S в (1.3.45), както за първи път е предложено в [48], при което се избягва използването на йерархичен базис.

За всички макроелементи E пресмятаме точните допълнения на Шур

$$S_E = A_{E:22} - A_{E:21}(A_{E:11})^{-1}A_{E:12}, \quad (1.3.54)$$

които служат за елементни матрици на следващото по-грубо ниво, т.е.,

$$A_{e:H} := S_E, \quad \forall E. \quad (1.3.55)$$

Апроксимацията Q на точното допълнение на Шур S дефинираме като

$$Q = \sum_{E \in \mathcal{T}_H} R_E^T S_E R_E, \quad (1.3.56)$$

където сумирането е в смисъл на асемблиране. В следващата теорема ще представим основен резултат за апроксимационните свойства на Q , виж [53].

Теорема 1.3.1. *Нека матрицата Q е асемблирана от макроелементните допълнения на Шур S_E , а S е точното допълнение на Шур. Тогава е в сила*

$$(1 - \gamma^2) \mathbf{v}_2^T S \mathbf{v}_2 \leq \mathbf{v}_2^T Q \mathbf{v}_2 \leq \mathbf{v}_2^T S \mathbf{v}_2 \quad \forall \mathbf{v}_2, \quad (1.3.57)$$

където $\gamma = \max_E \gamma_E$ е глобалната константа на КБШ.

От Теорема 1.3.1 веднага следва, че за относителното число на обусловеност $\kappa(Q^{-1}S)$ е в сила оценката, виж [10],

$$\kappa(Q^{-1}S) \leq \frac{1}{1 - \gamma^2}. \quad (1.3.58)$$

Забележка 1.3.2. *Локалността на матриците S_E гарантира, че апроксимацията Q на точното допълнение на Шур S е разредена матрица.*

Обобщен двунивов мултипликативен преобуславител

Двунивовият преобусловител от мултипликативен тип може да се обобщи по описания по-долу начин, виж [73].

Алгоритъм 1.3.1. *Нека $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, където \mathbf{V} е векторно пространство. Действието $B^{-1}\mathbf{x}$ на оператора B^{-1} върху елемента \mathbf{x} се описва чрез следните три стъпки:*

- (i) $\mathbf{y} = M^{-1}\mathbf{x}$ начално изглаждане;
- (ii) $\mathbf{z} = \mathbf{y} + P\tilde{B}_H^{-1}P^T(\mathbf{x} - A\mathbf{y})$ корекция върху грубата мрежа;
- (iii) $B^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{z} + M^{-T}(\mathbf{x} - A\mathbf{z})$ последващо изглаждане.

За да приложим този алгоритъм в PCG метода, е необходимо да дефинираме подходящ оператор на изглаждане M^{-1} и подходящ преобусловител от грубата мрежа \tilde{B}_H^{-1} , който апроксимира рестрикцията на A^{-1} върху V_H (т.е. ако $A_H = P^T A P$, то $\tilde{B}_H^{-1} \approx A_H^{-1}$). Обобщеният мултипликативен двунивов преобусловител B може да се запише във вида, виж [73],

$$B^{-1} = \bar{M}^{-1} + (I - M^{-T} A) P \tilde{B}_H^{-1} P^T (I - A M^{-1}), \quad (1.3.59)$$

където с \bar{M} сме означили симетризираната форма на M , за която $(I - \bar{M}^{-1} A) = (I - M^{-T} A)(I - M^{-1} A)$, т.е.

$$\bar{M}^{-1} = M^{-1} + M^{-T} - M^{-T} A M^{-1}. \quad (1.3.60)$$

Нека действието на оператора на изглаждане M^{-1} изисква $\mathcal{O}(N)$ аритметични операции. Целта е да построим B , такава че $\kappa(B^{-1} A) = \mathcal{O}(1)$.

Съществуват два основни варианта при избора на \tilde{B}_H :

- (1) $\tilde{B}_H^{-1} = A_H^{-1}$, където $A_H = P^T A P$, *точен двунивов метод*;
- (2) $\tilde{B}_H^{-1} \neq A_H^{-1}$, *неточен двунивов метод*.

Точният двунивов метод е по-лесен за анализ от неточния и в много случаи има ограничено число на обусловеност. Той обаче води до решаването на задача върху грубата мрежа от размерност, съпоставима с тази на изходната система, и в този смисъл неговото прилагане е почти толкова трудно, колкото решаването на (1.2.16). При неточния двунивов метод \tilde{B}_H^{-1} се дефинира рекурсивно от същия алгоритъм и $B^{-1} \mathbf{v} = \mathcal{O}(N)$. Директното многонивно разширение в този случай води до многонивов AMLI V-цикъл. При директно рекурсивно прилагане на двунивовия преобусловител B^{-1} е възможно обаче в зависимост от избора на грубите пространства \mathcal{V}_H да се получи метод, за който числото на обусловеност $\kappa(B^{-1} A) = \mathcal{O}(N)$, което налага допълнителното модифициране на \tilde{B}_H^{-1} .

Нека B_H^{-1} е дефинирано. Тогава $\tilde{B}_H^{-1} = B_{H,\nu}^{-1}$, се дефинира като

$$B_{H,\nu}^{-1} := q_{\nu-1}(B_H^{-1} A_H) B_H^{-1}, \quad (1.3.61)$$

където $q_{\nu-1}$ е подходящо избран полином от степен по-малка или равна на $(\nu - 1)$ за някакво $\nu \geq 1$. Следващите примери илюстрират и мотивират тази конструкция:

- * Нека $\nu = 1$ и $q_0(x) = 1$. Тогава $\tilde{B}_H^{-1} = B_H^{-1}$.
- * Нека $\nu = N_H$ и $X_H : V_H \mapsto V_H$ е неособен оператор. Тогава, ако $q_{N_H-1}(X_H) = X_H^{-1}$, получаваме точен двунивов метод.
- * Нека отново $\nu = N_H$ и в Алгоритъм 1.3.1 положим $\mathbf{r}_H = P^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x})$. Ако за полинома $q_{N_H-1}(X_H)$ е изпълнено, че

$$q_{N_H-1}(X_H)\mathbf{r}_H = X_H^{-1}\mathbf{r}_H,$$

то $B_{H,\nu}^{-1}\mathbf{r}_H = A_H^{-1}\mathbf{r}_H$, където действието на $B_{H,\nu}^{-1}$ зависи от аргумента и следователно имаме нелинеен преобуславител. За дадено \mathbf{r}_H такъв полином $q_{\nu-1}(X_H)\mathbf{r}_H$ може да се построи чрез прилагането на $(\nu - 1)$ PCG итерации към решението на $A_H\mathbf{e}_H = \mathbf{r}_H$ с преобусловител B_H . При $\nu = N_H$ получаваме точния двунивов метод и тъй като прилагането на $(N_H - 1)$ PCG итерации може да бъде скъпо, можем да вземем само фиксиран брой PCG итерации, а именно $\nu = \mathcal{O}(1)$. Полученият в резултат метод е известен като нелинеен AMLI метод, виж [53, 73].

Двунивовият мултипликативен преобусловител B^{-1} дефинира итеративен процес, виж [73], за който

$$\mathbf{x}_{(i+1)} = \mathbf{x}_{(i)} + B^{-1}\mathbf{r}_{(i)} = \mathbf{x}_{(i)} + B^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots \quad (1.3.62)$$

Ако означим с $E = I - B^{-1}A$ оператора на разпространение на грешката, а $\mathbf{e}_{(i)} = \mathbf{x}_* - \mathbf{x}_{(i)}$, където \mathbf{x}_* е точното решение на (1.2.16), то

$$\mathbf{e}_{(i+1)} = E\mathbf{e}_{(i)}.$$

Операторът на разпространение на грешката за корекцията върху грубата мрежа $\mathbf{x}_{(i)} + PB_H^{-1}P^T\mathbf{r}_{(i)}$ се дефинира с равенството

$$E_H = I - PB_H^{-1}P^T A, \quad (1.3.63)$$

където B_H^{-1} апроксимира A_H^{-1} на грубото ниво.

Следващата Лема е важна за анализа, представен в Глава 4:

Лема 1.3.5. *Нека дефинираме B^{-1} според Алгоритъм 1.3.1. Преобусловителят от грубото ниво $\tilde{B}_H^{-1} = B_{H,\nu}^{-1}$ нека да определим от (1.3.61), а E_H от (1.3.63). Нека също така*

$$\tilde{p}_\nu(x) := p_\nu(1 - x), \quad (1.3.64)$$

където $p_\nu(x) = 1 - xq_{\nu-1}(x)$. Тогава операторът на разпространение на грешката E удовлетворява равенството

$$E = I - B^{-1}A = (I - M^{-T}A) \tilde{p}_\nu(E_H) (I - M^{-1}A). \quad (1.3.65)$$

1.3.3 Алгебрични многонивови методи

Ще представим рекурсивната дефиниция на алгебричните многонивови итерационни методи (AMLI), които се дефинират върху редица от вложени мрежи $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell$. В зависимост от техниката на построяване, AMLI алгоритмите се разделят на линейни и нелинейни.

Линейни AMLI методи

На най-грубото ниво полагаме

$$B^{(0)-1} = A^{(0)-1}. \quad (1.3.66)$$

Ако допуснем, че $B^{(k-1)-1}$ вече е дефинирано за $k-1 \geq 0$, дефинираме апроксимация $Z^{(k-1)-1}$ на $A^{(k-1)-1}$ посредством

$$Z^{(k-1)-1} := A^{(k-1)-1} \left(I - p^{(k)}(A^{(k-1)} B^{(k-1)-1}) \right), \quad (1.3.67)$$

където $p^{(k)}$ е полином от степен $\nu = \nu_k$, удовлетворяващ равенството

$$p^{(k)}(0) = 1. \quad (1.3.68)$$

Важно е да се отбележи, че вземайки предвид (1.3.68), уравнение (1.3.67) е еквивалентно на

$$B_\nu^{(k-1)-1} := Z^{(k-1)-1} = B^{(k-1)-1} q^{(k)}(A^{(k-1)} B^{(k-1)-1}) \quad (1.3.69)$$

където полиномът $q^{(k)}$ се задава чрез

$$q^{(k)}(x) = \frac{1 - p^{(k)}(x)}{x}. \quad (1.3.70)$$

Това показва, че приложението на $B_\nu^{(k-1)-1} = Z^{(k-1)-1}$ изисква само прилагането на операторите от грубата мрежа $A^{(k-1)}$ и $B^{(k-1)-1}$, но не на обратната матрица на $A^{(k-1)}$, както при точните двунивови методи, [73].

АМЛІ преобуславителят B_k на ниво k дефинираме като

$$B^{(k)-1} := \bar{M}^{(k)-1} + \left(I - M^{(k)-T} A^{(k)} \right) P^{(k)} B_\nu^{(k-1)-1} P^{(k)T} \left(I - A^{(k)} M^{(k)-1} \right), \quad (1.3.71)$$

където $B_\nu^{(k-1)-1}$ се определя от (1.3.69), а $\bar{M}^{(k)-1}$ е симетризиращият оператор на изглаждане на ниво k , т.е.,

$$\bar{M}^{(k)-1} = M^{(k)-1} + M^{(k)-T} - M^{(k)-T} A^{(k)} M^{(k)-1}. \quad (1.3.72)$$

Матрицата от грубата мрежа $A^{(k-1)}$ в класическия АМЛІ метод, виж [14, 15], се получава посредством (двунивова) йерархична трансформация на $A^{(k)}$ и тогава мултипликативният преобусловител $\tilde{B}^{(k)}$ се дефинира чрез

$$\tilde{B}^{(k)-1} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_{11}^{(k)-1} \tilde{A}_{12}^{(k)} \\ I \end{bmatrix} B_\nu^{(k-1)-1} \begin{bmatrix} -B_{11}^{(k)-1} \tilde{A}_{12}^{(k)} \\ I \end{bmatrix}^T. \quad (1.3.73)$$

Ако запишем (1.3.73) във вида (1.3.71), за оператора на изглаждане получаваме

$$M^{(k)-1} = M^{(k)-T} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.3.74)$$

където $B_{11}^{(k)}$ е подходяща апроксимация на $A_{11}^{(k)}$. С други думи в този случай $M^{(k)-1}$ действа само върху йерархичното допълнение на грубото пространство и в симетризирана форма има вида

$$\bar{M}^{(k)-1} = \begin{bmatrix} 2B_{11}^{(k)-1} - B_{11}^{(k)-1} A_{11}^{(k)} B_{11}^{(k)-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.3.75)$$

а P_k приема простата форма

$$P_k = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}^T. \quad (1.3.76)$$

Следващата теорема, виж [73], представя накратко основния резултат за сходимостта на АМЛІ преобусловителите.

Теорема 1.3.2. *Числото на обусловеност на $B^{(k)-1} A^{(k)}$ е равномерно ограничено при подходящ избор на параметрите k_0 и ν и на полинома, удовлетворяващ (1.3.68), при условие че V -цикличните преобуславители с ограничени разлика в нивата $\ell - k \leq k_0$ имат равномерно ограничени числа на обусловеност.*

Нелинейни AMLI методи

При нелинейните AMLI методи разглеждаме редицата от две на две блочни матрици

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & S^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{(k)-1} A_{12}^{(k)} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & S^{(k)} + A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)-1} A_{12}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (1.3.77)$$

асоциирани с $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell$, където $A^{(k)}$ може също да бъде в йерархичен базис. Нека $S^{(k)}$ е допълнението на Шур в точната блочна факторизация на $A^{(k)}$. Нека за $k = 1, 2, \dots, \ell$ дефинираме абстрактния линеен мултипликативен двунивов преобуславител на $A^{(k)}$

$$\bar{B}^{(k)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & Q^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B_{11}^{(k)-1} A_{12}^{(k)} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & Q^{(k)} + A_{21}^{(k)} B_{11}^{(k)-1} A_{12}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (1.3.78)$$

където $B_{11}^{(k)}$ е преобуславител на $A_{11}^{(k)}$, а $Q^{(k)}$ е разредена апроксимация на $S^{(k)}$. Полагаме

$$A^{(\ell)} := A_h = A, \quad (1.3.79)$$

където A_h е матрицата на коравина в (1.1.11) и дефинираме

$$A^{(k-1)} := Q^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \ell. \quad (1.3.80)$$

Нелинейният AMLI преобусловител $B^{(k)}[\cdot]$, $k = 1, \dots, \ell$, се дефинира рекурсивно по следния начин:

$$B^{(k)-1}[\mathbf{y}] := U^{(k)} D^{(k)} [L^{(k)} \mathbf{y}], \quad (1.3.81)$$

където

$$L^{(k)} := \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}^{(k)} B_{11}^{(k)-1} & I \end{bmatrix}, \quad D^{(k)}[\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)-1} \mathbf{z}_1 \\ Z^{(k-1)-1}[\mathbf{z}_2] \end{bmatrix} \quad (1.3.82)$$

и $U^{(k)} = L^{(k)T}$. Нелинейното изображение $Z^{(k-1)-1}[\cdot]$ се дефинира чрез

$$\begin{aligned} Z^{(0)-1}[\cdot] &= A^{(0)-1}, \\ Z^{(k)-1}[\cdot] &:= B^{(k)-1}[\cdot], \quad \text{ако } \nu = 1 \text{ и } k > 0, \\ Z^{(k)-1}[\cdot] &:= B_\nu^{(k)-1}[\cdot], \quad \text{ако } \nu > 1 \text{ и } k > 0, \end{aligned} \quad (1.3.83)$$

където

$$B_\nu^{(k)-1}[\mathbf{d}] := \mathbf{x}(\nu).$$

Тук с $\mathbf{x}^{(\nu)}$ е означена ν -тата итерация, получена при прилагането на GCG алгоритъма с преобуславител $B^{(k)}[\cdot]$ и нулево начално приближение към линейната система $A^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{d}$, виж [17, 67]. Векторът $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{\ell-1})^T$ определя броя вътрешни GCG итерации, извършени на всяко от нивата $k = 1, \dots, \ell - 1$. Алгоритъмът се рестартира обикновено след всеки m_{\max} итерации, където $\nu_{\ell} = m_{\max}$ е максималният брой ортогонални посоки на търсене на ниво ℓ . Ако е изпълнено, че $\nu_k = \nu$ за $k = 1, \dots, \ell - 1$ при $\nu = 1$ методът се нарича (нелинеен) AMLI V-цикъл, а при условие че $\nu > 1$ - AMLI W-цикъл от степен ν . Когато стойността на ν_k се определя по цикличен принцип за нивото $k = 1, \dots, \ell - 1$, съответният AMLI метод означаваме като хибриден V-цикъл, виж [74].

Нека преобуславителите (1.3.78) и матриците (1.3.77) са спектрално еквивалентни, т.е.,

$$\underline{\vartheta}_k \bar{B}^{(k)} \leq A^{(k)} \leq \bar{\vartheta}_k \bar{B}^{(k)} \quad k = 1, \dots, \ell. \quad (1.3.84)$$

и да означим с $\mathbf{x}^{(i)}$ i -тата итерация, генерирана от нелинейния AMLI метод. За сходимостта на метода тогава е в сила теоремата, виж [47].

Теорема 1.3.3. *Нека $A^{(\ell)}$ е SPD матрица и да разгледаме линейната система $A^{(\ell)}\mathbf{x} = \mathbf{d}^{(\ell)}$. Нека апроксимиращото свойство (1.3.84) е изпълнено и*

$$\vartheta := \max_{0 < k \leq \ell} \bar{\vartheta}_k / \underline{\vartheta}_k.$$

Ако броят вътрешни GCG итерации на всяко грубо ниво (освен най-грубото, където $A^{(0)} = Q^{(0)}$), ν , е избран така че

$$\delta(\nu) := \left(1 - \frac{4\vartheta(1 - \epsilon)^2}{(1 + \vartheta - 2\epsilon + \vartheta\epsilon^2)^2} \right)^{\nu/2} \leq \epsilon, \quad 0 < \epsilon < 1, \quad (1.3.85)$$

то за итерациите, генерирани от нелинейния AMLI алгоритъм, $\mathbf{x}^{(i)}$, е в сила

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i+1)}\|_{A^{(0)}}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}\|_{A^{(0)}}} \leq \sqrt{1 - \frac{4\vartheta(1 - \epsilon)^2}{(1 + \vartheta - 2\epsilon + \vartheta\epsilon^2)^2}} < 1. \quad (1.3.86)$$

1.3.4 Условия за оптималност

Нека за апроксимацията $B_{11}^{(k)}$ на водещия блок $A_{11}^{(k)}$ е изпълнено

$$A_{11}^{(k)} \leq B_{11}^{(k)} \leq \omega A_{11}^{(k)}, \quad \omega < \infty. \quad (1.3.87)$$

Тогава стабилизация на числото на обусловеност на мултипликативния многонивов преобусловител може да се постигне, виж [15], ако

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} < \nu. \quad (1.3.88)$$

Нека $\varrho = \min_k N_k/N_{k-1}$. Тогава условието за оптимална изчислителна сложност $O(N) = O(N_0)$ за една външна AMLI итерация е

$$\nu < \varrho, \quad (1.3.89)$$

което заедно с (1.3.88) води до (комбинираните) условия за оптималност

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} < \nu < \varrho. \quad (1.3.90)$$

За хибридни AMLI V-цикъл, където стойността на ν не е еднозначно определена, тези условия се предефинират по следния начин, виж [74],

$$\begin{aligned} \nu_k &= 1, & \text{ако } (k \bmod k_0) &\neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^{(k_0)^2}}} &< \nu_k < \varrho_{k_0}, & \text{ако } (k \bmod k_0) &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.91)$$

където $\gamma^{(k_0)}$ е константата на КБШ за вложените пространства $\mathcal{V}_{jk_0} \subset \mathcal{V}_{(j+1)k_0}$, а $\varrho_{k_0} = N_{(j+1)k_0}/N_{jk_0}$.

В настоящата дисертация ще разглеждаме AMLI алгоритми само от мултипликативен тип. Друг тип AMLI преобусловители са адитивните, за които може да се намери повече информация например в [7, 13, 75].

Глава 2

Йерархични базисни разделяния за квадратични елементи

Тази глава е посветена на изучаването и конструирането на робастни (по отношение на мрежова и коефициентна анизотропия) йерархични разделяния на пространството от конформни квадратични крайноелементни функции за елиптични гранични задачи. Представено е изследване на константата в неравенството на КБШ при използването на стандартните подходи, базирани на йерархичен базис, а именно „Differences and Aggregates” - DA („разлики и агрегати”), „First Reduce” - FR (първоначално изключване) и йерархичната P-декомпозиция. То показва, че за произволен елиптичен оператор тези техники не водят до разделяния, при които ъгълът между грубото пространство и неговото (йерархично) допълнение е равномерно ограничен по отношение на коефициента на анизотропия.

Робастно разделяне на крайноелементното пространство от непрекъснати на части квадратични функции е построено за частния случай на ортотропна елиптична гранична задача и е предложен равномерно преобусловител за главния блок с изчислителна сложност от оптимален ред.

Числените резултати в тази глава представят достатъчни условия за съществуването на AMLI преобусловители от оптимален ред.

Основните резултати, включени в тази глава, са публикувани в:

- I. Georgiev, M. Lyubery, S. Margenov: Analysis of the CBS Constant for Quadratic Finite Elements, LNCS, 6046, 2011, 412-419.

- I. Georgiev, J. Kraus, M. Lymbery, J. Kraus: On Two-level Splittings for Quadratic FEM Anisotropic Elliptic Problems, Annual Meeting of BGSIAM'10, 35-40.
- J. Kraus, M. Lymbery, S. Margenov: On the Robustness of Two-Level Preconditioners for Quadratic FE Orthotropic Elliptic Problems, LNCS, 7116, 2012, 582-589.

2.1 Мотивация

Докато много голям брой научни изследвания са посветени на разработването на робастни многонивови методи и алгоритми за случая на линейни крайни елементи, методите за решаване на съответните системи, базирани на дискретизации с крайни елементи от по-висок ред, са много по-малко изучавани.

Предишни резултати, виж например [14, 15, 21], демонстрират изключително успешното прилагане на йерархичния базис за получаването на робастни многонивови разделяния за конформни и неконформни линейни крайни елементи.

Важна характеристика на йерархичните базисни разделяния е, че анализът на сходимостта на получените в резултат многонивови алгоритми може да се извърши на локално ниво посредством изследването на макроелементните константи на КБШ, което ги прави удобни за прилагане.

В заключение ще отбележим, че многонивовите методи, използващи йерархичен базис, имат добра приложимост и при решаването на тримерни задачи.

2.2 Крайноелементна матрица на коравина

Анализът на задачата върху произволен триъгълник $e \in \mathcal{T}_h$, който има координати (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ може да си извърши върху триъгълника \tilde{e} с координати $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Преобразувайки крайноелементните функции между тези триъ-

гълници, билинейната форма $\mathcal{A}_e(\cdot, \cdot)$ приема вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\tilde{e}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \mathcal{A}_e(u(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), v(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)) = \int_{\tilde{e}} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_2} \right] \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{bmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) \\ (y_2 - y_1) & (y_3 - y_1) \end{bmatrix}^{-1} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_1}, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_2} \right]^T \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)} \right| d\tilde{e} = \\ &= \int_{\tilde{e}} \sum_{i,j} \tilde{\mathbf{a}}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_j} d\tilde{e}, \end{aligned}$$

където $\tilde{x}_1 \geq 0$, $\tilde{x}_2 \geq 0$, $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \leq 1$, а коефициентите $\tilde{\mathbf{a}}_{ij}$ зависят както от ъглите на e , така и от коефициентите \mathbf{a}_{ij} на матрицата на дифузия. Следователно за локалния анализ е достатъчно да се разгледа триъгълника \tilde{e} и произволна анизотропна коефициентна матрица $\mathbf{a}(e)$, или еквивалентно, оператора на Лаплас и произволен триъгълник e .

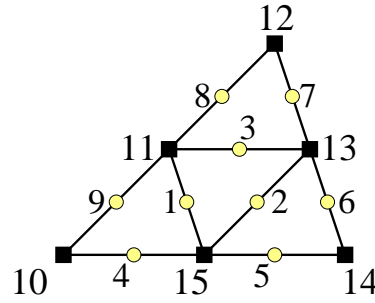
Елементната матрица на коравина A_e може да се представи във вида

$$A_e = \begin{bmatrix} \frac{b+c}{2} & -\frac{2c}{3} & \frac{c}{6} & 0 & \frac{b}{6} & -\frac{2b}{3} \\ -\frac{2c}{3} & \frac{4(a+b+c)}{3} & -\frac{2c}{3} & -\frac{4b}{3} & 0 & -\frac{4a}{3} \\ \frac{c}{6} & -\frac{2c}{3} & \frac{a+c}{2} & -\frac{2a}{3} & \frac{a}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{4b}{3} & -\frac{2a}{3} & \frac{4(a+b+c)}{3} & -\frac{2a}{3} & -\frac{4c}{3} \\ \frac{b}{6} & 0 & \frac{a}{6} & -\frac{2a}{3} & \frac{a+b}{2} & -\frac{2b}{3} \\ -\frac{2b}{3} & -\frac{4a}{3} & 0 & -\frac{4c}{3} & -\frac{2b}{3} & \frac{4(a+b+c)}{3} \end{bmatrix},$$

където в първия случай $a = -\mathbf{a}_{12}(e)$, $b = \mathbf{a}_{12}(e) + \mathbf{a}_{22}(e)$, $c = \mathbf{a}_{12}(e) + \mathbf{a}_{11}(e)$, а във втория a , b , c са котангенсите на ъглите в $e \in \mathcal{T}_h$.

2.3 Йерархични двунивови разделяния

Нека разгледаме редицата от вложени мрежи $\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell = \mathcal{T}_h$, където е приложено равномерно сгъстяване на мрежата, т.е., всеки триъгълник от грубата мрежа $e \in \mathcal{T}_k$ е разделен на четири еднакви триъгълника посредством съединяване



Фигура 2.1: Равномерно разделяне на квадратичен триъгълен елемент

на средите на страните, виж Фиг. 2.1. С $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(\ell)}$ и с $\tilde{A}^{(0)}, \tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(\ell)}$ са означени съответните матрици на коравина за стандартния и йерархичния базис.

В следващите подсекции ще представим три йерархични разделяния за квадратични крайни елементи. Следвайки (1.3.90), робастността по отношение на анизотропията се изследва посредством локално пресметнатите оценки за константата на КБШ γ .

2.3.1 DA разделяне

Нека разгледаме две вложените мрежи $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}_{k+1}$. Нека $\Phi_e^{(k)} = \{\phi_{e:i}^{(k)}\}_{i=1}^6$ и $\Phi_E^{(k+1)} = \{\phi_{E:i}^{(k+1)}\}_{i=1}^{15}$ са стандартните базисни функции за елемента $e \in \mathcal{T}_k$ и макроелемента $E \in \mathcal{T}_{k+1}$ съответно, виж Фиг. 2.1. Разделяме точките от мрежата \mathcal{N}_E от E на две групи $\mathcal{N}_E = \mathcal{N}_e \cup \mathcal{N}_{E \setminus e}$, където \mathcal{N}_e се състои от общите възли за e и E . DA йерархичният базис се дефинира както следва, виж [21, 53],

$$\tilde{\Phi}_E^{(k+1)} = \{\phi_j^{(k+1)} \cup \{\phi_i^{(k)}\}_{i=1}^6, j \in \mathcal{N}_{E \setminus e}\}.$$

Локалната трансформационна матрица J_E , за която $\tilde{\Phi}_E^{(k+1)} = J_E^T \Phi_E^{(k+1)}$, има вида

$$J_E = \begin{bmatrix} I_9 & J_{E:12} \\ & I_6 \end{bmatrix}, \quad J_{E:12} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

където I_9 и I_6 означават съответните единични матрици. Макроелементната матрица на коравина A_E и съответната йерархична матрица \tilde{A}_E са свързани посредством

$\tilde{A}_E = J_E^T A_E J_E$. Тогава глобалната йерархична матрица на коравина $\tilde{A}^{(k+1)}$ може да се асемблира от макроелементните матрици $\tilde{A}_E^{(k+1)}$. Йерархичните макроелементна и глобална матрици могат да се запишат в следната 2×2 блочна форма

$$\tilde{A}_E^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{E:11}^{(k+1)} & \tilde{A}_{E:12}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{E:21}^{(k+1)} & \tilde{A}_{E:22}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k+1)} & \tilde{A}_{12}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+1)} & \tilde{A}_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \quad (2.3.1)$$

където вторите диагонални блокове се асоциират с възловите неизвестни от по-грубата мрежа \mathcal{T}_k . DA разделянето се дефинира чрез (2.3.1) и се характеризира със съответната константа на КБШ γ_{DA} . От общата теория (виж (1.3.42), (1.3.52) и (1.3.53)) следва, че

$$\gamma_{DA} \leq \max_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \gamma_{DA,E}, \quad \gamma_{DA,E}^2 = 1 - \mu_1, \quad (2.3.2)$$

където μ_1 е минималната собствена стойност на обобщената спектрална задача

$$\tilde{S}_E^{(k+1)} \mathbf{v}_{E:2} = \mu A_e^{(k)} \mathbf{v}_{E:2}, \quad \mathbf{v}_{E:2} \neq (c, c, c, c, c, c)^T \quad (2.3.3)$$

2.3.2 FR разделяне

При FR разделянето се използва същата макроелементна трансформационна матрица J_E като при DA разделянето, но този път йерархичната матрица на коравина $\tilde{A}^{(k+1)}$ се записва в (3×3) блочна форма

$$\tilde{A}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k+1)} & \tilde{A}_{12}^{(k+1)} & \tilde{A}_{13}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+1)} & \tilde{A}_{22}^{(k+1)} & \tilde{A}_{23}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{31}^{(k+1)} & \tilde{A}_{32}^{(k+1)} & \tilde{A}_{33}^{(k+1)} \end{bmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Тук главният блок $\tilde{A}_{11}^{(k+1)}$ отговаря на вътрешните възли на макроелемента $E \in \mathcal{T}_{k+1}$ (с номера 1, 2 и 3 на Фиг. 2.1), вторият диагонален блок $\tilde{A}_{22}^{(k+1)}$ отговаря на възлите от $\mathcal{N}_{E \setminus e}$ които са на страните на макроелементите, а последният диагонален блок съвпада с последния диагонален блок от DA разделянето и следователно се асоциира с по-грубата мрежа \mathcal{T}_k . Неизвестните, свързани с $\tilde{A}_{11}^{(k+1)}$, се елиминират и системата

с $\tilde{A}^{(k+1)}$ се свежда до система с нейното допълнение на Шур

$$\begin{aligned} B^{(k+1)} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{22}^{(k+1)} & \tilde{A}_{23}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{32}^{(k+1)} & \tilde{A}_{33}^{(k+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{21}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{31}^{(k+1)} \end{bmatrix} [\tilde{A}_{11}^{(k+1)}]^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{12}^{(k+1)} & \tilde{A}_{13}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} B_{11}^{(k+1)} & B_{12}^{(k+1)} \\ B_{21}^{(k+1)} & B_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

FR разделянето се дефинира от 2×2 блочното представяне на $B^{(k+1)}$, където $B_{22}^{(k+1)}$ се асоциира с неизвестните от грубата мрежа.

Трябва да се отбележи, че $\tilde{A}_{11}^{(k+1)}$ е блочно диагонална матрица, което позволява локалното елиминирание на неизвестните. Следователно допълнението на Шур $B^{(k+1)}$ може да се асемблира от локалните $B_E^{(k+1)}$, където

$$B_E^{(k+1)} = \begin{bmatrix} B_{E:11}^{(k+1)} & B_{E:12}^{(k+1)} \\ B_{E:21}^{(k+1)} & B_{E:22}^{(k+1)} \end{bmatrix}. \quad (2.3.6)$$

Може да се докаже, че $\ker(B_{E:22}^{(k+1)}) = \ker(A_e) = \text{span}\{(c, c, c, c, c)^T\}$. Подобно на (2.3.2) и (2.3.3) константата на КБШ γ_{FR} може да се оцени, използвайки локално пресметнатите $\gamma_{FR,E}$, съответстващи на разделянето (2.3.6).

2.3.3 P разделяне

Йерархичното двунивово P разделяне използва, както на части линейни, така и на части квадратични базисни функции, виж [60]. Нека задачата е дискретизирана с линейни крайни елементи отговарящи на триангулацията \mathcal{T}_k . Тогава на стъпката на съгъстяване на части линейните базисни функции се запазват във върховете на елементите и на части квадратични функции се добавят в средите на страните.

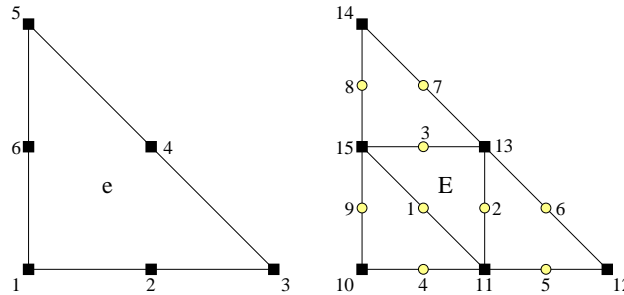
Според това P йерархично разделяне на неизвестните макроелементната матрица на коравина $\bar{A}_E^{(k+1)}$ и асемблираната глобална матрица на коравина $\bar{A}^{(k+1)}$ се представят в блочната форма

$$\bar{A}_E^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{E:11}^{(k+1)} & \bar{A}_{E:12}^{(k+1)} \\ \bar{A}_{E:21}^{(k+1)} & \bar{A}_{E:22}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^{(k+1)} & \bar{A}_{12}^{(k+1)} \\ \bar{A}_{21}^{(k+1)} & \bar{A}_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}. \quad (2.3.7)$$

Вторите диагонални блокове на $\bar{A}_E^{(k+1)}$ и $\bar{A}^{(k+1)}$, съответстват на линейните крайни елементи от по-грубата мрежа \mathcal{T}_k . Отново можем да приложим локален анализ и да пресметнем макроелементните константи на КБШ $\gamma_{E,P}$, с помощта на които можем да оценим глобалната константа γ_P .

2.4 Ортотропна елиптична задача

Нека разгледаме ортотропната елиптична задача, където без загуба на общността в коефициентната матрица $\mathbf{a}(e)$ от (1.1.13) можем да положим $\mathbf{a}_{11} = 1$ и $\mathbf{a}_{22} = \zeta$. Тогава елементната матрица на коравина за номериране на възлите, както на



Фигура 2.2: Локално номериране на възлите на елемент и макроелемент

Фиг. 2.2, може да се запише във вида

$$A_e = \begin{bmatrix} \frac{1+\zeta}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{\zeta}{6} & -\frac{2\zeta}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4(1+\zeta)}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4\zeta}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4\zeta}{3} & 0 & \frac{4(1+\zeta)}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ \frac{\zeta}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta}{2} & -\frac{2\zeta}{3} \\ -\frac{2\zeta}{3} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2\zeta}{3} & \frac{4(1+\zeta)}{3} \end{bmatrix}. \quad (2.4.8)$$

Макроелементната матрица на коравина, асемблирана от четири елементни матрици на коравина, може да се представи в две на две блочна форма

$$A_E = \begin{bmatrix} A_{E:11} & A_{E:21}^T \\ A_{E:21} & A_{E:22} \end{bmatrix}, \quad (2.4.9)$$

където всички нейни блокове зависят само от параметъра ζ .

2.4.1 Равномерни оценки на константата на КБШ

От (1.3.42), (1.3.52) и (1.3.53) следва, че можем да оценим глобалната константа на КБШ γ , използвайки макроелементните константи на КБШ γ_E , т.е.

$$\gamma \leq \max_{E \in \mathcal{T}_h} \gamma_E, \quad \gamma_E^2 = 1 - \mu_1, \quad (2.4.10)$$

където μ_1 е минималната собствена стойност на обобщената спектрална задача

$$S_E \mathbf{v}_{E:2} = \mu A_H \mathbf{v}_{E:2}, \quad \mathbf{v}_{E:2} \neq (c, c, \dots, c)^T. \quad (2.4.11)$$

Ако означим

$$B := \begin{bmatrix} A_{E:11}^{(k+1)} & A_{E:12}^{(k+1)} \\ A_{E:21}^{(k+1)} & A_{E:22}^{(k+1)} - \underline{\mu} A_e^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2.4.12)$$

може да се докаже, виж [53], че е достатъчно да се намери константа $\underline{\mu} > 0$, за която B е SPSD матрица, за да се осигури долна граница за μ в (2.4.11) и следователно оценка за γ^2 .

Сега можем да формулираме следната лема:

Лема 2.4.1. *Константата γ в усиленото неравенство на КБШ, съответстваща на йерархично двунивово разделяне на конформното квадратично крайноелементно пространство, е равномерно ограничена по отношение на коефициента на анизотропия на ортотропния оператор и удовлетворява оценката*

$$\gamma^2 \leq \frac{3}{4}. \quad (2.4.13)$$

Доказателство: От (2.4.8), (2.4.9) се вижда, че матрицата B в (2.4.12) приема вида

$$B = (B_0 - \underline{\mu} B_\mu) + \zeta (B_\zeta - \underline{\mu} B_{\zeta\mu}), \quad (2.4.14)$$

където матриците B_0 , B_ζ , B_μ и $B_{\zeta\mu}$ са SPD и не зависят от никакви параметри. Тъй като се иска B да остане SPSD за всяко $\zeta > 0$, трябва да се намерят стойностите на $\underline{\mu}$, за които $(B_0 - \underline{\mu} B_\mu)$ и $(B_\zeta - \underline{\mu} B_{\zeta\mu})$ остават SPSD.

Първо намираме, че $1/4$ е минималната собствена стойност на обобщената спектрална задача ¹

$$B_0 \mathbf{v} = \lambda B_\mu \mathbf{v}.$$

¹Mathematica software tool е използван в представените пресмятания.

Това означава, че $(B_0 - \underline{\mu}B_\mu)$ е SPSD за всяко $\underline{\mu} \leq 1/4$.

По същия начин установяваме, че необходимото условие $(B_\zeta - \underline{\mu}B_{\zeta\underline{\mu}})$ да бъде симетрична положително полуопределена матрица е $\underline{\mu} \leq 1/4$, откъдето се заключава, че $1/4$ е точната долна граница на минималната собствена стойност μ_1 в (2.4.11). Сумирайки (2.4.10) с последния резултат, накрая получаваме

$$\gamma^2 \leq \max_{E \in \mathcal{T}_h} \gamma_E \leq 1 - \mu_1 \leq 1 - 1/4 = 3/4. \quad \blacksquare$$

Следствие 2.4.1. *Спектралното число на обусловеност на двунивовия преобусловител, асемблиран от макроелементните допълнения на Шур, е равномерно ограничено по отношение на размерността на задачата и коефициента на анизотропия на ортотропния елиптичен оператор, т.е.*

$$\kappa(Q^{-1}S) \leq 4. \quad (2.4.15)$$

Доказателство: Следва директно от (1.3.58) и (2.4.13). \blacksquare

2.4.2 Решаване на системи с главния блок

Ще представим построяването на спектрално еквивалентен преобусловител на главния блок A_{11} за ортотропен елиптичен оператор, базиран на асемблирането на локални преобусловители на макроелементните водещи блокове.

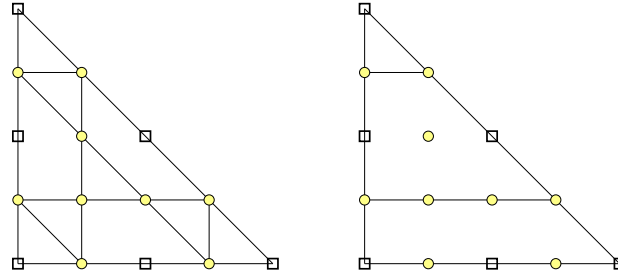
Ако

$$B_{11} = \sum_E B_{E:11}, \quad (2.4.16)$$

за съответното спектрално число на обусловеност ще е в сила оценката

$$\kappa(B_{11}^{-1}A_{11}) \leq \kappa(B_{E:11}^{-1}A_{E:11}). \quad (2.4.17)$$

Преобуславящата матрица $B_{E:11}$ се получава от $A_{E:11}$ посредством анулирането на всички извъндиагонални елементи, които отговарят на вертикални или диагонални ребра в графа, съответстващ на макроелементния главен блок, виж Фиг. 2.3, и добавянето на техните стойности към диагоналните елементи в съответните редове. С подходяща номерация на неизвестните, полученият в резултат глобален преобусловител B_{11} става тридиагонална матрица. Следователно броят аритметични операции



Фигура 2.3: Свързаност на $A_{E:11}$ (ляво) и $B_{E:11}$ (дясно)

за решаването на линейна система с B_{11} е пропорционален на броя на неизвестните в тази система.

Сега можем да формулираме следната лема:

Лема 2.4.2. *Спектралното число на обусловеност на дефинирания по-горе преобусловител (2.4.16) е равномерно ограничен по отношение на размерността на задачата и коефициента на анизотропия на ортотропния елиптичен оператор, т.е.*

$$\kappa(B_{11}^{-1}A_{11}) \leq 4. \quad (2.4.18)$$

Доказателство: За да се оцени $\kappa(B_{E:11}^{-1}A_{E:11})$, разглеждаме неравенствата

$$\lambda_{min} \mathbf{v}^T \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^T B_{E:11}^{-1} A_{E:11} \mathbf{v} \leq \lambda_{max} \mathbf{v}^T \mathbf{v}. \quad (2.4.19)$$

Целта е да се намери долна граница $\underline{\lambda}$ за λ_{min} и горна граница $\bar{\lambda}$ за λ_{max} . Поради тази причина лявото неравенство в (2.4.19) се записва във вида

$$\mathbf{v}^T (A_{E:11} - \lambda B_{E:11}) \mathbf{v} \geq 0. \quad (2.4.20)$$

Ако означим

$$D := A_{E:11} - \lambda B_{E:11},$$

всяка стойност на λ , за която D е SPSD матрица, ще осигури долна граница за λ_{min} . Матрицата D може да се представи във вида

$$D = D_0 + \zeta D_\zeta - \lambda D_\lambda - \zeta \lambda D_{\zeta\lambda},$$

където матриците D_0 , D_ζ , D_λ не зависят от параметри и $D_{\zeta\lambda}$ са SPSD.

Тъй като $0 < \zeta \leq 1$ и $\mathbf{v}^T D \mathbf{v}$ зависи линейно от ζ , достатъчно е да се разгледат само два случая $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$, за да се намери най-голямата възможна долна граница $\underline{\lambda} = 1$ за λ_{min} .

По същия начин се определя най-малката възможна горна граница $\bar{\lambda} = 4$ за λ_{max} , откъдето накрая получаваме

$$\kappa(B_{11}^{-1}A_{11}) \leq \kappa(B_{E:11}^{-1}A_{E:11}) \leq \frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}} \leq 4.$$

■

2.4.3 Основен резултат

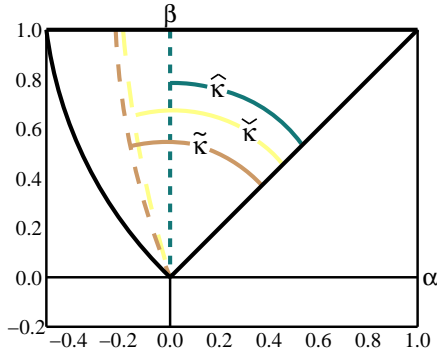
Ако комбинираме резултатите от Лема 2.4.1 с резултатите от Лема 2.4.2 и теорията на AMLI методите, виж (1.3.90), получаваме следната теорема:

Теорема 2.4.2. *AMLI преобусловителят за ортотропната елиптична задача, дискретизирана с конформни квадратични крайни елементи, и параметри $\rho = 4$ и $\nu = 3$ има оптимална изчислителна сложност, която е равномерна по отношение на мрежова и коефициентна анизотропия.*

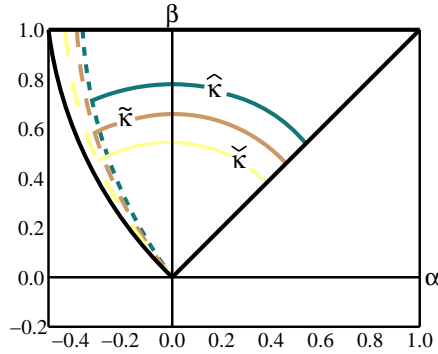
Забележка 2.4.1. *Оптималността, спомената в теоремата, означава, че броят на итерациите на съответния PCG метод, необходими за достигането на отнапред зададена точност, не зависи от размерността на дискретната задача и общият брой аритметични операции в алгоритъма е пропорционален на броя на неизвестните с константа на пропорционалност, независеща от потенциални скокове на коефициенти между интерфейси на елементи от най-грубата мрежа и коефициента на анизотропия.*

2.5 Числени експерименти

Първо ще представим сравнителен числен анализ на DA, FR, и P йерархичните разделяния. При локалното изследване без загуба на общността можем да считаме, че за ъглите θ_1 , θ_2 и θ_3 на произволния елемент e е изпълнено $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3$. Тогава ако a , b и c са котангенсите на ъглите, то $|a| \leq b \leq c$, $a = (1 - bc)/(b + c)$, виж [53].



Фигура 2.4: $\{\alpha, \beta\} : \gamma_E^2 \leq \frac{3}{4}$.



Фигура 2.5: $\{\alpha, \beta\} : \gamma_E^2 \leq \frac{8}{9}$.

Полагайки $\alpha = a/c$ и $\beta = b/c$, можем да оценим локалните константи на КБШ в термините на (α, β) с допустима област D :

$$D = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \max\left\{-\frac{\alpha}{\alpha+1}, |\alpha|\right\} \leq \beta \leq 1 \right\}. \quad (2.5.21)$$

Множествата $\{\alpha, \beta\}$, за които локалните константи на КБШ удовлетворяват неравенството $\gamma_E^2 < 3/4$, са показани на Фиг. 2.4. Според АМЛІ условието за оптималност (1.3.90), този случай отговаря на стабилизиращ полином от степен $\nu = 2$. Аналогично, Фиг. 2.5 показва областта на същите параметри, за които $\gamma_E^2 < 8/9$, т.е. $\nu = 3$.

На базата на получените числени резултати чрез софтуерния продукт Mathematica, се заключава, че за фиксиран минимален ъгъл θ_3 , най-голямата стойност за константата на КБШ отговаря на равнобедрени триъгълници с $\theta_2 = \theta_3$. Това е мотивацията за избора на представени данни в таблица 2.1.

Таблица 2.1: γ_E^2 за равнобедрени триъгълници

θ_1	θ_2	θ_3	$\gamma_{DA,E}^2$	$\gamma_{FR,E}^2$	$\gamma_{P,E}^2$
100°	40°	40°	0.7913	0.7265	0.7245
120°	30°	30°	0.8598	0.8024	0.8333
140°	20°	20°	0.9086	0.8836	0.9220
160°	10°	10°	0.9490	0.9490	0.9798

Таблица 2.2 е свързана с ортотропната елиптична задача. Там са показани някои стойности на числото на обусловеност на $Q^{-1}S$ за различна размерност на задачата и коефициент на анизотропия.

Таблица 2.2: Относително число на обусловеност за разредена апроксимация на допълнението на Шур

$\kappa(Q^{-1}S)$	$\zeta = 10^0$	$\zeta = 10^{-1}$	$\zeta = 10^{-2}$	$\zeta = 10^{-3}$
$1/h = 8$	1.8755	2.2326	1.6447	1.1362
$1/h = 16$	1.8864	2.4259	2.2913	1.3415
$1/h = 32$	1.8911	2.4872	2.7174	1.9022
$1/h = 64$	1.8931	2.5061	2.8713	2.5305

2.6 Заключение

Получените числени резултати показват, че подходите, базирани на йерархичен базис, не са робастни в случая на произволен елиптичен оператор и елементи от по-висок ред.

От Фиг. 2.4, 2.5 все пак може да се забележи, че областта, съответстваща на FR разделянето е винаги по-голяма от областта, съответстваща на DA разделянето, т.е. $\gamma_{FR} \leq \gamma_{DA}$, което е в пълно съответствие с теорията на обобщените FR разделяния, виж [53]). Също така, наблюдава се предимството на FR разделянето за задачи с по-силна анизотропия (виж също Таблица 2.1), като за някои случаи с по-умерена анизотропия имаме, че $\gamma_P \leq \gamma_{FR}$.

В частност, вижда се, че за FR разделянето AMLI методът със стабилизиращ полином от трета степен удовлетворява условието за оптималност (1.3.90), ако минималният ъгъл $\theta_3 \geq 20^\circ$. Важно е да се отбележи, че такива условия могат да се контролират от много от наличните съвременни мрежови генератори, например мрежовия генератор TRIANGLE, чиито качества са изследвани по-подробно например в [46].

Глава 3

Йерархични базисни разделяния за биквадратични и бикубични елементи

Построяването на първи робастни многонивови преобусловители за йерархични базисни разделяния на пространствата на конформните биквадратични и бикубични функции е представено в тази глава. Те са получени за крайноелементни дискретизации на ортотропната елиптична гранична задача от втори ред, където областта е правоъгълен полигон и сгъстяването на мрежата на всяка стъпка се извършва по едно от координатните направления. В литературата тези процедури се означават съкратено със SC (semi-coarsening).

По-конкретно, изследвано е поведението на свързаната със съответните йерархични разделяния константа в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц. Представените нови теоретични оценки са потвърдени от числено пресметнати константи на Коши-Буняковски-Шварц за голям набор от параметри (коэффициент на сгъстяване и коэффициент на анизотропия). Разгледана е задачата за ефективно решаване на системи с водещите диагонални блокове на матриците при така построените йерархични двунивови разделяния, което е една от предпоставките за робастност на многонивовите методи. Комбинирайки доказаните равномерни оценки с теорията на AMI методите, многонивови алгоритми от оптимален ред са получени за разглежданите биквадратични и бикубични крайноелементни дискретизации.

Основните резултати, включени в тази глава, са публикувани в:

- M. Lybery, S. Margenov: Robust Semi-Coarsening Multilevel Preconditioning of Biquadratic FEM Systems, *Cent. Eur. J. Math.*, 10(1), 2012, 357-369.

- M. Lyubery, S. Margenov: Robust Balanced Semi-Coarsening AMLI Preconditioning of Biquadratic FEM Systems, AIP Conf. Proc., 1404, 2011, 438-447.
- J. Kraus, M. Lyubery, S. Margenov: Semi-Coarsening AMLI Preconditioning of Higher Order Elliptic Problems, AIP Conf. Proc., 1487, 2012, 30-41.

3.1 Мотивация

Предишни резултати, свързани със SC процедурата на съгъстяване, виж [62, 63], демонстрират успешното ѝ прилагане за получаването на робастни йерархични базисни разделяния за конформни билинейни крайни елементи.

Важно предимство при нейното използването е, че независимо от конкретния случай, след подходящо номериране на неизвестните, блоковете $A_{11}^{(k+1)}$ добиват лентова структура с фиксирана ширина на полулентата и съответните системи могат да се решат с пряк метод (използващ например LDL^T факторизация), чиято изчислителна сложност ще бъде от оптимален ред. Трябва да се отбележи, че такова пренареждане на неизвестните в общия случай на произволна процедура на съгъстяване на мрежата не може да се осъществи.

Трябва да споменем също, че прилагането на SC процедурата при численото решаване на елиптическата гранична задача от втори ред води до алгоритми, които са удобни за разпаралеляване.

В заключение ще отбележим, че SC подходът има голям потенциал и при решаването на 3D задачи.

3.2 Биквадратични (Q_2) елементи

3.2.1 Равномерно SC съгъстяване на мрежата

Крайноелементни матрици на коравина

На всяка стъпка от равномерната SC процедура на съгъстяване на мрежата всички елементи от триангулацията \mathcal{T}_k се разделят на ρ еднакви поделемента посредством добавянето на линии, успоредни на вертикалните страни, както е показано на Фиг.3.1. Нека e е произволен биквадратичен елемент от \mathcal{T}_k , чиято дължина и височина са

съответно $h_x^{(k)}$ и h_y . Тогава полагайки

$$\delta_e^{(k)} := \frac{\mathbf{a}_{11}}{45} \frac{h_y}{h_x^{(k)}} \quad \text{и} \quad \varepsilon := \frac{\mathbf{a}_{22}}{\mathbf{a}_{11}} \left(\frac{h_x^{(k)}}{h_y} \right)^2, \quad (3.2.1)$$

където \mathbf{a}_{ii} , $i = 1, 2$ са коефициентите на ортотропната елиптическа задача (1.1.13), елементната матрица на коравина може да се представи във вида

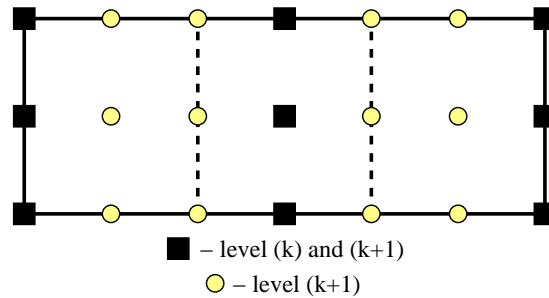
$$A_e^{(k)} = \delta_e^{(k)} \begin{bmatrix} A_{e:11}^{(k)} & A_{e:12}^{(k)} & A_{e:13}^{(k)} \\ A_{e:21}^{(k)} & A_{e:22}^{(k)} & A_{e:23}^{(k)} \\ A_{e:31}^{(k)} & A_{e:32}^{(k)} & A_{e:33}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.2.2)$$

където

$$A_{e:11}^{(k)} = \begin{bmatrix} 14 + 14\varepsilon & 7 - 16\varepsilon & -\frac{7}{2} + 2\varepsilon \\ 7 - 16\varepsilon & 56 + 32\varepsilon & 7 - 16\varepsilon \\ -\frac{7}{2} + 2\varepsilon & 7 - 16\varepsilon & 14 + 14\varepsilon \end{bmatrix},$$

$$A_{e:12}^{(k)} = \begin{bmatrix} -16 + 7\varepsilon & -8 - 8\varepsilon & 4 + \varepsilon \\ -8 - 8\varepsilon & -64 + 16\varepsilon & -8 - 8\varepsilon \\ 4 + \varepsilon & -8 - 8\varepsilon & -16 + 7\varepsilon \end{bmatrix}, \quad (3.2.3)$$

$$A_{e:13}^{(k)} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{7}{2}\varepsilon & 1 + 4\varepsilon & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon \\ 1 + 4\varepsilon & 8 - 8\varepsilon & 1 + 4\varepsilon \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon & 1 + 4\varepsilon & 2 - \frac{7}{2}\varepsilon \end{bmatrix},$$



Фигура 3.1: SC равномерно сгъстяване на мрежата за $\varrho = 3$

$$A_{e:22}^{(k)} = \begin{bmatrix} 32 + 56\varepsilon & 16 - 64\varepsilon & -8 + 8\varepsilon \\ 16 - 64\varepsilon & 128 + 128\varepsilon & 16 - 64\varepsilon \\ -8 + 8\varepsilon & 16 - 64\varepsilon & 32 + 56\varepsilon \end{bmatrix}, \quad (3.2.4)$$

и

$$A_{e:11}^{(k)} = A_{e:33}^{(k)}, \quad A_{e:12}^{(k)} = A_{e:23}^{(k)}.$$

Нека да отбележим, че коефициентите \mathbf{a}_{ii} , $i = 1, 2$ са начастии константи върху $e_0 \in \mathcal{T}_0$, и следователно елементните матрици на коравина $A_e^{(k)}$ зависят само от нивото на съгъстяване (k) и от съответния елемент e_0 , $e \subset e_0$.

При SC процедурата на съгъстяване правоъгълните поделемени, получени след ℓ стъпки на съгъстяване на елемента e , имат равни височини $h_y = h_y^{(0)}$ и равни дължини $h_x^{(\ell)} = \varrho^{-\ell} h_x^{(0)}$. Тук $h_y^{(0)}$ е размерът на най-грубата мрежа по y -оста, който остава непроменен по време на съгъстяването, а $h_x^{(0)}$ е размерът на най-грубата мрежа по x -оста.

Макроелементната матрица на коравина за $E \in \mathcal{T}_k$ на $(k+1)$ -вата стъпка на съгъстяване може да се асемблира от елементните матрици на коравина $A_e^{(k+1)}$ и може да се представи в две на две блочната форма

$$A_E^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{E:11}^{(k+1)} & A_{E:12}^{(k+1)} \\ A_{E:21}^{(k+1)} & A_{E:22}^{(k+1)} \end{bmatrix}. \quad (3.2.5)$$

Тук първият диагонален блок съответства на неизвестните от $\mathcal{T}_{k+1} \setminus \mathcal{T}_k$, докато вторият диагонален блок е (9×9) матрица, свързана с възлите от \mathcal{T}_k . Представянето (3.2.5) ще бъде използвано по-късно в анализа на локалната константа в усиленото неравенство на КБШ.

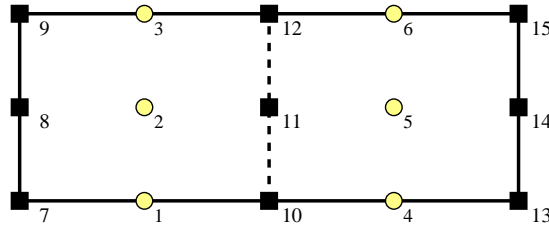
Нека $\tilde{A}_E^{(k+1)}$ е йерархичната матрица на коравина, съответстваща на двунивов йерархичен възлов базис. Двете макроелементни матрици са свързани посредством равенството

$$\tilde{A}_E^{(k+1)} = J_E^T A_E^{(k+1)} J_E, \quad (3.2.6)$$

където J_E е трансформационната матрица между стандартния и йерархичния възлов базис. Тя има вида

$$J_E = \begin{bmatrix} I_k & Z \\ 0 & I_9 \end{bmatrix}, \quad (3.2.7)$$

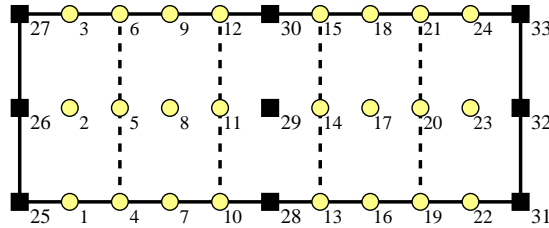
където $k = 6(\varrho - 1)$.



Фигура 3.2: SC равномерно сгъстяване на мрежата за $\varrho = 2$

За $\varrho = 2$ и номериране на възлите според Фиг.3.2, първият диагонален блок на J_E е (6×6) единична матрица, а интерполационната матрица Z има вида

$$Z = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3I_3 & -I_3 \\ 6I_3 & 6I_3 \\ -I_3 & 3I_3 \end{bmatrix}^T.$$



Фигура 3.3: SC равномерно сгъстяване на мрежата за $\varrho = 5$

За $\varrho = 5$ и номериране на възлите според Фиг.3.3 първият диагонален блок на J_E е (24×24) единична матрица и интерполационната матрица Z може да се запише във вида

$$Z = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 18I_3 & 12I_3 & 7I_3 & 3I_3 & -2I_3 & -3I_3 & -3I_3 & -2I_3 \\ 9I_3 & 16I_3 & 21I_3 & 24I_3 & 24I_3 & 21I_3 & 16I_3 & 9I_3 \\ -2I_3 & -3I_3 & -3I_3 & -2I_3 & 3I_3 & 7I_3 & 12I_3 & 18I_3 \end{bmatrix}^T.$$

Следвайки въведеното разделяне на неизвестните, йерархичната базисна матрица $\tilde{A}_E^{(k+1)}$ може да се представи също в две на две блочна форма

$$\tilde{A}_E^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{E:11}^{(k+1)} & \tilde{A}_{E:12}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{E:21}^{(k+1)} & \tilde{A}_{E:22}^{(k+1)} \end{bmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Глобалната йерархична матрица $\tilde{A}^{(k+1)}$, асемблирана с помощта на въведените макроелементни йерархични матрици, след подходящо пренареждане на степените на свобода може аналогично да се запише във вида

$$\tilde{A}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k+1)} & \tilde{A}_{12}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+1)} & \tilde{A}_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \quad (3.2.9)$$

където първият диагонален блок се асоциира с неизвестните от $\mathcal{T}_{k+1} \setminus \mathcal{T}_k$, докато вторият диагонален блок е свързан с възлите от \mathcal{T}_k .

Равномерни оценки на константата на КБШ

От Лема 1.3.4 следва, че за константата γ в усиленото неравенство на КБШ е изпълнено

$$\gamma \leq \max_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \gamma_E, \quad \gamma_E^2 = 1 - \mu_1. \quad (3.2.10)$$

Тук с μ_1 сме означили минималната собствена стойност на макроелементната обобщена спектрална задача

$$S_E^{(k+1)} \mathbf{v}_{E:2} = \mu A_e^{(k)} \mathbf{v}_{E:2}, \quad \mathbf{v}_{E:2} \neq \text{const}, \quad (3.2.11)$$

където сме отчели факта, че йерархичната базисна трансформация (3.2.7) не променя макроелементното допълнение на Шур $S_E^{(k+1)}$.

За крайни елементи от по-нисък ред (например линейни) локалната задача (3.2.11) е лесно решима. Тук размерът на елементните матрици, зависещи от коефициента на сгъстяване ϱ и коефициента на анизотропия, правят решаването на задачата за собствените стойности много по-сложно. Поради тази причина за получаването на оценки на локалните константи на КБШ, както в Лема 2.4.1, въвеждаме матрицата

$$B := \begin{bmatrix} A_{E:11}^{(k+1)} & A_{E:12}^{(k+1)} \\ A_{E:21}^{(k+1)} & A_{E:22}^{(k+1)} - \underline{\mu} A_e^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

и използваме, че константата $\underline{\mu} > 0$, за която B е SPSD матрица, е долна граница на μ в (3.2.11).

Нека да формулираме следващата лема.

Лема 3.2.1. *Константата γ в усиленото неравенство на КБШ, съответстваща на равномерна SC процедура на сгъстяване за конформни биквадратични елементи,*

е равномерно ограничена по отношение коефициента на анизотропия за $\varrho = 2, 3, 4, 5$, като са в сила следните оценки

$$\begin{aligned} \gamma^2 &\leq \frac{27}{32} \approx 0.844, & \varrho = 2, \\ \gamma^2 &\leq \frac{16}{21} \approx 0.762, & \varrho = 3, \\ \gamma^2 &\leq \frac{577 + \sqrt{13441}}{768} \approx 0.902, & \varrho = 4, \\ \gamma^2 &\leq \frac{176}{205} \approx 0.859, & \varrho = 5. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Доказателство: Ще представим доказателство на лемата само за случая $\varrho = 5$, тъй като абсолютно същият подход е приложим и за получаването на останалите три оценки. За елементните матрици $A_e^{(k+1)}$ и $A_e^{(k)}$, когато $\varrho = 5$, е изпълнено, че

$$\delta_e^{(k+1)} = 5\delta_e^{(k)}.$$

Понеже $\delta_e^{(k)}$ се появява от двете страни на (3.2.11), без загуба на общността този параметър може да се съкрати при по-нататъшно разглеждане. Матрицата B , дефинирана в (3.2.12), може да се асемблира от матриците

$$\underline{\mu}A_e^{(k)} = \underline{\mu} \begin{bmatrix} A_{e:11}^{(k)} & A_{e:12}^{(k)} & A_{e:13}^{(k)} \\ A_{e:21}^{(k)} & A_{e:22}^{(k)} & A_{e:23}^{(k)} \\ A_{e:31}^{(k)} & A_{e:32}^{(k)} & A_{e:33}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad A_e^{(k+1)} = 5 \begin{bmatrix} A_{e:11}^{(k+1)} & A_{e:12}^{(k+1)} & A_{e:13}^{(k+1)} \\ A_{e:21}^{(k+1)} & A_{e:22}^{(k+1)} & A_{e:23}^{(k+1)} \\ A_{e:31}^{(k+1)} & A_{e:32}^{(k+1)} & A_{e:33}^{(k+1)} \end{bmatrix},$$

където блоковете на $A_e^{(k)}$ имат представянето (3.2.3)–(3.2.4), а за $A_e^{(k+1)}$ е изпълнено, че $A_{e:ij}^{(k+1)} = A_{e:ji}^{(k+1)}$ за $i, j \in \{1, 2, 3\}$ и

$$A_{e:11}^{(k+1)} = A_{e:33}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 14 + \frac{14}{25}\varepsilon & 7 - \frac{16}{25}\varepsilon & -\frac{7}{2} + \frac{2}{25}\varepsilon \\ 7 - \frac{16}{25}\varepsilon & 56 + \frac{32}{25}\varepsilon & 7 - \frac{16}{25}\varepsilon \\ -\frac{7}{2} + \frac{2}{25}\varepsilon & 7 - \frac{16}{25}\varepsilon & 14 + \frac{14}{25}\varepsilon \end{bmatrix},$$

$$A_{e:12}^{(k+1)} = A_{e:23}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -16 + \frac{7}{25}\varepsilon & -8 - \frac{8}{25}\varepsilon & 4 + \frac{1}{25}\varepsilon \\ -8 - \frac{8}{25}\varepsilon & -64 + \frac{16}{25}\varepsilon & -8 - \frac{8}{25}\varepsilon \\ 4 + \frac{1}{25}\varepsilon & -8 - \frac{8}{25}\varepsilon & -16 + \frac{7}{25}\varepsilon \end{bmatrix},$$

$$A_{e:13}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{7}{50}\varepsilon & 1 + \frac{4}{25}\varepsilon & -\frac{1}{2} - \frac{1}{50}\varepsilon \\ 1 + \frac{4}{25}\varepsilon & 8 - \frac{8}{25}\varepsilon & 1 + \frac{4}{25}\varepsilon \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{50}\varepsilon & 1 + \frac{4}{25}\varepsilon & 2 - \frac{7}{50}\varepsilon \end{bmatrix},$$

$$A_{e:22}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 32 + \frac{56}{25}\varepsilon & 16 - \frac{64}{25}\varepsilon & -8 + \frac{8}{25}\varepsilon \\ 16 - \frac{64}{25}\varepsilon & 128 + \frac{128}{25}\varepsilon & 16 - \frac{64}{25}\varepsilon \\ -8 + \frac{8}{25}\varepsilon & 16 - \frac{64}{25}\varepsilon & 32 + \frac{56}{25}\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Следователно матрицата B може да се запише във вида

$$B = B_0 + \underline{\mu}B_{\underline{\mu}} + \varepsilon B_{\varepsilon} + \varepsilon \underline{\mu}B_{\varepsilon \underline{\mu}}, \quad (3.2.14)$$

където B_0 , B_{ε} , $B_{\underline{\mu}}$ и $B_{\varepsilon \underline{\mu}}$ са матрици, които не зависят от параметри. Целта е да се намерят стойностите на $\underline{\mu}$, за които матрицата B е SPSD. Тъй като всяка от матриците в (3.2.14) е симетрична, очевидно е, че B ще бъде симетрична за всяко $\underline{\mu}$ и ε .

Спектралният анализ на всяка от матриците показва, че B_0 и B_{ε} са положително полуопределени, докато $B_{\underline{\mu}}$ и $B_{\varepsilon \underline{\mu}}$ са негативно полуопределени матрици. Сега (3.2.14) се записва във вида:

$$B = (B_0 + \underline{\mu}B_{\underline{\mu}}) + \varepsilon(B_{\varepsilon} + \underline{\mu}B_{\varepsilon \underline{\mu}}). \quad (3.2.15)$$

Тъй като се иска B да остане положително полуопределена за произволен параметър $\varepsilon > 0$, необходимо е да се намерят стойностите на $\underline{\mu}$, които гарантират едновременно положителната полуопределеност на $(B_0 + \underline{\mu}B_\mu)$ и на $(B_\varepsilon + \underline{\mu}B_{\varepsilon\mu})$.

Решавайки обобщената спектрална задача,¹

$$B_0 \mathbf{v} = \lambda(-B_\mu) \mathbf{v}$$

намираме минималната собствена стойност

$$\lambda'_{min} = \frac{15}{19}. \quad (3.2.16)$$

Следователно $(B_0 + \underline{\mu}B_\mu)$ е положително полуопределена за всяко неотрицателно $\underline{\mu} \leq 15/19$. По същия начин се определя минималната собствена стойност на обобщената спектрална задача

$$B_\varepsilon \mathbf{v} = \lambda(-B_{\varepsilon\mu}) \mathbf{v},$$

което е

$$\lambda''_{min} = \frac{29}{205}. \quad (3.2.17)$$

Тогава необходимото условие за $(B_\varepsilon + \underline{\mu}B_{\varepsilon\mu})$ да бъде положително полуопределена е $\underline{\mu} \leq 29/205$.

От (3.2.16) и (3.2.17) се заключава, че $29/205$ е точната долна граница на минималната собствена стойност μ_1 от (3.2.11). От (3.2.10) и последния резултат получаваме

$$\gamma^2 \leq \max_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} \gamma_E \leq 1 - \mu_1 \leq 1 - \frac{29}{205} = \frac{176}{205}.$$

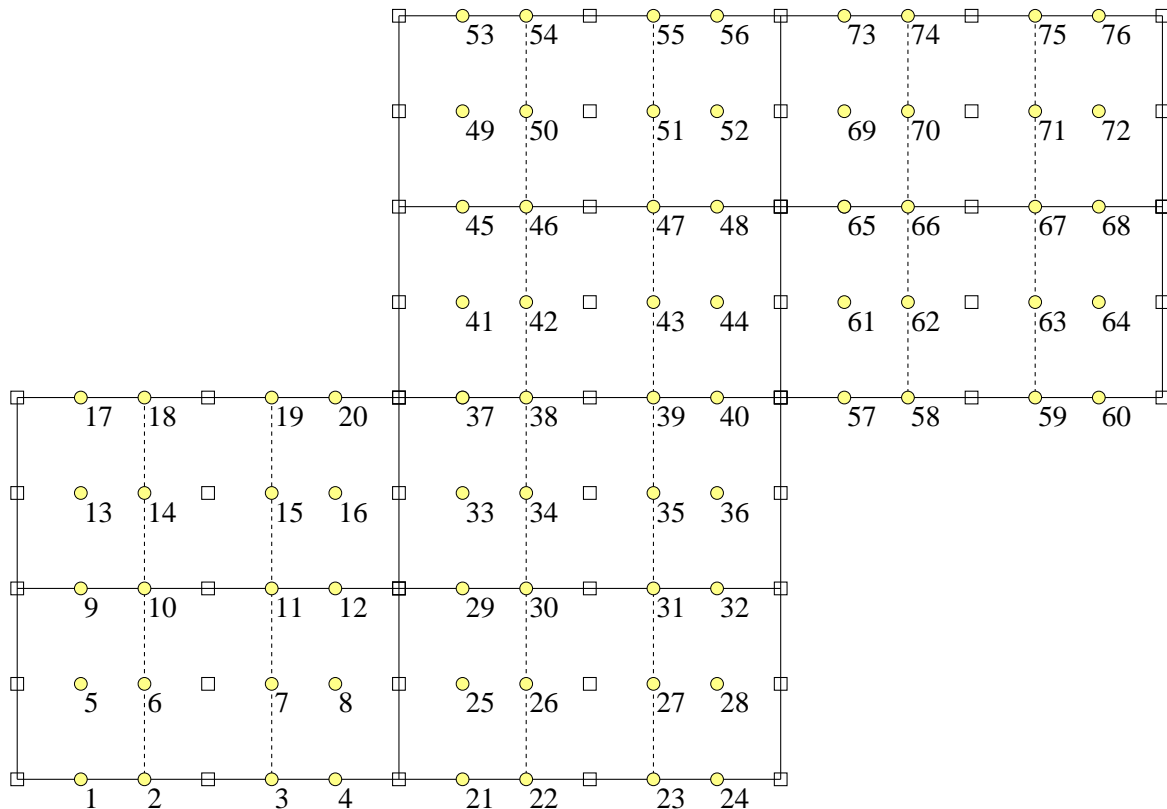
С това доказателството е завършено. ■

Решаване на системи с главния блок A_{11}

За случая на равномерна SC процедура за биквадратични крайноелементни системи неизвестните от главния блок $A_{11}^{(k+1)}$ могат да се номерират, следвайки схемата, представена на Фиг. 3.4. Тогава $A_{11}^{(k+1)}$ е лентова матрица с ширина на полулентата $d(\varrho)$, като са в сила оценките

$$\begin{aligned} d(\varrho) &\leq 4(\varrho - 1) + 1 && \text{за } \varrho = 2, \\ d(\varrho) &\leq 4(\varrho - 1) + 2 && \text{за } \varrho = 3, 4, \\ d(\varrho) &\leq 4(\varrho - 1) + 3 && \text{за } \varrho > 4. \end{aligned}$$

¹Mathematica software tool е използван в представените пресмятания.



Фигура 3.4: Номериране на неизвестните в главния блок за $\rho = 3$

За четно ρ , т.е. за $\rho = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, членът $4(\rho - 1)$ може да се подобри на $2(\rho - 1)$, ако номерирането се модифицира, както е показана на Фиг. 3.5.

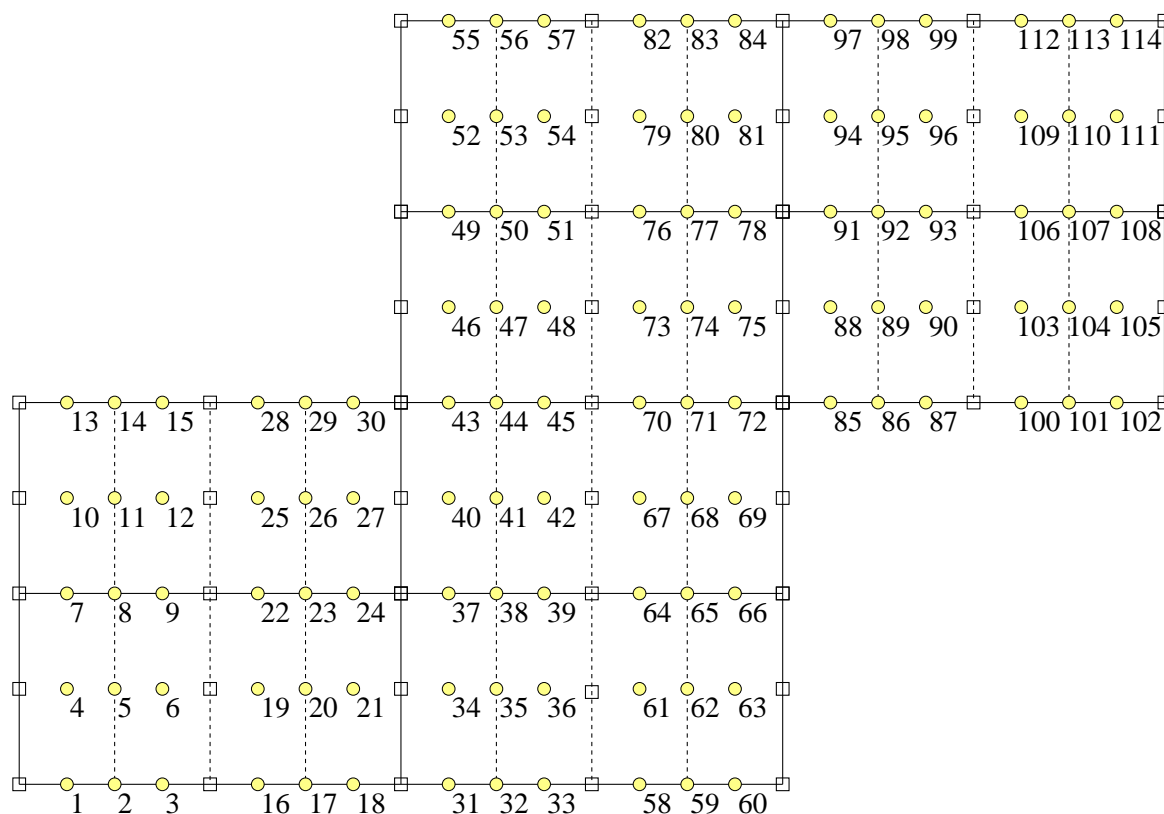
От това следва, че всеки пряк метод за системи с лентови матрици (изполващ например LDL^T факторизация), приложен за система с $A_{11}^{(k+1)}$, ще има оптимална изчислителна сложност, т.е.,

$$\mathcal{N}(A_{11}^{(k+1)^{-1}} \mathbf{v}) = O(N^{(k+1)} - N^{(k)}). \quad (3.2.18)$$

Основен резултат

Комбинирайки (3.2.18) с резултатите от Лема 3.2.1 и с теорията на AMLI методите, виж (1.3.90), получаваме следната теорема:

Теорема 3.2.1. *SC AMLI преобусловителят за конформни биквадратични крайни елементи и параметри $\rho = 5$ и $\nu = 3$ или $\nu = 4$ има оптимална изчислителна сложност, равномерна по отношение на мрежова и коефициентна анизотропия.*



Фигура 3.5: Номериране на неизвестните от главния блок за $\rho = 4$

Числени Експерименти

Таблица 3.1 представя числено изследване на поведението на константата на КБШ γ и на параметъра $\Pi(\gamma)$ като функция на ε (виж (3.2.1)), където

$$\Pi(\gamma) := 1/\sqrt{1 - \gamma^2}, \quad \varepsilon := \frac{a_{22}}{a_{11}} \left(\frac{h_x^{(k)}}{h_y} \right)^2,$$

за различни стойности на коефициента на съгъстяване ρ .

3.2.2 Балансирано SC съгъстяване на мрежата

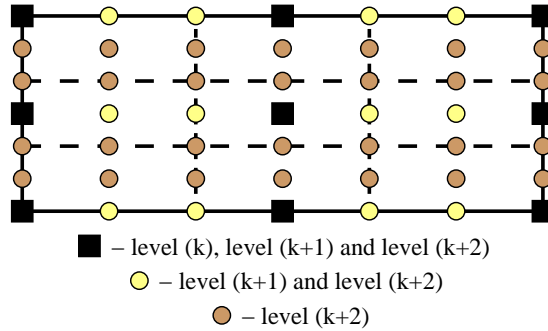
Крайноелементни Матрици на Коровина

При прилагането на балансирана SC процедура на съгъстяване всеки елемент $e \in \mathcal{T}_k$ се разделя на ρ подобни поделементи посредством добавянето на успоредни на вертикалните страни линии на нечетните стъпки ($k = 1, 3, 5, \dots$) и успоредни на хоризонталните страни линии на четните стъпки ($k = 2, 4, 6, \dots$), както е показано

Таблица 3.1: Числено пресметнати оценки на γ , биквадратични елементи

ε	$\varrho = 2$		$\varrho = 3$		$\varrho = 4$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2
0.0001	1.155	0.250	1.106	0.182	1.155	0.250
0.001	1.155	0.251	1.106	0.182	1.155	0.251
0.01	1.161	0.257	1.109	0.186	1.161	0.257
0.1	1.210	0.316	1.136	0.225	1.211	0.318
1.	1.539	0.578	1.342	0.444	1.567	0.592
10.	2.228	0.799	1.782	0.685	2.459	0.835
100.	2.491	0.839	2.008	0.752	3.064	0.893
1000.	2.526	0.843	2.045	0.761	3.184	0.901
10000.	2.529	0.844	2.049	0.762	3.198	0.902
ε	$\varrho = 5$		$\varrho = 6$		$\varrho = 7$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2
0.0001	1.126	0.211	1.155	0.250	1.134	0.222
0.001	1.126	0.211	1.155	0.251	1.134	0.223
0.01	1.130	0.216	1.161	0.257	1.138	0.229
0.1	1.166	0.265	1.211	0.318	1.179	0.280
1.	1.426	0.508	1.568	0.593	1.466	0.534
10.	2.056	0.763	2.585	0.850	2.199	0.793
100.	2.512	0.842	3.554	0.921	2.867	0.878
1000.	2.642	0.857	3.819	0.931	3.108	0.896
10000.	2.657	0.858	3.851	0.933	3.142	0.899
ε	$\varrho = 8$		$\varrho = 9$		$\varrho = 10$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2
0.0001	1.155	0.250	1.139	0.228	1.155	0.250
0.001	1.155	0.251	1.139	0.229	1.155	0.251
0.01	1.161	0.257	1.143	0.235	1.161	0.257
0.1	1.211	0.318	1.186	0.289	1.211	0.318
1.	1.569	0.594	1.488	0.549	1.569	0.594
10.	2.633	0.856	2.290	0.809	2.653	0.858
100.	3.904	0.934	3.131	0.898	4.144	0.942
1000.	4.369	0.948	3.497	0.918	4.841	0.957
10000.	4.432	0.949	3.560	0.921	4.949	0.959

на Фиг. 3.6.



Фигура 3.6: Балансирано SC съгъстяване на мрежата за $\rho = 3$

Нека да означим с $h_x^{(k)}$ и $h_y^{(k)}$ съответно ширината и дължината на произволен биквадратичен елемент e от \mathcal{T}_k . Ако направим полаганията

$$\varepsilon := \frac{a_{22}}{a_{11}} \left(\frac{h_x^{(k)}}{h_y^{(k)}} \right)^2, \quad \delta_e^{(k)} := \frac{a_{11} h_y^{(k)}}{45 h_x^{(k)}}, \quad (3.2.19)$$

съответната елементна матрица на коравина може да се представи във вида

$$A_e^{(k)} = \delta_e^{(k)} \begin{bmatrix} A_{e:11}^{(k)} & A_{e:12}^{(k)} & A_{e:13}^{(k)} \\ A_{e:21}^{(k)} & A_{e:22}^{(k)} & A_{e:23}^{(k)} \\ A_{e:31}^{(k)} & A_{e:32}^{(k)} & A_{e:33}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.2.20)$$

където блоковете $A_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2, 3$ са същите както в (3.2.3)–(3.2.4).

След ℓ стъпки на съгъстяване елементът e ще се раздели на ρ^ℓ на брой поделементи с равни височини $h_y^{(\ell)}$ и равни дължини $h_x^{(\ell)}$, където $h_y^{(\ell)} = \rho^{-(\ell-1)/2} h_y^{(0)}$, $h_x^{(\ell)} = \rho^{-(\ell+1)/2} h_x^{(0)}$ за нечетни ℓ и $h_y^{(\ell)} = \rho^{-\ell/2} h_y^{(0)}$, $h_x^{(\ell)} = \rho^{-\ell/2} h_x^{(0)}$, когато ℓ е четно число. Тук с $h_y^{(0)}$ и $h_x^{(0)}$ отново сме означили размерите на елемента от най-грубата триангулация съответно по y -оста и по x -оста.

За целите на анализа отсега нататък ще разглеждаме две последователни стъпки на съгъстяване едновременно.

Макроелементната матрица на коравина, съответстваща на макроелемента $E \in \mathcal{T}^{(k+2)}$, виж Фиг. 3.6, на $(k+2)$ -рата стъпка на съгъстяване може да се асемблира от елементните матрици на коравина $A_e^{(k+2)}$ и да се запише в следната две на две блочна форма

$$A_E^{(k+2)} = \begin{bmatrix} A_{E:11}^{(k+2)} & A_{E:12}^{(k+2)} \\ A_{E:21}^{(k+2)} & A_{E:22}^{(k+2)} \end{bmatrix}. \quad (3.2.21)$$

Тук първият диагонален блок $A_{E:11}^{(k+2)}$ се асоциира с възлите от $\mathcal{T}_{k+2} \setminus \mathcal{T}_k$, докато вторият диагонален блок, (9×9) матрица, съответства на неизвестните от \mathcal{T}_k .

Нека означим с $\tilde{A}_E^{(k+2)}$ макроелементната йерархична матрица на коравина, съответстваща на двунивов йерархичен възлов базис. Тя е свързана с $A_E^{(k+2)}$ посредством равенството

$$\tilde{A}_E^{(k+2)} = J_E^T A_E^{(k+2)} J_E, \quad (3.2.22)$$

където трансформационната матрица J_E между стандартния и йерархичния възлов базис има вида

$$J_E = \begin{bmatrix} I_k & Z \\ 0 & I_9 \end{bmatrix}, \quad k = (2\varrho + 1)^2 - 9. \quad (3.2.23)$$

Йерархичната матрица $\tilde{A}_E^{(k+2)}$ може също да се представи в две на две блокна форма в съответствие с въведеното двунивово разделяне на неизвестните

$$\tilde{A}_E^{(k+2)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{E:11}^{(k+2)} & \tilde{A}_{E:12}^{(k+2)} \\ \tilde{A}_{E:21}^{(k+2)} & \tilde{A}_{E:22}^{(k+2)} \end{bmatrix}. \quad (3.2.24)$$

Тогава, глобалните матрици $A^{(k+2)}$ и $\tilde{A}^{(k+2)}$, съответстващи на стандартен и йерархичен възлов базис, могат да се асемблират от съответните макроелементни матрици. След подходящо номериране на степените на свобода, те по подобен начин могат да се запишат във вида

$$A^{(k+2)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+2)} & A_{12}^{(k+2)} \\ A_{21}^{(k+2)} & A_{22}^{(k+2)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^{(k+2)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k+2)} & \tilde{A}_{12}^{(k+2)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+2)} & \tilde{A}_{22}^{(k+2)} \end{bmatrix}, \quad (3.2.25)$$

където първите диагонални блокове са свързани с неизвестните от $\mathcal{T}_{k+2} \setminus \mathcal{T}_k$, а вторите диагонални блокове - с възлите от \mathcal{T}_k . Подобно на (3.2.22) в сила е равенството

$$\tilde{A}^{(k+2)} = J^{(k+2)T} A^{(k+2)} J^{(k+2)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+2)} & \tilde{A}_{12}^{(k+2)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+2)} & A^{(k)} \end{bmatrix},$$

където с $J^{(k+2)}$ сме означили глобалната трансформационна матрица между стандартния и йерархичния базис.

Равномерни оценки на константата на КБШ

При балансираната SC процедура константата в усиленото неравенство на КБШ $\gamma^{(k_0)} = \gamma^{(2)}$ (виж (1.3.91)) се дефинирана като минималното $\gamma^{(2)} \geq 0$, удовлетворяващо

неравенството

$$|\mathbf{w}_1^T \tilde{A}_{12}^{(k+2)} \mathbf{w}_2| \leq \gamma^{(2)} \{ \mathbf{w}_1^T \tilde{A}_{11}^{(k+2)} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2^T \tilde{A}_{22}^{(k+2)} \mathbf{w}_2 \}^{1/2}, \quad \forall \mathbf{w}^T = (\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T).$$

Можем да формулираме следната лема.

Лема 3.2.2. *При балансиран SC подход с $\varrho = 2$ константата $\gamma^{(2)}$ в усиленото неравенство на КБШ, съответстваща на биквадратични конформни крайни елементи, е равномерно ограничена по отношение на коефициента на анизотропия, като е в сила оценката*

$$(\gamma^{(2)})^2 \leq \frac{113}{128} \approx 0.883, \quad \varrho = 2. \quad (3.2.26)$$

Доказателство: Доказателството на Лема 3.2.2 е аналогично с доказателството на Лема 3.2.1. ■

Решаване на системи с главния блок

При балансираната SC процедура на съгъстяване, неизвестните, съответстващи на главния блок $A_{11}^{(k+1)}$ могат да се номерират по същия начин както при равномерната SC процедура, формирайки лентови матрици с равномерно ограничена ширина на полулентата. Тогава за изчислителната сложност на който и да е пряк метод за системи с лентови матрици ще бъде изпълнено

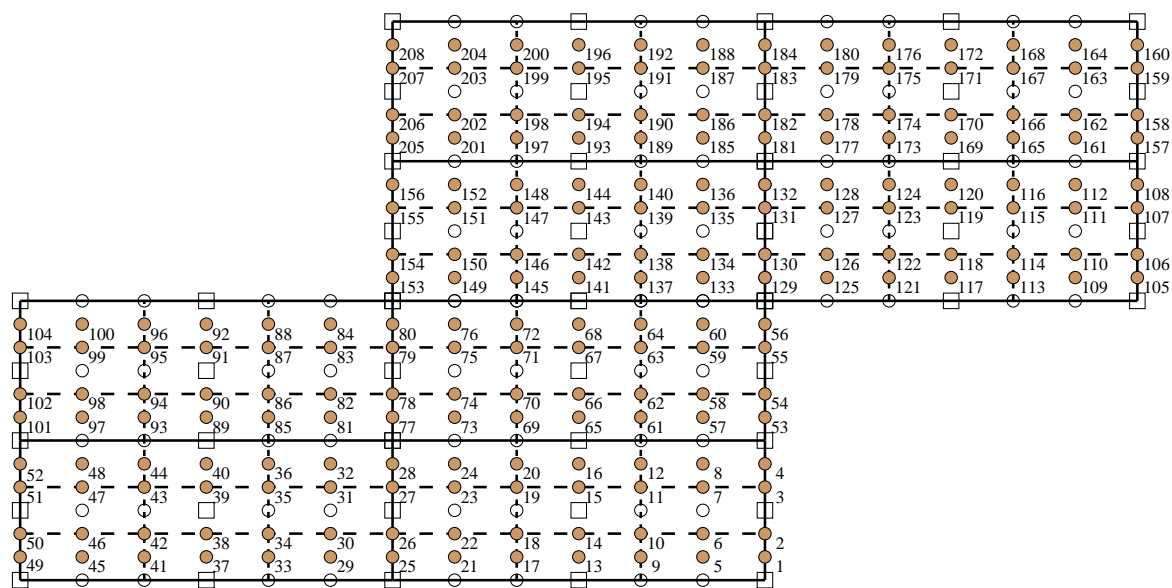
$$\mathcal{N}(A_{11}^{(k+1)-1} \mathbf{v}) = O(N^{(k+1)} - N^{(k)}). \quad (3.2.27)$$

Трябва да отбележим, че посоката на номериране на неизвестните от главния блок се променя от вертикална към хоризонтална и обратно, в зависимост от това дали k е нечетно или четно число, т.е. в зависимост от това по кое направление съгъстяваме мрежата.

Основен резултат

От Лема 3.2.2, (3.2.27) и (1.3.91), следва основният резултат:

Теорема 3.2.2. *Балансираният SC AMLI преобусловител с параметри $\varrho = 2$, $\nu = 3$, $k_0 = 2$ и четно k има оптимална изчислителна сложност, равномерно ограничена по отношение на мрежова и коефициентна анизотропия.*



Фигура 3.7: Вертикално номериране на неизвестните в главния блок за $\rho = 3$

Числени Експерименти

Числено изследване на поведението на константата на КБШ $\gamma^{(2)}$ и на параметъра $\Pi(\gamma^{(2)})$ като функция на коефициента на анизотропия ε (виж (3.2.19)) е представено в Таблица 3.2 за различни стойности на коефициента на съгъстяване ρ , където

$$\Pi(\gamma^{(2)}) := 1/\sqrt{1 - (\gamma^{(2)})^2}, \quad \varepsilon := \frac{a_{22}}{a_{11}} \left(\frac{h_x^{(k)}}{h_y^{(k)}} \right)^2.$$

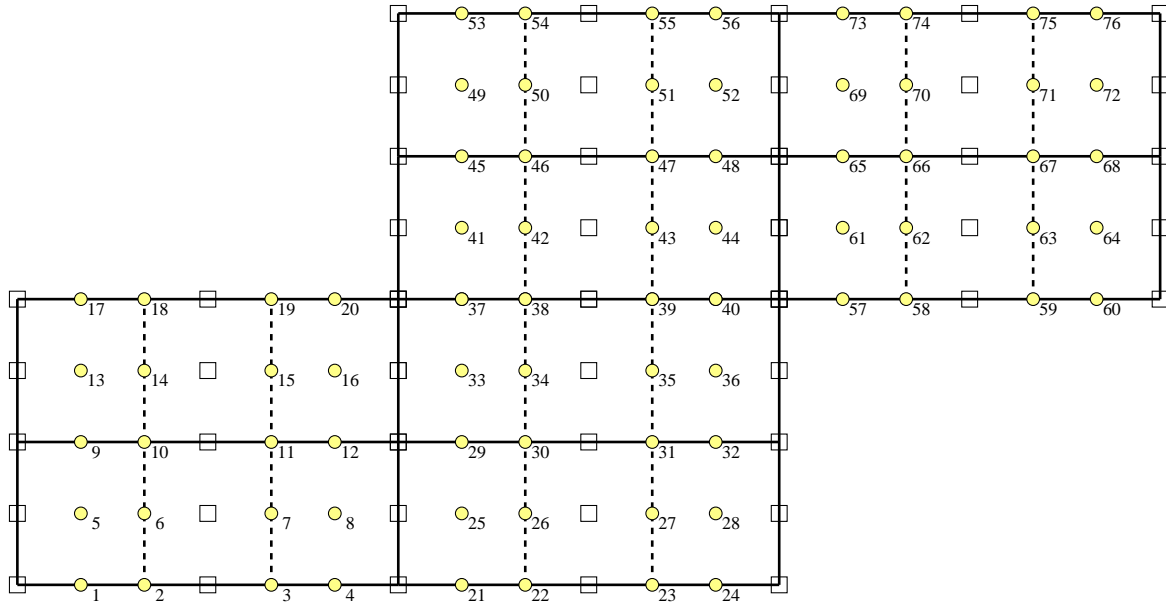
3.3 Бикубични (Q_3) елементи

3.3.1 Равномерно SC съгъстяване на мрежата

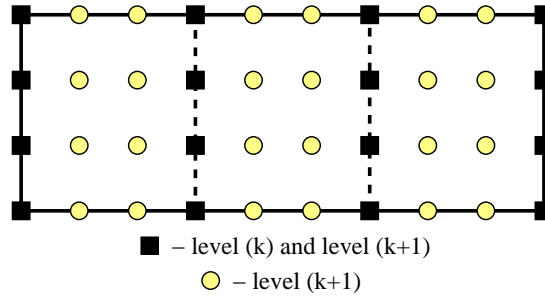
Крайноелементни матрици на коравина

Както за биквадратичните елементи, равномерната SC процедура на съгъстяване на мрежата за бикубичните елементи се състои в разделянето на всеки елемент $e \in \mathcal{T}_k$ на ρ еднакви поделементи посредством добавянето на $(\rho - 1)$ линии, успоредни на вертикалните страни, както е показано с прекъснати линии на Фиг. 3.9.

Отново, ако с $h_x^{(k)}$ и h_y означим съответно дължината и височината на произволен



Фигура 3.8: Хоризонтално номериране на неизвестните в главния блок за $\rho = 3$



Фигура 3.9: SC равномерно сгъстяване на мрежата за $\rho = 3$

елемент $e \in \mathcal{T}_k$, \mathbf{a}_{ii} , $i = 1, 2$ са дефинирани както в (1.1.13) и

$$\varepsilon := \frac{\mathbf{a}_{22}}{\mathbf{a}_{11}} \left(\frac{h_x^{(k)}}{h_y} \right)^2, \quad \delta_e^{(k)} := \frac{\mathbf{a}_{11}}{25} \frac{h_y}{h_x^{(k)}}, \quad (3.3.28)$$

елементната матрица на коравина за вертикално лексикографско подреждане на неизвестните може да се представи във вида

$$A_e^{(k)} = \delta_e^{(k)} \begin{bmatrix} A_{e:11}^{(k)} & A_{e:12}^{(k)} & A_{e:13}^{(k)} & A_{e:14}^{(k)} \\ A_{e:21}^{(k)} & A_{e:22}^{(k)} & A_{e:23}^{(k)} & A_{e:24}^{(k)} \\ A_{e:31}^{(k)} & A_{e:32}^{(k)} & A_{e:33}^{(k)} & A_{e:34}^{(k)} \\ A_{e:41}^{(k)} & A_{e:42}^{(k)} & A_{e:43}^{(k)} & A_{e:44}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.3.29)$$

Таблица 3.2: Числено пресметнати оценки на $\gamma^{(2)}$, биквадратични елементи

ε	$\varrho^2 = 4$		$\varrho^2 = 9$		$\varrho^2 = 16$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	2.921	0.883	2.265	0.805	3.691	0.927
0.001	2.915	0.882	2.259	0.804	3.672	0.926
0.01	2.866	0.878	2.206	0.794	3.509	0.919
0.1	2.511	0.841	1.927	0.731	2.828	0.875
1.	1.799	0.691	1.504	0.558	2.057	0.764
10.	2.511	0.841	1.927	0.731	2.828	0.875
100.	2.866	0.878	2.206	0.794	3.509	0.919
1000.	2.915	0.882	2.259	0.804	3.672	0.926
10000.	2.921	0.883	2.265	0.805	3.691	0.927
ε	$\varrho^2 = 25$		$\varrho^2 = 36$		$\varrho^2 = 49$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	2.990	0.888	4.446	0.949	3.562	0.921
0.001	2.968	0.886	4.400	0.948	3.512	0.919
0.01	2.790	0.872	4.055	0.939	3.207	0.903
0.1	2.279	0.807	3.048	0.892	2.491	0.839
1.	1.697	0.653	2.177	0.789	1.813	0.696
10.	2.279	0.807	3.048	0.892	2.491	0.839
100.	2.790	0.872	4.055	0.939	3.207	0.903
1000.	2.968	0.886	4.400	0.948	3.512	0.919
10000.	2.990	0.888	4.446	0.949	3.562	0.921
ε	$\varrho^2 = 64$		$\varrho^2 = 81$		$\varrho^2 = 100$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	5.116	0.962	4.051	0.939	5.711	0.969
0.001	5.026	0.960	3.961	0.936	5.560	0.968
0.01	4.448	0.949	3.513	0.919	4.731	0.955
0.1	3.193	0.902	2.642	0.857	3.300	0.908
1.	2.256	0.804	1.895	0.722	2.316	0.814
10.	3.193	0.902	2.642	0.857	3.300	0.908
100.	4.448	0.949	3.513	0.919	4.731	0.955
1000.	5.026	0.960	3.961	0.936	5.560	0.968
10000.	5.116	0.962	4.051	0.939	5.711	0.969

където

$$\begin{aligned}
A_{e:11}^{(k)} &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} \frac{148(1+\varepsilon)}{3} & \frac{1221}{32} - 63\varepsilon & -\frac{111}{8} + 18\varepsilon & \frac{703}{96} - \frac{13\varepsilon}{3} \\ \frac{1221}{32} - 63\varepsilon & \frac{999}{4} + 144\varepsilon & -\frac{999}{32} - 99\varepsilon & -\frac{111}{8} + 18\varepsilon \\ -\frac{111}{8} + 18\varepsilon & -\frac{999}{32} - 99\varepsilon & \frac{999}{4} + 144\varepsilon & \frac{1221}{32} - 63\varepsilon \\ \frac{703}{96} - \frac{13\varepsilon}{3} & -\frac{111}{8} + 18\varepsilon & \frac{1221}{32} - 63\varepsilon & \frac{148(1+\varepsilon)}{3} \end{bmatrix}, \\
A_{e:12}^{(k)} &= \\
= 3 \begin{bmatrix} -3 + \frac{407\varepsilon}{224} & -\frac{297}{128}(1+\varepsilon) & \frac{27}{448}(14+11\varepsilon) & -\frac{(399+143\varepsilon)}{896} \\ -\frac{297}{128}(1+\varepsilon) & \frac{27}{112}(-63+22\varepsilon) & -\frac{27}{896}(-63+121\varepsilon) & \frac{27}{448}(14+11\varepsilon) \\ \frac{27}{448}(14+11\varepsilon) & -\frac{27}{896}(-63+121\varepsilon) & \frac{27}{112}(-63+22\varepsilon) & -\frac{297}{128}(1+\varepsilon) \\ -\frac{(399+143\varepsilon)}{896} & \frac{27}{448}(14+11\varepsilon) & -\frac{297}{128}(1+\varepsilon) & -3 + \frac{407\varepsilon}{224} \end{bmatrix}, \\
A_{e:13}^{(k)} &= \\
= \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 144 - 111\varepsilon & \frac{81}{8}(11+14\varepsilon) & -\frac{81}{2}(1+\varepsilon) & \frac{3}{8}(57+26\varepsilon) \\ \frac{81}{8}(11+14\varepsilon) & 81(9-4\varepsilon) & \frac{81}{8}(-9+22\varepsilon) & -\frac{81}{2}(1+\varepsilon) \\ -\frac{81}{2}(1+\varepsilon) & \frac{81}{8}(-9+22\varepsilon) & 81(9-4\varepsilon) & \frac{81}{8}(11+14\varepsilon) \\ \frac{3}{8}(57+26\varepsilon) & -\frac{81}{2}(1+\varepsilon) & \frac{81}{8}(11+14\varepsilon) & 144 - 111\varepsilon \end{bmatrix}, \\
A_{e:14}^{(k)} &= \\
= \begin{bmatrix} \frac{-416+703\varepsilon}{672} & \frac{3(143+399\varepsilon)}{896} & \frac{3(26+57\varepsilon)}{448} & \frac{247(1+\varepsilon)}{2688} \\ \frac{3(143+399\varepsilon)}{896} & \frac{9(-39+38\varepsilon)}{112} & \frac{9(-39+209\varepsilon)}{896} & \frac{3(26+57\varepsilon)}{448} \\ \frac{3(26+57\varepsilon)}{448} & \frac{9(-39+209\varepsilon)}{896} & \frac{9(-39+38\varepsilon)}{112} & \frac{3(143+399\varepsilon)}{896} \\ \frac{247(1+\varepsilon)}{2688} & \frac{3(26+57\varepsilon)}{448} & \frac{3(143+399\varepsilon)}{896} & \frac{-416+703\varepsilon}{672} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$A_{e:22}^{(k)} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 144 + \frac{999\varepsilon}{4} & \frac{81}{16}(22 - 63\varepsilon) & \frac{81}{8}(-4 + 9\varepsilon) & -\frac{9}{16}(-38 + 39\varepsilon) \\ \frac{81}{16}(22 - 63\varepsilon) & 729(1 + \varepsilon) & -\frac{729}{16}(2 + 11\varepsilon) & \frac{81}{8}(-4 + 9\varepsilon) \\ \frac{81}{8}(-4 + 9\varepsilon) & -\frac{729}{16}(2 + 11\varepsilon) & 729(1 + \varepsilon) & \frac{81}{16}(22 - 63\varepsilon) \\ -\frac{9}{16}(-38 + 39\varepsilon) & \frac{81}{8}(-4 + 9\varepsilon) & \frac{81}{16}(22 - 63\varepsilon) & 144 + \frac{999\varepsilon}{4} \end{bmatrix},$$

$$A_{e:23}^{(k)} = \begin{bmatrix} -\frac{9(352 + 111\varepsilon)}{224} & \frac{81(-121 + 63\varepsilon)}{896} & -\frac{81(-22 + 9\varepsilon)}{448} & \frac{9(-209 + 39\varepsilon)}{896} \\ \frac{81(-121 + 63\varepsilon)}{896} & \frac{-729(11 + 2\varepsilon)}{112} & \frac{8019(1 + \varepsilon)}{896} & -\frac{81(-22 + 9\varepsilon)}{448} \\ -\frac{81(-22 + 9\varepsilon)}{448} & \frac{8019(1 + \varepsilon)}{896} & \frac{-729(11 + 2\varepsilon)}{112} & \frac{81(-121 + 63\varepsilon)}{896} \\ \frac{9(-209 + 39\varepsilon)}{896} & -\frac{81(-22 + 9\varepsilon)}{448} & \frac{81(-121 + 63\varepsilon)}{896} & -\frac{9(352 + 111\varepsilon)}{224} \end{bmatrix},$$

и

$$\begin{aligned} A_{e:11}^{(k)} &= A_{e:44}^{(k)}, & A_{e:22}^{(k)} &= A_{e:33}^{(k)}, & A_{e:12}^{(k)} &= A_{e:21}^{(k)} = A_{e:34}^{(k)} = A_{e:43}^{(k)}, \\ A_{e:14}^{(k)} &= A_{e:41}^{(k)}, & A_{e:23}^{(k)} &= A_{e:32}^{(k)}, & A_{e:13}^{(k)} &= A_{e:31}^{(k)} = A_{e:24}^{(k)} = A_{e:42}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Ако $h_y^{(0)}$ и $h_x^{(0)}$ са размерите на елемента от най-грубата мрежа по y -оста и x -оста съответно, поделелементите, получени след ℓ стъпки на съгъстяване, ще имат равни височини $h_y = h_y^{(0)}$ и равни дължини $h_x^{(\ell)} = \varrho^{-\ell} h_x^{(0)}$.

Макроелементната матрица на коравина $A_E^{(k+1)}$ за $E \in \mathcal{T}_k$ на $(k+1)$ стъпка на съгъстяване може да се асемблира, използвайки съответните ϱ на брой елементни матрици на коравина $A_e^{(k+1)}$ и може да бъде представена в две на две блочна форма

$$A_E^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{E:11}^{(k+1)} & A_{E:12}^{(k+1)} \\ A_{E:21}^{(k+1)} & A_{E:22}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \quad (3.3.31)$$

където блокът $A_{E:11}^{(k+1)}$ се асоциира със степените на свобода от $\mathcal{T}_{k+1} \setminus \mathcal{T}_k$, докато $A_{E:22}^{(k+1)}$ е (16×16) матрица, съответстваща на макроелементните възли от \mathcal{T}_k .

Йерархичната макроелементна матрица на коравина $\tilde{A}_E^{(k+1)}$ е свързана със стан-

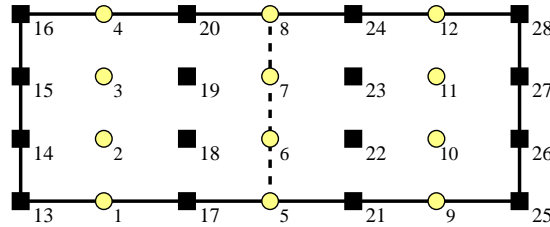
дартната възлова макроелементна матрица $A_E^{(k+1)}$ посредством равенството

$$\tilde{A}_E^{(k+1)} = J_E^T A_E^{(k+1)} J_E, \quad (3.3.32)$$

където трансформационната матрица J_E има вида

$$J_E = \begin{bmatrix} I_m & Z \\ 0 & I_{16} \end{bmatrix} \quad (3.3.33)$$

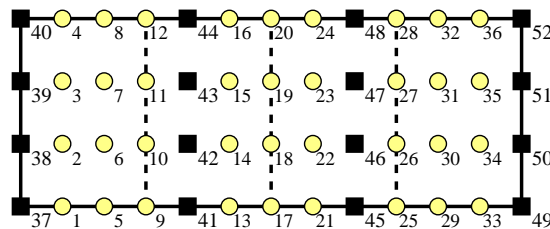
с $m = 12(\varrho - 1)$.



Фигура 3.10: SC равномерно сгъстяване на мрежата за $\varrho = 2$

За $\varrho = 2$ и двунивово номериране на възлите в съответствие с Фиг. 3.10 първият диагонален блок на J_E е (12×12) единична матрица и интерполационната матрица Z има вида

$$Z = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5I_4 & -I_4 & I_4 \\ 15I_4 & 9I_4 & -5I_4 \\ -5I_4 & 9I_4 & 15I_4 \\ I_4 & -I_4 & 5I_4 \end{bmatrix}^T.$$



Фигура 3.11: SC равномерно сгъстяване на мрежата за $\varrho = 4$

За $\varrho = 4$ и двунивово номериране на неизвестните в съответствие с Фиг. 3.11 първият диагонален блок на J_E е (36×36) единична матрица и интерполационната

матрица Z може да се запише като

$$Z = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 77I_4 & 40I_4 & 15I_4 & -7I_4 & -8I_4 & -5I_4 & 5I_4 & 8I_4 & 7I_4 \\ 77I_4 & 120I_4 & 135I_4 & 105I_4 & 72I_4 & 35I_4 & -27I_4 & -40I_4 & -33I_4 \\ -33I_4 & -40I_4 & -27I_4 & 35I_4 & 72I_4 & 105I_4 & 135I_4 & 120I_4 & 77I_4 \\ 7I_4 & 8I_4 & 5I_4 & -5I_4 & -8I_4 & -7I_4 & 15I_4 & 40I_4 & 77I_4 \end{bmatrix}^T$$

В съответствие с въведеното двунивово разделяне на неизвестните йерархичната макроелементна матрица може да се представи в две на две блочната форма

$$\tilde{A}_E^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{E:11}^{(k+1)} & \tilde{A}_{E:12}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{E:21}^{(k+1)} & \tilde{A}_{E:22}^{(k+1)} \end{bmatrix}. \quad (3.3.34)$$

Глобалните стандартна и йерархична базисни матрици могат да се асемблират от съответните макроелементни матрици и след подходяща пермутация на степените на свобода по сходен начин да се представят във вида

$$A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ A_{21}^{(k+1)} & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k+1)} & \tilde{A}_{12}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+1)} & \tilde{A}_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \quad (3.3.35)$$

където вторите диагонални блокове са свързани с възлите от по-грубата мрежа \mathcal{T}_k , докато първите диагонални блокове се асоциират с новодобавените възли от фината мрежа \mathcal{T}_{k+1} , т.е., възлите, които принадлежат на \mathcal{T}_{k+1} , но не на \mathcal{T}_k .

Ако $J^{(k+1)}$ е глобалната трансформационна матрица между стандартния и йерархичния базис, двете матрици на коравина са свързани посредством

$$\tilde{A}^{(k+1)} = J^{(k+1)T} A^{(k+1)} J^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & \tilde{A}_{12}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+1)} & A^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Равномерни оценки на константата на КБШ

Както за биквадратичните, така и за бикубичните елементи може да се формулира следната лема:

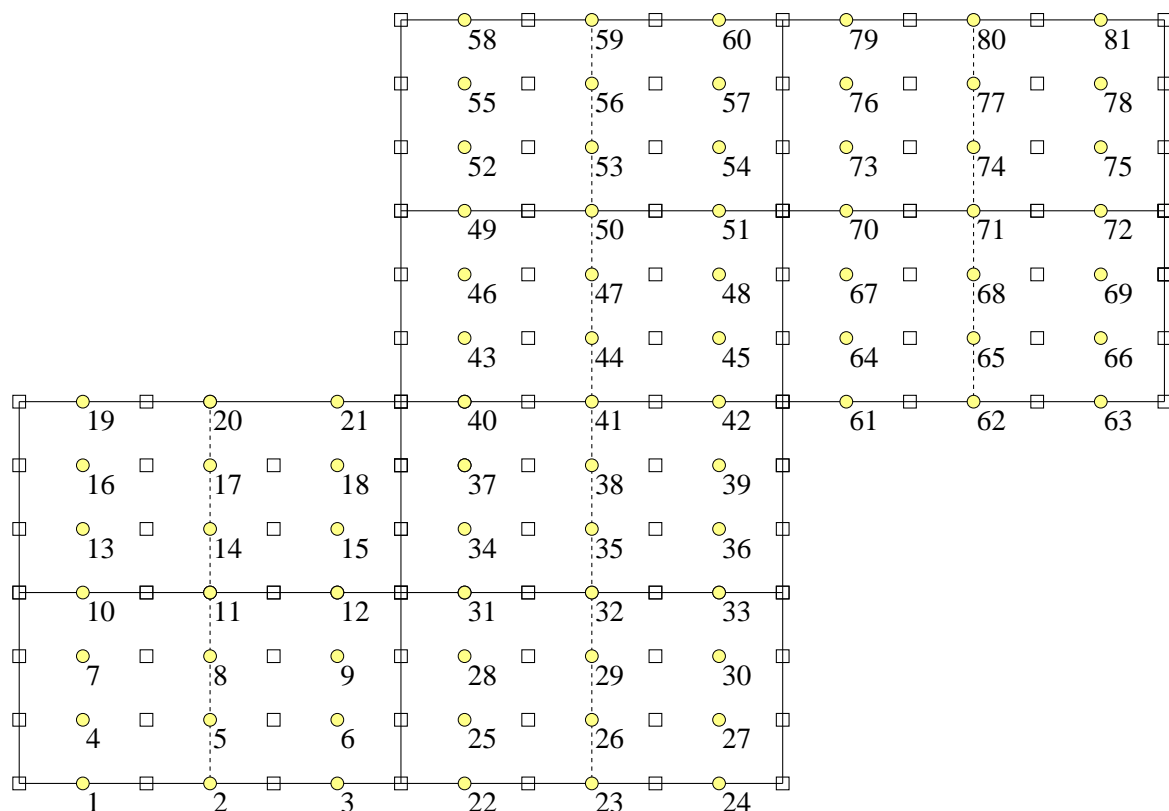
Лема 3.3.1. *Константата γ в усиленото неравенство на КБШ, свързана с SC равномерна процедура на съгъстяване на мрежата за конформни бикубични крайни елементи с параметри $\rho = 2$, $\rho = 3$ и $\rho = 4$, е равномерно ограничена по отношение*

на коефициента на анизотропия, като са в сила оценките

$$\begin{aligned} \gamma^2 &\leq \frac{19 + \sqrt{46}}{36} \approx 0.71618, & \varrho = 2, \\ \gamma^2 &\leq \frac{9713 + \sqrt{5007793}}{13122} \approx 0.91075, & \varrho = 3, \\ \gamma^2 &\leq \frac{285 + \sqrt{4062}}{408} \approx 0.85474, & \varrho = 4. \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

Доказателство: Лема 3.3.1 се доказва, използвайки подхода, представен вече в доказателството на Лема 3.2.1. ■

Решаване на системи с главния блок A_{11}

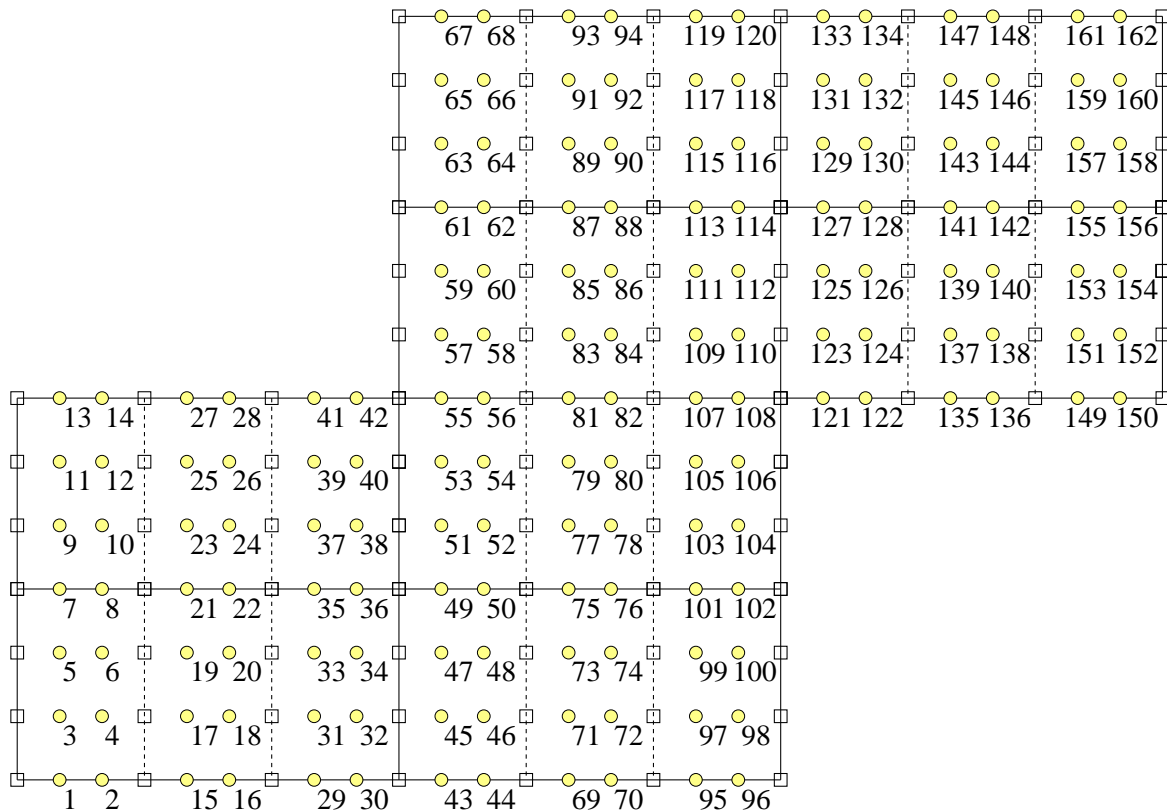


Фигура 3.12: Номериране на неизвестните в главния блок за $\varrho = 2$

Ако подредим неизвестните от главния блок A_{11} , следвайки схемата, представена на Фиг. 3.3.1, за ширината на полулентата $d(\varrho)$ на получената лентова матрица ще бъде изпълнено

$$d(\varrho) = 9(\varrho - 1) + 2 \quad \text{за} \quad \varrho = 2, 3,$$

$$d(\varrho) = 9(\varrho - 1) + 3 \quad \text{за} \quad \varrho \geq 4.$$



Фигура 3.13: Номериране на неизвестните в главния блок за $\varrho = 3$

Ако $\varrho = 3k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, неизвестните могат да се номерират, както е показано на Фиг. 3.3.1, и членът $9(\varrho - 1)$ може да се подобри на $3(\varrho - 1)$.

Тогава за решаването на системата с $A_{11}^{(k+1)}$ можем да използваме пряк метод с оптимална изчислителна сложност, за който

$$\mathcal{N}(A_{11}^{(k+1)-1} \mathbf{v}) = O(N^{(k+1)} - N^{(k)}). \quad (3.3.37)$$

Основен резултат

От последния резултат (3.3.37), равномерните оценки (3.3.36) и теорията на AMLI методите следва основният принос на това изследване:

Теорема 3.3.1. *SC AMLI преобусловителят с параметри $\varrho = 4$ и $\nu = 3$ има оптимален ред на изчислителна сложност равномерно по отношение на мрежова и коефициентна анизотропия.*

Числени Експерименти

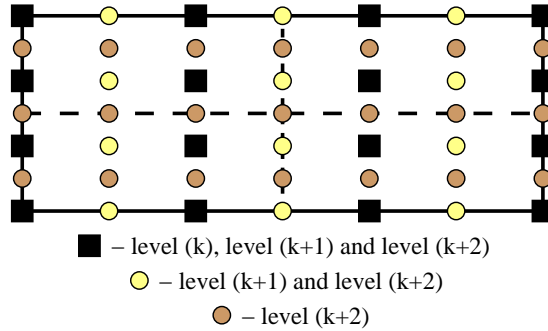
В Таблица 3.3 е представено числено изследване на константата на КБШ γ и на параметъра $\Pi(\gamma)$ като функция на коефициента на анизотропия ε за различни стойности на параметъра на сгъстяване ρ , където

$$\Pi(\gamma) := 1/\sqrt{1 - \gamma^2}, \quad \varepsilon := \frac{a_{22}}{a_{11}} \left(\frac{h_x^{(k)}}{h_y^{(k)}} \right)^2.$$

3.3.2 Балансирано SC сгъстяване на мрежата

Крайноелементни матрици на коравина

Както за биквадратичните елементи, така и за бикубичните при балансирано SC сгъстяване на мрежата всеки елемент $e \in \mathcal{T}_k$ се разделя на ρ подобни поделемента посредством добавянето на линии, успоредни на вертикалните страни на нечетните стъпки ($k = 1, 3, 5, \dots$) и добавянето на линии, успоредни на хоризонталните страни на четните стъпки ($k = 2, 4, 6, \dots$), както е показано на Фиг. 3.14.



Фигура 3.14: Балансирано SC сгъстяване на мрежата за $\rho = 2$

За произволен бикубичен елемент e от \mathcal{T}_k с ширина и дължина, означени съответно с $h_x^{(k)}$ и $h_y^{(k)}$, се прави полагането

$$\varepsilon := \frac{a_{22}}{a_{11}} \left(\frac{h_x^{(k)}}{h_y^{(k)}} \right)^2, \quad \delta_e^{(k)} := \frac{a_{11}}{45} \frac{h_y^{(k)}}{h_x^{(k)}}. \quad (3.3.38)$$

Бикубичната елементна матрица на коравина може да се представи във вида

Таблица 3.3: Числено пресметнати оценки на γ , бикубични елементи

ε	$\varrho = 2$		$\varrho = 3$		$\varrho = 4$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2
0.0001	1.265	0.375	1.424	0.507	1.347	0.449
0.001	1.266	0.376	1.429	0.510	1.352	0.453
0.01	1.273	0.383	1.480	0.543	1.405	0.494
0.1	1.343	0.445	1.852	0.708	1.723	0.663
1.	1.635	0.626	2.763	0.869	2.279	0.807
10.	1.820	0.698	3.258	0.906	2.570	0.849
100.	1.870	0.714	3.338	0.910	2.611	0.854
1000.	1.876	0.716	3.346	0.911	2.623	0.855
10000.	1.877	0.716	3.347	0.911	2.624	0.855
ε	$\varrho = 5$		$\varrho = 6$		$\varrho = 7$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2
0.0001	1.363	0.462	1.425	0.508	1.382	0.476
0.001	1.373	0.469	1.446	0.522	1.403	0.492
0.01	1.463	0.533	1.629	0.623	1.585	0.602
0.1	1.902	0.724	2.460	0.835	2.225	0.798
1.	2.536	0.844	3.866	0.933	3.000	0.889
10.	2.815	0.873	4.560	0.952	3.340	0.910
100.	2.857	0.878	4.668	0.954	3.393	0.913
1000.	2.862	0.878	4.679	0.954	3.398	0.913
10000.	2.862	0.878	4.680	0.954	3.399	0.913
ε	$\varrho = 8$		$\varrho = 9$		$\varrho = 10$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2	$\Pi(\gamma_{max})$	γ_{max}^2
0.0001	1.388	0.481	1.428	0.510	1.398	0.488
0.001	1.417	0.502	1.474	0.540	1.445	0.521
0.01	1.649	0.632	1.823	0.699	1.779	0.684
0.1	2.372	0.822	2.977	0.887	2.644	0.857
1.	3.207	0.903	4.730	0.955	3.585	0.922
10.	3.580	0.922	5.586	0.968	4.001	0.938
100.	3.638	0.924	5.719	0.969	4.066	0.940
1000.	3.644	0.925	5.733	0.970	4.073	0.940
10000.	3.645	0.925	5.7345	0.970	4.074	0.940

$$A_e^{(k)} = \delta_e^{(k)} \begin{bmatrix} A_{e:11}^{(k)} & A_{e:12}^{(k)} & A_{e:13}^{(k)} & A_{e:14}^{(k)} \\ A_{e:21}^{(k)} & A_{e:22}^{(k)} & A_{e:23}^{(k)} & A_{e:24}^{(k)} \\ A_{e:31}^{(k)} & A_{e:32}^{(k)} & A_{e:33}^{(k)} & A_{e:34}^{(k)} \\ A_{e:41}^{(k)} & A_{e:42}^{(k)} & A_{e:43}^{(k)} & A_{e:44}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.3.39)$$

където блоковете $A_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ са същите като блоковете в (3.3.30). След ℓ стъпки на съгъстяване елементът e ще бъде разделен на ϱ^ℓ на брой поделементи с равни височини $h_y^{(\ell)}$ и равни дължини $h_x^{(\ell)}$, където $h_y^{(\ell)} = \varrho^{-(\ell-1)/2} h_y^{(0)}$, $h_x^{(\ell)} = \varrho^{-(\ell+1)/2} h_x^{(0)}$ за нечетни ℓ и $h_y^{(\ell)} = \varrho^{-\ell/2} h_y^{(0)}$, $h_x^{(\ell)} = \varrho^{-\ell/2} h_x^{(0)}$ когато ℓ е четно число. Тук с $h_y^{(0)}$ и $h_x^{(0)}$ отново са означени размерите на елемента от най-грубата мрежа по y -оста и по x -оста съответно.

Както в случая на биквадратични елементи, при анализа на балансираната SC процедура за бикубични елементи се разглеждат две последователни стъпки на съгъстяване на мрежата едновременно.

Макроелементната матрица на коравина, свързана с макроелемента $E \in \mathcal{T}^{(k+2)}$, както е показано на Фиг. 3.14, на $(k+2)$ -рата стъпка на съгъстяване може да се асемблира от елементните матрици на коравина $A_e^{(k+2)}$ и да се запише в следната две на две блочна форма

$$A_E^{(k+2)} = \begin{bmatrix} A_{E:11}^{(k+2)} & A_{E:12}^{(k+2)} \\ A_{E:21}^{(k+2)} & A_{E:22}^{(k+2)} \end{bmatrix}, \quad (3.3.40)$$

където първият диагонален блок се асоциира с неизвестните от $\mathcal{T}_{k+2} \setminus \mathcal{T}_k$, докато вторият диагонален блок, (16×16) матрица, съответства на възлите от \mathcal{T}_k .

Макроелементната матрица на коравина $\tilde{A}_E^{(k+2)}$, съответстваща на двунивов йерархичен възлов базис, е свързана със стандартната макроелементна матрица на коравина посредством равенството

$$\tilde{A}_E^{(k+2)} = J_E^T A_E^{(k+2)} J_E, \quad (3.3.41)$$

където трансформационната матрица J_E между стандартния и йерархичния възлов базис има вида

$$J_E = \begin{bmatrix} I_k & Z \\ 0 & I_{16} \end{bmatrix}, \quad k = (3\varrho + 1)^2 - 16. \quad (3.3.42)$$

Йерархичната базисна матрица $\tilde{A}_E^{(k+2)}$ може също да се представи в две на две блочна форма в съответствие с въведеното двунивово разделяне на неизвестните

$$\tilde{A}_E^{(k+2)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{E:11}^{(k+2)} & \tilde{A}_{E:12}^{(k+2)} \\ \tilde{A}_{E:21}^{(k+2)} & \tilde{A}_{E:22}^{(k+2)} \end{bmatrix}. \quad (3.3.43)$$

Нека асемблираме глобалните матрици на коравина $A^{(k+2)}$ и $\tilde{A}^{(k+2)}$, съответстващи на стандартен и йерархичен възлов базис, от съответните макроелементни матрици. След подходящо подреждане на степените на свобода те могат да се представят във вида

$$A^{(k+2)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+2)} & A_{12}^{(k+2)} \\ A_{21}^{(k+2)} & A_{22}^{(k+2)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^{(k+2)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k+2)} & \tilde{A}_{12}^{(k+2)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+2)} & \tilde{A}_{22}^{(k+2)} \end{bmatrix}, \quad (3.3.44)$$

където първите диагонални блокове се асоциират с неизвестните от $\mathcal{T}_{k+2} \setminus \mathcal{T}_k$, а вторите диагонални блокове - с възлите от \mathcal{T}_k . Подобно на (3.3.41) в сила е равенството

$$\tilde{A}^{(k+2)} = J^{(k+2)T} A^{(k+2)} J^{(k+2)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+2)} & \tilde{A}_{12}^{(k+2)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+2)} & A^{(k)} \end{bmatrix},$$

където с $J^{(k+2)}$ сме означили глобалната трансформационна матрица между стандартния и йерархичния възлов базис.

Равномерни оценки на константата на КБШ

При балансираното SC съгъстяване на мрежата за бикубични елементи, както в случая на биквадратични, може да се формулира следната лема.

Лема 3.3.2. *За балансираната SC процедура на съгъстяване на мрежата с $\varrho = 2$ константата $\gamma^{(2)}$ в усиленото неравенство на КБШ, съответстваща на бикубични конформни крайни елементи, е равномерно ограничена по отношение на коефициента на анизотропия, като е в сила оценката*

$$(\gamma^{(2)})^2 \leq \frac{203 + 5\sqrt{46}}{288} \approx 0.823, \quad \varrho = 2. \quad (3.3.45)$$

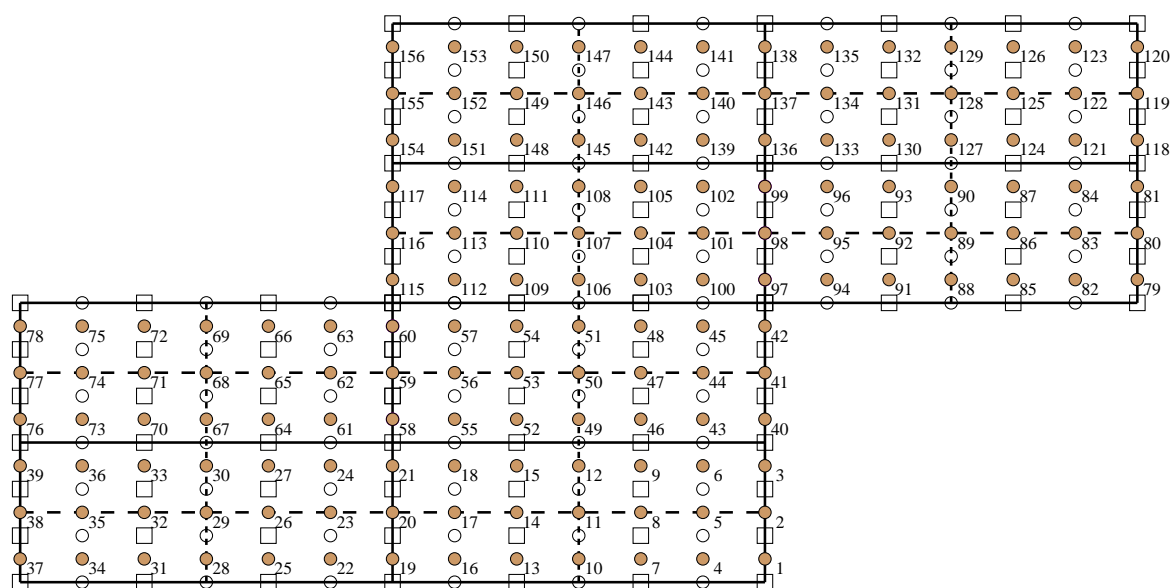
Доказателство: Доказателството на Лема 3.3.2 използва абсолютно същия подход, както доказателството на Лема 3.2.1. ■

Решаване на системи с главния блок

Степените на свобода на водещия блок $A_{11}^{(k+1)}$ при балансираната SC процедура на съгъстяване на мрежата за бикубични елементи могат да се подредят по същия начин, както и при стандартната SC процедура. Това отново води до решаването на системи с лентови блочнодиагонални матрици с равномерно ограничена ширина на полулентата, за които съществуват преки методи, чиято изчислителна сложност е от оптимален ред, т.е.

$$\mathcal{N}(A_{11}^{(k+1)^{-1}} \mathbf{v}) = O(N^{(k+1)} - N^{(k)}). \quad (3.3.46)$$

Както при балансираната SC процедура за биквадратичните елементи, така и за бикубичните, начинът, по който неизвестните от главния блок се номерират, се променя, преминавайки от вертикално съгъстяване на мрежата към хоризонтално и обратно в зависимост от това дали k е нечетно или четно число.

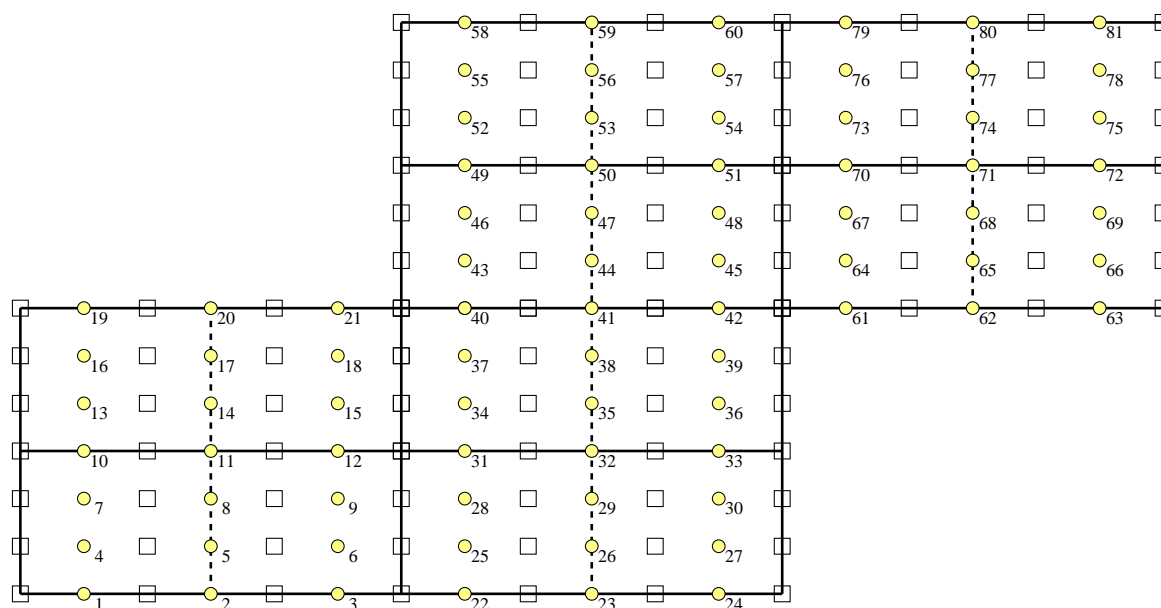


Фигура 3.15: Вертикално номериране на неизвестните в главния блок за $\rho = 2$

Основен резултат

Прилагайки (1.3.91) за равномерните оценки (3.3.45) и (3.3.46), получаваме основния резултат за балансираното SC съгъстяване на мрежата с бикубични елементи.

Теорема 3.3.2. *Балансираният SC AMLI преобусловител с параметри $\rho = 2$, $\nu = 3$,*



Фигура 3.16: Горизонтално номериране на неизвестните в главния блок за $\rho = 2$

$k_0 = 2$ и четно k има оптимална изчислителна сложност, равномерно ограничена по отношение на мрежова и коефициентна анизотропия.

Числени Експерименти

Таблица 3.4 представя числено изследване на константата на КБШ $\gamma^{(2)}$ и $\Pi(\gamma^{(2)})$ като функция на ε за различни стойности на коефициента на сгъстяване ρ , където

$$\Pi(\gamma^{(2)}) := 1/\sqrt{1 - (\gamma^{(2)})^2}, \quad \varepsilon := \frac{\mathbf{a}_{22}}{\mathbf{a}_{11}} \left(\frac{h_x^{(k)}}{h_y^{(k)}} \right)^2.$$

3.4 Заключение

Числените експерименти в Таблицы 3.1–3.4 потвърждават асимптотичната точност на доказаните теоретични резултати. Равномерните оценки в Лемми 3.2.1–3.3.2 и съответно твърденията в Теореме 3.2.13–3.3.45 представят най-песимистичните варианти по отношение на коефициентната и/или мрежова анизотропия. В този смисъл числено пресметнатите стойности на γ и $\gamma^{(2)}$ могат да имат допълнителна практическа стойност. Базирайки се на тях, стойностите на ρ и ν (включително и на ν_k) могат

Таблица 3.4: Числено пресметнати оценки на $\gamma^{(2)}$, бикубични елементи

ε	$\varrho^2 = 4$		$\varrho^2 = 9$		$\varrho^2 = 16$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	2.373	0.822	4.759	0.956	3.528	0.920
0.001	2.362	0.821	4.729	0.955	3.495	0.918
0.01	2.294	0.810	4.530	0.951	3.308	0.909
0.1	2.094	0.772	3.784	0.930	2.733	0.866
1.	1.773	0.682	3.070	0.894	2.208	0.795
10.	2.094	0.772	3.784	0.930	2.733	0.866
100.	2.294	0.810	4.530	0.951	3.308	0.909
1000.	2.362	0.821	4.729	0.955	3.495	0.918
10000.	2.373	0.822	4.759	0.956	3.528	0.920
ε	$\varrho^2 = 25$		$\varrho^2 = 36$		$\varrho^2 = 49$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	3.893	0.934	6.640	0.977	4.676	0.954
0.001	3.850	0.933	6.502	0.976	4.585	0.952
0.01	3.613	0.923	5.817	0.970	4.157	0.942
0.1	2.930	0.883	4.265	0.945	3.222	0.904
1.	2.335	0.817	3.278	0.901	2.516	0.842
10.	2.930	0.883	4.265	0.945	3.222	0.904
100.	3.613	0.923	5.817	0.970	4.157	0.942
1000.	3.850	0.933	6.502	0.976	4.585	0.952
10000.	3.893	0.934	6.640	0.977	4.676	0.954
ε	$\varrho^2 = 64$		$\varrho^2 = 81$		$\varrho^2 = 100$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	5.030	0.960	8.108	0.985	5.642	0.969
0.001	4.907	0.958	7.793	0.984	5.453	0.966
0.01	4.372	0.948	6.503	0.976	4.721	0.955
0.1	3.334	0.910	4.525	0.951	3.514	0.919
1.	2.584	0.850	3.439	0.915	2.695	0.862
10.	3.334	0.910	4.525	0.951	3.514	0.919
100.	4.372	0.948	6.503	0.976	4.721	0.955
1000.	4.907	0.958	7.793	0.984	5.453	0.966
10000.	5.030	0.960	8.108	0.985	5.642	0.969

да се варират, за да се получи по-ефективна AMLI постановка за дадена конкретна задача.

Също така, внимание заслужава фактът, че получените резултати са валидни за процедура на сгъстяване, дефинираща SC процес, който еквивалентно може да бъде приложен по което и да е от координатните направления.

Трябва да се отбележи и структурната прилика на SC алгоритмите със стабилизираните методи на променливите направления (stabilized scalable direction splitting methods), виж [38]. Предимство на SC процедурата обаче е възможността да се разглеждат области, състоящи се от правоъгълни (хексагонални) подобласти с прекъснати ортотропни коефициенти.

В заключение Таблица 3.5 представя минималните стойности на параметрите на сгъстяване и степени на стабилизиращ полином, удовлетворяващи условията за конструиране на на оптимални йерархични AMLI методи, базирани на равномерно SC сгъстяване на мрежата за билинейни, биквадратични и бикубични крайноелементни системи.

Таблица 3.5: Минимален коефициент на сгъстяване (ϱ_{min}) и минимална степен на стабилизиращия полином (ν_{min}) за удовлетворяване на условията (1.3.90).

Type of element	ϱ_{min}	ν_{min}
Q_1	4	3
Q_2	5	3
Q_3	4	3

Глава 4

Нейерархични базисни разделяния за квадратични елементи

Тази глава представя клас от многонивови преобусловители за крайноелементни дискретизации с конформни квадратични елементи, които са базирани на приближени блочни факторизации. Изследването е фокусирано върху силно анизотропни елиптични задачи. Предложеният метод осигурява висока робастност както за задачи, при които посоката на доминираща анизотропия е съгласувана с мрежата, така и за задачи с несъгласувана с мрежата анизотропия.

Тази робастност се постига чрез взаимодействието на следните три компонента: (i) адитивна апроксимация на допълнението на Шур, получена от асемблирането на точните допълнения на Шур на (локални) матрици (на коравина), асоциирани с покритие на цялата област с препокриващи се подобласти; (ii) глобален блочен (Якоби или Гаус-Зайдел) оператор на изглаждане, допълващ стъпка (i); и (iii) използването на разширена (augmented) груба мрежа, която повишава ефикасността от взаимодействието на (i) с (ii), осигурявайки робастност за широк спектър от ъгли за посоката на доминираща анизотропия при фиксиран оператор на изглаждане.

Представеният анализ показва високата ефективност на получения в резултат двунивов метод. Проведените числени експерименти с нелинеен AMLI алгоритъм демонстрират, че описаният двунивов метод може да се приложи успешно в рекурсивното построяване на равномерни многонивови преобусловители с оптимален или почти оптимален порядък на изчислителна сложност.

Основните резултати, включени в тази глава, са публикувани в:

- J. Kraus, M. Lyubery, S. Margenov: Robust multilevel methods for quadratic finite element anisotropic elliptic problems. Numerical Linear Algebra With Applications. (to appear)
- J. Kraus, M. Lyubery, S. Margenov: Robust algebraic multilevel preconditioners for anisotropic elliptic problems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, volume "Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Algorithms and their Applications". (to appear)

4.1 Мотивация

Стандартните (P2 към P1) йерархичните двунивови разделяния за на части квадратични базисни функции не водят до робастни многонивови преобусловители за силно анизотропни елиптични задачи, виж [9] и [60]. Използването на SC процедурата на равномерно сгъстяване на мрежата води до получаването на първи многонивови алгоритми от оптимален ред за биквадратични и бикубични крайноелементни системи, произлизащи от съгласувани с мрежата дискретизации на елиптични задачи с ортотропна коефициентна матрица, виж [58] и [59] за детайли. В общата постановка на произволен елиптичен оператор обаче за квадратичните крайноелементни дискретизации стандартните техники, базирани на йерархичен базис, не водят до разделяния, при които ъгълът между грубото пространство и неговото йерархично допълнение е равномерно ограничен по отношение на мрежовата и/или коефициентната анизотропия, виж [35]. Директното прилагане на двунивов преобусловител, базиран на допълнението на Шур, както първоначално е предложено в [48], избягва използването на йерархичен базис, но както числените резултати в [33] демонстрират, това също не води до робастен многонивов алгоритъм. Това налага разработването на нова техника, наречена адитивна апроксимация на допълнението на Шур (additive Schur complement approximation или ASCA). Тя може да се разглежда като обобщение на метода, представен първоначално в [48] и по-късно също в [10, 64, 65], и доразвива идеята, предложена в [50, 51].

Представената ASCA техника за построяване на многонивови преобусловители на базата на пресмятането и асемблирането на точни допълнения на Шур на локални матрици (на коравина), асоциирани с покритие на цялата област с препокриващи

се подобласти, първоначално е развита за елиптични задачи със силно осцилиращи коефициенти, които са дискретизирани с линейни и билинейни конформни крайни елементи. Универсалната ѝ конструкция обаче предполага, че тя успешно може да бъде приложена за решаването на по-общи, например несиметрични и неопределени задачи, както и при по-общи дискретизационни техники като неконформни методи и елементи от по-висок ред.

Важно е да се отбележи, че многонивовите преобусловители, базирани на ASCA, са асемблирани от локални матрици, което предоставя възможности за ефективното им реализиране върху паралелни компютърни архитектури.

Трябва да подчертаем и факта, че многонивовите методи, използващи ASCA, имат структурни прилики с някои многомрежови методи, а именно с *element-based algebraic multigrid*, виж [25, 45], *algebraic multigrid based on computational molecules*, виж [49, 54], и *smoothed aggregation multigrid*, виж [70, 72].

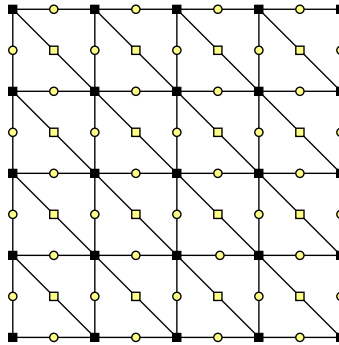
В заключение ще споменем, че предложеният алгоритъм за построяване на многонивови преобусловители има потенциал да бъде обобщен и в случая на силно анизотропни 3D елиптични задачи и неструктурирани мрежи.

4.2 Рекурсивно построени многонивови методи

4.2.1 Разширена груба мрежа

Нека допуснем, че имаме достъп до всички елементни матрици на коравина, съответстващи на по-фината мрежа, получена при равномерно съгъстяване на дадена по-груба триангулация. Асемблираната глобална матрица на коравина A_h е разредена и структурата на ненулевите елементи в нея (матрицата ѝ на свързаност) може да се асоциира с графа на A_h .

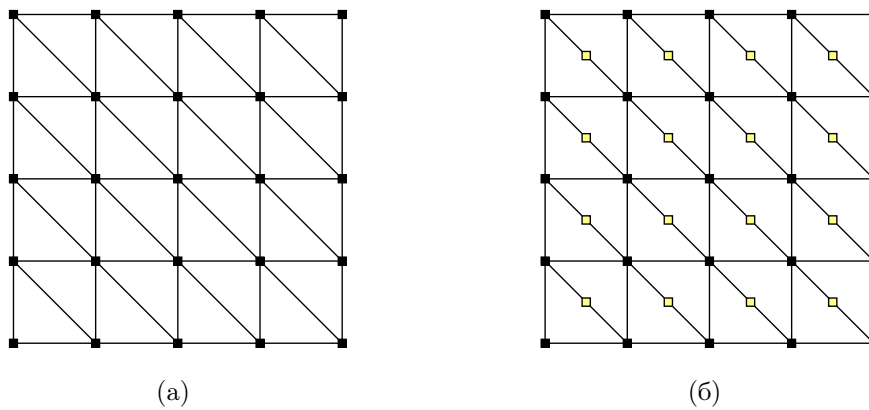
Нека да разделим възлите от фината мрежа на две групи, където първата група съдържа всички възли, които не принадлежат на по-грубата мрежа с размер $H = 2h$, докато втората съдържа възлите, които са общи за двете мрежи. Като елиминираме неизвестните, които отговарят на възлите от първата група от линейната система (1.1.11) (на Фиг. 4.1 те са означени с жълти квадратчета и кръгчета), получаваме редуцирана система с допълнението на Шур S_h , която е много по-плътна. В термините на теорията на графите това означава, че графът на S_h има много повече дъги



Фигура 4.1: Равномерна мрежа от конформни квадратични елементи

(връзки). Нека отбележим, че в случая на стандартно (пълно) съгъстяване той дори става пълен граф независимо от последователността на елиминиране на неизвестните. Това се дължи на факта, че тогава за всеки два възела от по-грубата мрежа съществува път в графа на A_h , състоящ се само от възли от първата група.

Целта е да се построи такава апроксимация Q_h на допълнението на Шур S_h , която е разрежена матрица с $\mathcal{O}(1)$ ненулеви елемента във всеки ред и в същото време е спектрално еквивалентна на S_h , т.е., $\kappa(Q_h^{-1}S_h) = \mathcal{O}(1)$ с горна граница на $\kappa(Q_h^{-1}S_h)$, независеща от анизотропията на коефициента $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ в (1.1.1).



Фигура 4.2: Стандартна (а) и разширена (б) груби мрежи

Интересна е връзката на така поставената задача с това, което в AMG методите определят като *силни връзки*, а именно: Силата на връзката между два възела i и j , или, еквивалентно, на съответните неизвестни u_i и u_j , е енергетичният косинус c_{ij}

на ъгъла между базисните функции ϕ_i и ϕ_j , който се дефинира с равенството

$$c_{ij} = \frac{|a_{ij}|}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}}, \quad (4.2.1)$$

където $A_e = \{a_{ij}\}$ е матрицата на коравина, съответстваща на e , виж [27]. Връзката (дъгата), представена от извъндиагоналните елементи a_{ij} и a_{ji} , се нарича силна, тогава и само тогава, когато $c_{ij} \geq \Theta$, където Θ е предварително избран параметър в интервала $(0, 1]$.

Друго определение на силни връзки, въведено първоначално в рамките на класическите AMG методи за M -матрици, виж например [31], гласи следното: За даден праг $0 < \Theta \leq 1$ казваме, че променливата u_i зависи силно от u_j тогава и само тогава, когато

$$-a_{ij} \geq \Theta \max_{i \neq k} \{-a_{ik}\}. \quad (4.2.2)$$

Нека отбележим, че структурата на ненулевите елементи в разредената матрица, представяща силните връзки в матрица на коравина, получена при крайноелементна дискретизация, пряко зависи от коефициентните матрици \mathbf{a}_e .

Забележка 4.2.1. *Класическите AMG методи, виж [69], са първоначално създадени за M -матрици. Ако матрицата на коравина не е M -матрица, е възможно да се използва спомагателна апроксимация, която е M -матрица, виж [34] и [55]. Такъв подход обаче е неприложим при крайноелементни дискретизации от по-висок ред на силно анизотропни задачи. Причината е, че съответните апроксимации с M -матрици не са робастни.*

Забележка 4.2.2. *В [52] е представено робастно двунивово разделяне на пространството от конформни на части квадратични функции за ортотропната елиптическа задача. Числените резултати в [35] показват, че за неортотропни задачи с "лека" анизотропия могат да се построят равномерни многонивови преобусловители на базата на йерархична декомпозиция. Това определя нашия интерес към по-детайлното изследване на крайноелементни матрици, произлизащи от силно анизотропни неортотропни задачи.*

Нека разгледаме структурата на ненулевите елементи в дадена разредена SPD матрица. За да изучим силните връзки в система с допълнението на Шур, определени като такива на базата на някоя от двете дефиниции (4.2.1) или (4.2.2), да

разгледаме структурната матрица, асемблирана от 8 елементни матрици на коравина, съответстващи на квадрат с дължина $2h$. Ще сравним две различни разделяния на множествата на степени на свобода на фини и груби степени на свобода. Първото разделяне води до стандартна груба мрежа с размер на мрежата $H = 2h$, виж Фиг. 4.2(а). Второто разделяне води до *разширена груба мрежа*, както е показано на Фиг. 4.2(б). Трябва да отбележим, че за да получим редуцирана система върху разширената груба мрежа (както е показано на Фиг. 4.2(б)) само неизвестните, които принадлежат на жълти кръгчета от Фиг. 4.1 се елиминират.

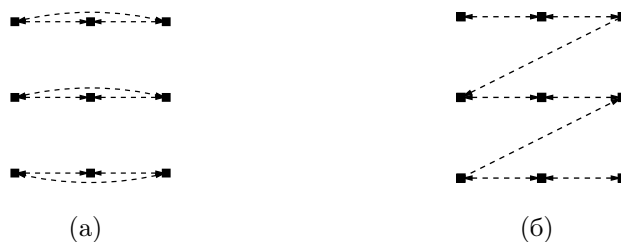
Коефициентът \mathbf{a}_e е тестван за силно анизотропна и неортотропна задача, т.е., $\mathbf{a}_{e:11} = 1$, $\mathbf{a}_{e:12} = \pm 0.009999$, и $\mathbf{a}_{e:22} = 0.0001$ в (1.1.14). Фигури 4.3(а)–4.5(б) показват силните връзки, които се появяват за праг $\Theta \in \{0.5, 0.25, 0.1\}$ за двете дефиниции, когато използваме стандартна груба мрежа. Двете дефиниции водят до доста различни (под)множества от силни връзки в този случай, като броят на силните връзки расте с намаляването на прага. Когато използваме разширена груба мрежа, класификацията на силни връзки е много по-устойчива по отношение на избора на праг, виж Фиг. 4.6(а)–4.6(б). Очевидно е също така, че за разлика от стандартната груба мрежа, при разширената груба мрежа всички силни връзки се появяват само върху хоризонтални линии и само между съседни възли, дори при много малък праг Θ .



Фигура 4.3: Силни връзки за $\mathbf{a}_{e:11} = 1$, $\mathbf{a}_{e:12} = \pm 0.009999$, $\mathbf{a}_{e:22} = 0.0001$ и $\Theta = 0.5$ за стандартна мрежа според (4.2.1) (а) и (4.2.2) (б).

Разширената груба мрежа дефинира подходящо подмножество от степени на свобода, и поради следната причина. Нека разгледаме пермутация на редовете и стълбовете на матрицата в (1.1.11), т.е.,

$$A_h = \begin{bmatrix} A_{h:11} & A_{h:12} \\ A_{h:21} & A_{h:22} \end{bmatrix},$$



Фигура 4.4: Силни връзки за $\mathbf{a}_{e:11} = 1$, $\mathbf{a}_{e:12} = \pm 0.009999$, $\mathbf{a}_{e:22} = 0.0001$ и $\Theta = 0.25$ за стандартна мрежа според (4.2.1) (а) и (4.2.2) (б).



Фигура 4.5: Силни връзки за $\mathbf{a}_{e:11} = 1$, $\mathbf{a}_{e:12} = \pm 0.009999$, $\mathbf{a}_{e:22} = 0.0001$ и $\Theta = 0.1$ за стандартна мрежа според (4.2.1) (а) и (4.2.2) (б).



Фигура 4.6: Силни връзки за $\mathbf{a}_{e:11} = 1$, $\mathbf{a}_{e:12} = \pm 0.009999$, $\mathbf{a}_{e:22} = 0.0001$ и $\Theta \in \{0.5, 0.25, 0.1\}$ за разширена мрежа според (4.2.1) (а) и (4.2.2) (б).

такава че $A_{h:22}$ съответства на грубите степени на свобода, т.е., степените на свобода, асоциирани с разширената груба мрежа. За удобство с A_h означаваме както пермутираната, така и оригиналната (непермутирана) матрица. Тогава фините степени на свобода, които съответстват на $A_{h:11}$, могат да се подредят лексикографски по направленията на диагоналите на първоначалната мрежа и така матрицата $A_{h:11}$ става тридиагонална, виж [13]. Следователно, директното решаване на всяка линейна система с $A_{h:11}$ има линейна (оптимална) сложност. Нека да отбележим също, че броят на степените на свобода, определени като фини и груби, е приблизително един и същ

при това разделяне.

Поставяме си задачата да построим оптимален двунивов преобусловител B_h :

$$B_h^{-1} := \begin{bmatrix} I & -A_{h:11}^{-1}A_{h:12} \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{h:11}^{-1} & \\ & Q_h^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ -A_{h:21}A_{h:11}^{-1} & I \end{bmatrix}, \quad (4.2.3)$$

т.е., B_h да бъде спектрално еквивалентен на A_h по отношение на размера на мрежата h и който и да е от параметрите, определящи $\mathbf{a}(\mathbf{x})$. Искаме също така всяко умножение на B_h^{-1} с произволен вектор \mathbf{v} да изисква $\mathcal{O}(N)$ аритметични операции. Блочната форма на B_h е в съответствие с разделянето на степените на свобода, свързващо грубите степени на свобода с разширената груба мрежа, виж Фиг. 4.2(б), а Q_h е апроксимацията на точното допълнение на Шур на A_h

$$S_h = A_{h:22} - A_{h:21}A_{h:11}^{-1}A_{h:12}. \quad (4.2.4)$$

За числото на обусловеност $\kappa(B_h^{-1}A_h)$ е в сила оценката, виж например [53],

$$\kappa(B_h^{-1}A_h) \leq \kappa(Q_h^{-1}S_h) \quad (4.2.5)$$

и следователно всяка спектрално еквивалентна апроксимация Q_h на S_h дефинира равномерен преобусловител B_h на A_h посредством (4.2.3).

Преобусловителят $B^{(0)}$, отнасящ се за нивото на фината крайноелементна мрежа с размер h , дефинираме като

$$B^{(0)} \approx A^{(0)} := A_h \quad (4.2.6)$$

където $B^{(0)} := B_h$ е дефиниран чрез (4.2.3). Нека отбележим, че (4.2.3) включва обратната матрица на апроксимацията на допълнението на Шур $Q^{(0)} := Q_h$, която се отнася за първата разширена (груба) мрежа. Това е отправна точка в построяването на редица от двунивови преобусловители $B^{(k)}$, дефинирани чрез

$$B^{(k)-1} = \begin{bmatrix} I & -B_{11}^{(k)-1}A_{12}^{(k)} \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)-1} & \\ & Q^{(k)-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ -A_{21}^{(k)}B_{11}^{(k)-1} & I \end{bmatrix}, \quad (4.2.7)$$

които ще апроксимират $A^{(k)}$ за всички $k = 1, 2, \dots, \ell$. Тук $A^{(k)}$ се идентифицира с апроксимацията на допълнението на Шур в $B^{(k-1)}$

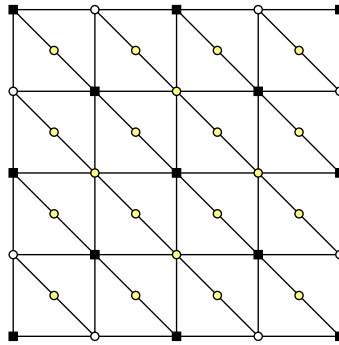
$$A^{(k)} := Q^{(k-1)} \quad \forall k \geq 1, \quad (4.2.8)$$

т.е. докато $Q^{(0)}$ е апроксимацията на допълнението на Шур в (4.2.3), матрицата $Q^{(k)}$ за $1 \leq k \leq \ell$ означава градивен блок на двунивовия преобусловител (4.2.7).

Когато представяме двунивовите матрици $A^{(k)}$ и $B^{(k)-1}$ (или техни производни матрици) в две на две блочна форма, винаги ще считаме, че редовете и стълбовете на тези матрици са били пренаредени в съответствие с разделяне на множеството $\mathcal{D}^{(k)}$ от всички степени на свобода на множество $\mathcal{D}_f^{(k)}$ от фини възли и множество $\mathcal{D}_c^{(k)}$ от груби възли, т.е.,

$$\mathcal{D}^{(k)} = \mathcal{D}_f^{(k)} \oplus \mathcal{D}_c^{(k)}.$$

Фигура 4.7 илюстрира двунивовото разделяне на възлите на първата разширена мрежа, което поражда съответното двунивово разделяне на $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$ (съответно $(B^{(1)})^{-1}$). Грубите степени на свобода, които съответстват на разширената груба мрежа, са означени с черни квадратчета.



Фигура 4.7: Двунивово разделяне на възлите от разширена мрежа

Използвайки двунивовото номериране на $\mathcal{D}^{(k)}$, което изпълнява изискването за последователно номериране в множествата $\mathcal{D}_f^{(k)}$ и $\mathcal{D}_c^{(k)}$, определящи първия и втория блок неизвестни, можем да приложим същата конструкция рекурсивно върху следващата (по-)груба мрежа, асоциирана с апроксимацията на допълнението на Шур $Q^{(k)}$.

4.2.2 Апроксимация на допълнението на Шур

Преди да представим алгоритъм за построяването на $Q^{(k)}$ за всички $k = 0, 1, 2, \dots, \ell$, ще въведем някои означения, [50]. Нека $H_A = (V_A, E_A)$ е неориентираният граф, който се асоциира със симетричната матрица $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, където $V_A := \{v_i : 1 \leq i \leq N\}$

означава множеството от върхове на графа (които в настоящия контекст са еквивалентни на възли) и $E_A := \{e_{ij} : 1 \leq i < j \leq N \text{ и } a_{ij} \neq 0\}$ е множеството от дъги на графа.

Дефиниция 4.2.1. Всеки подграф F на H_A ще наричаме структура. С \mathcal{F} ще означаваме множеството от структури, чиито съответни (локални) структурни матрици A_F удовлетворяват свойството

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} R_F^T A_F R_F = A. \quad (4.2.9)$$

Операторът на рестрикцията R_F (или R_G по-долу) изобразява глобален вектор (дефиниран върху H_A) върху дадена структура F (или макроструктура G).

Дефиниция 4.2.2. Макроструктура G е обединение от структури $F \in \mathcal{F}$. Множеството от макроструктури има вида $\mathcal{G} := \{G = G_i : i = 1, 2, \dots, n_G\}$. Ще считаме, че всяко подмножество от асоциирани макроструктурни матрици $\mathcal{A}_G = \{A_G : G \in \mathcal{G}\}$ удовлетворява асемблиращото свойство

$$\sum_{G \in \mathcal{G}} R_G^T A_G R_G = A. \quad (4.2.10)$$

Например, всяка структура F може да съдържа единствен елемент $e \in \mathcal{T}$, или, множество от елементи, и съответните структурни матрици A_F могат да бъдат съставени от съответните елементни матрици A_e . Освен това, ще предполагаме, че структурите и макроструктурите са вложени. Това означава, че за всяка структура $F \in \mathcal{F}$ съществува макроструктура $G \in \mathcal{G}$, такава че $F \subset G$. Така от (4.2.9) и (4.2.10) следва, че A_G може да се запише във вида

$$A_G = \sum_{F \subset G} \sigma_{F,G} R_{G \rightarrow F}^T A_F R_{G \rightarrow F} \quad (4.2.11)$$

където $\sigma_{F,G}$ са скалиращи коефициенти, такива че

$$\sum_{G \supset F} \sigma_{F,G} = 1 \quad \forall F \in \mathcal{F}. \quad (4.2.12)$$

Забележка 4.2.3. Един прост избор на множество от скалиращи коефициенти, които удовлетворяват условието (4.2.12), използван по-късно при числените експерименти, е да изберем $\sigma_{F,G} = \sigma_{F,G'}$ винаги, когато $F \subset G$ и $F \subset G'$, и да определим $\sigma_{F,G}$ според формулата

$$\sigma_{F,G} = \frac{1}{\sum_{G \supset F} 1}. \quad (4.2.13)$$

Тъй като тогава $\sigma_{F,G}$ зависи само от броя на макроструктурите, които съдържат F , но не и от конкретното G , теглата на структурите също ще бъдат означавани с σ_F в този случай.

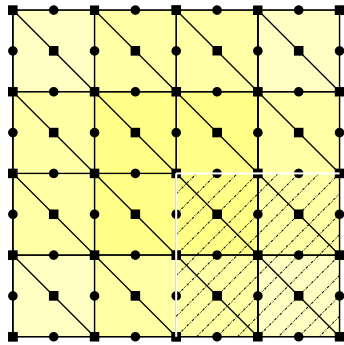
Дефиниция 4.2.3. Ако сечението на две различни структури (или макроструктури) е празно, т.е., $F_i \cap F_j = \emptyset$ (или $G_i \cap G_j = \emptyset$) за всички $i \neq j$, ще наричаме множеството \mathcal{F} (или \mathcal{G}) *непрепокриващо се покритие*; в противен случай ще наричаме \mathcal{F} (или \mathcal{G}) *препокриващо се покритие*.

Алгоритъм

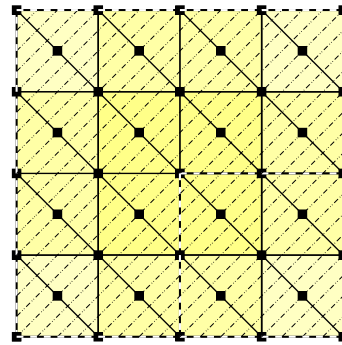
След като сме въвели съответните означения, ще представим описание на алгоритъма за пресмятането на $Q^{(k)}$, $0 \leq k \leq \ell$.

I. Апроксимация на $Q^{(0)}$:

Нека разгледаме множество от структури $\mathcal{F}^{(0)} = \{F\}$, осигуряващо непрепокриващо се покритие на началния граф $H^{(0)} = H_A$. Всяка структура F е подграф на $H^{(0)}$, т.е., подграфът, състоящ се от 8 квадратични конформни елемента e , образуващи квадрат, виж Фиг. 4.8(а). Тук препокриваме структурите с половината от тяхната ширина или дължина. Сега вече можем да приложим следния алгоритъм:



(а) Девет непрепокриващи се структури, използвани в пресмятането на $Q^{(0)}$



(б) Една макроструктура G_i , използвана в пресмятането на $Q^{(k)}$, $k \geq 1$; G_i е съставена от 9 непрепокриващи се структури

Фигура 4.8: Покрития на оригиналната мрежа (а) и разширената (груба) мрежа (б).

1. За всяка $F \in \mathcal{F}^{(0)}$ асемблираме структурните матрици A_F и разделяме техните степени на свобода на две групи в съответствие с двунивовото разделяне на неизвестните в глобалната система.
2. Поради въведеното разделяне на възлите за $\forall F \in \mathcal{F}^{(0)}$ пресмятаме

$$S_F = A_{F:22} - A_{F:21}A_{F:11}^{-1}A_{F:12}. \quad (4.2.14)$$

3. Глобална апроксимация $Q^{(0)}$ на точното допълнение на Шур $S^{(0)}$ върху първата разширена (груба) мрежа се асемблира от матриците S_F

$$Q^{(0)} := S_{\mathcal{F}^{(0)}} := \sum_{F \in \mathcal{F}^{(0)}} R_{F:2}^T S_F R_{F:2}. \quad (4.2.15)$$

II. Апроксимация на $Q^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, \ell$:

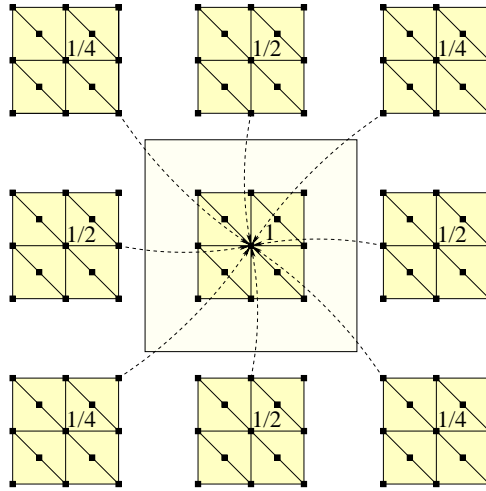
Нека $H^{(k)}$ е графът на апроксимацията $Q^{(k-1)}$ и нека $\mathcal{F}^{(k)}$ и $\mathcal{G}^{(k)}$ са съответно препокриващи се покрития на $H^{(k)}$ от структури и макроструктури. Нека разгледаме по-конкретно примера, в който всяка макроструктура $G \in \mathcal{G}^{(k)}$ се състои от девет 13-възлови структури $F \in \mathcal{F}^{(k)}$, които се препокриват с половината от тяхната ширина или дължина, както е показано на Фиг. 4.8(б). Тогава прилагаме следния алгоритъм:

1. За всички $G \in \mathcal{G}^{(k)}$ асемблираме макроструктурните матрици A_G според (4.2.11), използвайки теглата (4.2.13), така че (4.2.12) да бъде удовлетворено, виж Фиг. 4.9.
2. За всяка A_G прилагаме пермутация на редовете и стълбовете в съответствие с глобалното двунивово разделяне на степените на свобода и пресмятаме допълнението на Шур

$$S_G = A_{G:22} - A_{G:21}A_{G:11}^{-1}A_{G:12}. \quad (4.2.16)$$

3. Асемблираме разредена апроксимация $Q^{(k)} := S_{\mathcal{G}^{(k)}}$ на точното глобално допълнение на Шур $S^{(k)} = A_{22}^{(k)} - A_{21}^{(k)}(A_{11}^{(k)})^{-1}A_{12}^{(k)}$ от локалните макроструктурни допълнения на Шур, т.е.,

$$Q^{(k)} := S_{\mathcal{G}^{(k)}} = \sum_{G \in \mathcal{G}^{(k)}} R_{G:2}^T S_G R_{G:2}. \quad (4.2.17)$$



Фигура 4.9: Разпределение на теглата за изцяло вътрешна макроструктура, съставена от 9 препокриващи се структури.

4.3 Анализ на оператора на изглаждане

Нека разгледаме апроксимацията $Q = Q^{(0)}$, където възлите (и съответните степени на свобода) в съответната разширена груба мрежа са подредени лексикографски по хоризонталните линии. Освен това нека D е матрицата на блокния Якоби оператор на изглаждане, където $Q = D + L + L^T$, т.е., D и L означават съответно блокните диагонална и строго долнотриъгълна част на Q . Всеки от блоковете на D отговаря на група от възли, лежащи на една от хоризонталните линии в мрежата. В разширената груба мрежа има два типа такива блокове: първият се асоциира с хоризонтални линии, минаващи през възлите в стандартната груба мрежа, илюстрирани с черни квадратчета на Фиг. 4.2(б), а вторият се асоциира с добавените възли от разширената мрежа, виж жълтите квадратчета на Фиг. 4.2(б).

Операторът на изглаждане е анализиран за задачата (1.1.1) с елементна коэфичиентна матрица \mathbf{a}_e , в която без загуба на общността сме положили $\mathbf{a}_{e:11} = 1$, $\mathbf{a}_{e:12} = \varsigma$ и $\mathbf{a}_{e:22} = \zeta$. Следващата лема има важна роля в анализа на предложения метод.

Лема 4.3.1. *За моделната задача (1.1.1) с гранични условия на Дирихле и дискретизация върху равномерна мрежа със стъпка на мрежата h съществуват положителни константи c_L и c_D , такива че следните оценки са в сила:*

$$(a) \quad \|L + L^T\| \leq c_L(\zeta + |\varsigma|)$$

$$(b) \quad \lambda_{\min}(D) \geq c_D h^2$$

Доказателство: От (4.2.15) следва, че елементите l_{ij} на $(L + L^T)$ са асемблирани от елементите на матриците S_F от (4.2.14), за които съответните елементи от $A_{F:22}$ принадлежат на множеството $\{\varsigma/3, -\varsigma/12, (\zeta + \varsigma)/12, (\zeta + \varsigma)/24\}$. Оставащите матрици в (4.2.14) могат да се представят във вида

$$\begin{aligned} & A_{F:21} A_{F:11}^{-1} A_{F:12} = \\ & = (A_{F:21;0} + A_{F:21;\zeta} + A_{F:21;\varsigma})(A_{F:11;0}^{-1} + A_{F:11;\zeta}^{-1} + A_{F:11;\varsigma}^{-1} + A_{F:11;\zeta\varsigma}^{-1})(A_{F:12;0} + \\ & \quad + A_{F:12;\zeta} + A_{F:12;\varsigma}), \end{aligned}$$

където $A_{F:21;0}$, $A_{F:11;0}^{-1}$, $A_{F:12;0}$ не зависят от никакви параметри, докато $A_{F:21;\zeta}$, $A_{F:11;\zeta}^{-1}$, $A_{F:12;\zeta}$, $A_{F:21;\varsigma}$, $A_{F:11;\varsigma}^{-1}$, $A_{F:12;\varsigma}$ и $A_{F:11;\zeta\varsigma}^{-1}$, както долните им индекси подсказват, имат елементи само от ред ζ , ς и $\zeta\varsigma$. Следователно елементите на $A_{F:21} A_{F:11}^{-1} A_{F:12}$, които не са ограничени по модул от израз от вида $c_l(\zeta + |\varsigma|)$, където положителната константа c_l не зависи нито от ζ , нито от ς , са резултат от произведението $A_{F:21;0} A_{F:11;0}^{-1} A_{F:12;0}$. Последното обаче е различно от нула само на позиции, които нямат принос към $(L + L^T)$. Следователно $|l_{ij}| \leq c_{l_{ij}}(\zeta + |\varsigma|)$, където положителните константи $c_{l_{ij}}$ не зависят от ζ и ς .

Тогава от теоремата на Гершгорин, виж например [36], следва, че собствените стойности на симетричната матрица $(L + L^T)$ лежат в кръгове с център в координатното начало и радиуси $\sum_j c_{l_{ij}}(\zeta + |\varsigma|) \leq c_L \zeta$, където $c_L := \max_i \{\sum_j c_{l_{ij}}\}$, което доказва твърдение (a) на Лема 4.3.1.

За да докажем твърдение (b) на лемата, разглеждаме диагоналните блокове D_i на D . Поради използването на разширена груба мрежа всеки блок D_i , получен при асемблирането (4.2.15), е тридиагонален и за моделната задача с константни коефициенти поради наложените условия на Дирихле има седем възможни случая, т.е., $D_i \in \{T_1, T_2, \dots, T_7\}$. Без загуба на общността с тип 1 ще означаваме матриците T_4 , T_5 , T_6 и T_7 , които отговарят на хоризонтални линии от стандартната груба мрежа, а с тип 2 матриците T_1 , T_2 , и T_3 , които съответстват на хоризонтални линии, минаващи през възли, които увеличават стандартната груба мрежа. Тогава достатъчно е да покажем, че

$$\lambda_{\min}(T_i) \geq c_{T_i} h^2, \quad i \in \{1, \dots, 7\}, \quad (4.3.18)$$

от което следва, че (4.3.1) е изпълнено за $c_D := \min_{1 \leq i \leq 7} c_{T_i}$.

Ако T_7 е матрицата, асоциирана с възлите, лежащи по границата (на върха или на дъното на областта), поради граничните условия на Дирихле, имаме $T_7 = I_{(N+1) \times (N+1)}$ и (4.3.18) е изпълнено за T_7 . Нека $M_N = \text{tridiag}(-1/6, 1/3, -1/6)$ е тридиагоналната матрица с размер N , отговаряща на едномерния скалиран оператор на Лаплас с гранични условия на Дирихле. Тогава останалите шест матрици, чиито елементи зависят от ζ и ς , могат да се запишат като

$$T_i = C_i + E_i, \quad (4.3.19)$$

където $C_1 = C_2 = C_3 = M_N$ докато

$$C_4 = C_5 = C_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и следователно минималната собствена стойност на C_i , $i = 1, \dots, 6$ е ограничена отдолу с $\lambda_{\min}(C_4) > h^2\pi^2/24$, където $h = 1/N$.

Използвайки разделянето (4.3.19) остатъчните матрици E_i , $i = 1, \dots, 6$ са SPSD и диагонално доминантни, когато $\zeta \in (0, 1]$, $\varsigma \in (-\sqrt{\zeta}, \sqrt{\zeta})$ и от теоремата на Гершгорин заключаваме, че $E_i \geq 0$ (в смисъла на SPSD матрица). Това, комбинирано с предходния резултат, завършва доказателството. ■

Лема 4.3.2. Нека $c < c_D/c_L$ и $\zeta + |\varsigma| \leq (c_D/c_L - c)h^2$. Тогава е в сила следното неравенство

$$\left(1 + \frac{\zeta + |\varsigma|}{ch^2}\right)(L + L^T) + \frac{\zeta + |\varsigma|}{ch^2}D \geq 0. \quad (4.3.20)$$

Доказателство: Следващото неравенство следва от Лема 4.3.1

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\zeta + |\varsigma|}{ch^2}\right)(L + L^T) + \frac{\zeta + |\varsigma|}{ch^2}D &\geq -\left(1 + \frac{\zeta + |\varsigma|}{ch^2}\right)c_L(\zeta + |\varsigma|)I + \frac{\zeta + |\varsigma|}{ch^2}c_Dh^2I = \\ &= (\zeta + |\varsigma|)\left(\frac{c_D}{c} - \frac{c_L(ch^2 + \zeta + |\varsigma|)}{ch^2}\right)I \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

където I означава единичната матрица. Дясната част на (4.3.21) е SPSD матрица тогава и само тогава, когато

$$c_D \geq \frac{c_L(ch^2 + \zeta + |\varsigma|)}{h^2},$$

което е еквивалентно на

$$c \leq \frac{c_D}{c_L} - \frac{\zeta + |\varsigma|}{h^2}.$$

В заключение, при $c < c_D/c_L$, това условие е изпълнено за $\zeta + |\varsigma| \leq (c_D/c_L - c)h^2$, с което (4.3.20) е доказано. ■

С помощта на горните две лема ще докажем следващата теорема.

Теорема 4.3.1. *Нека разгледаме елиптичната моделна задача с гранични условия на Дирихле, дискретизирана върху равномерна мрежа със стъпка h . Нека с $Q = Q^{(0)} = D + L + L^T$ да е означена съответната адитивна апроксимация на допълнението на Шур, където D е блочно диагоналната, а L - долно блочно диагонална част на Q . Тук всеки блок на D отговаря на възлите, разположени върху хоризонтална линия в разширената груба мрежа. Тогава итерационната матрица на блочния метод на Якоби удовлетворява оценката*

$$\|I - D^{-1}Q\|_Q^2 \leq 1 - \frac{1}{1 + c_0} =: 1 - c_1 \quad (4.3.22)$$

където $c_0 := (\zeta + |\varsigma|)/(ch^2)$ и следователно c_1 е в интервала $(0, 1)$.

Доказателство: Първо, да отбележим, че

$$\|I - D^{-1}Q\|_Q^2 = \sup_{\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{\langle (I - D^{-1}Q)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = 1 - \inf_{\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{\langle D^{-1}Q\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = 1 - \mu_{\min}$$

където с μ_{\min} е означена най-малката собствена стойност на обобщената спектрална задача $Q\mathbf{v} = \mu D\mathbf{v}$. Следователно, ако $c_1 := 1/(1 + c_0) := 1/(1 + \zeta/(ch^2))$ е долна граница за μ_{\min} , неравенство (4.3.22) ще бъде в сила.

За да докажем това, ще покажем, че

$$Q - c_1 D = (L + L^T) + (1 - c_1)D \geq 0,$$

което е еквивалентно на

$$(1 + c_0)(L + L^T) + c_0 D \geq 0. \quad (4.3.23)$$

Нека $c_0 := (\zeta + |\varsigma|)/(ch^2)$, където $c > 0$ удовлетворява неравенството $c < c_D/c_L$. Тук c_L и c_D са константите от Лема 4.3.1. Тогава от Лема 4.3.2 следва, че (4.3.23) е изпълнено за $\zeta + |\varsigma| \leq \eta$, където η се дефинира като $\eta := (c_D/c_L - c)h^2$. От друга страна, ако $\zeta + |\varsigma| > \eta$, можем да запишем равенството $\zeta + |\varsigma| = \zeta_0 + |\varsigma_0| + (\zeta + |\varsigma| - \zeta_0 - |\varsigma_0|)$, където $0 < \zeta_0 + |\varsigma_0| \leq \eta$ и $(\zeta + |\varsigma| - \zeta_0 - |\varsigma_0|) > 0$. Взимайки предвид (4.3.20), получаваме оценката

$$\left(1 + \frac{\zeta_0 + |\varsigma_0|}{ch^2}\right)(L + L^T) + \frac{\zeta_0 + |\varsigma_0|}{ch^2}D \geq 0$$

и тъй като $Q \geq 0$,

$$\left(1 + \frac{\zeta + |\varsigma|}{ch^2}\right)(L + L^T) + \frac{\zeta + |\varsigma|}{ch^2}D = \left(1 + \frac{\zeta_0 + |\varsigma_0|}{ch^2}\right)(L + L^T) + \frac{\zeta_0 + |\varsigma_0|}{ch^2}D + \frac{\zeta + |\varsigma| - \zeta_0 - |\varsigma_0|}{ch^2}Q \geq 0,$$

с което доказателството на Теорема 4.3.1 е завършено. \blacksquare

Забележка 4.3.1. За $\zeta + |\varsigma| \leq \eta = (c_D/c_L - c)h^2$ получаваме $c_0 = (\zeta + |\varsigma|)/(ch^2) \leq c_D/(c_Lc) - 1$ и следователно $1 - c_1 = 1 - 1/(1 + c_0) \leq 1 - (c_Lc)/c_D$, където участващите константи не зависят от ζ и ς и следователно блочният метод на Якоби има равномерна сходимост за $\zeta \in (0, \eta]$, $\varsigma \in (-\sqrt{\bar{c}}, \sqrt{\bar{c}})$.

Блочният метод на Гаус-Зайдел дефинира сходящ преобусловител за всяка SPD матрица. В контекста на изследванията в настоящата дисертация, той може да се използва в качеството на алтернативен оператор на изглаждане. Известно е, ([41]), че за SPD матрици и в случая на сходимост на (блочния) метод на Якоби редът на сходимост на блочния метод на Гаус-Зайдел не може да бъде по-лош. Това води до следното заключение.

Следствие 4.3.2. В случай, че са изпълнени условията на Теорема 4.3.1, итерационната матрица на блочния Гаус-Зайдел метод удовлетворява оценката

$$\|I - (D + L)^{-1}Q\|_Q^2 \leq 1 - \frac{1}{1 + (\zeta + |\varsigma|)/(\bar{c}h^2)}, \quad (4.3.24)$$

където \bar{c} е положителна константа, която не зависи от ζ , ς и h .

4.4 Двунивов анализ

За изглаждащия оператор получихме оценка във вида

$$\|I - (M^{(1)})^{-1}A^{(1)}\|_{A^{(1)}}^2 \leq 1 - \frac{1}{1 + \xi} = \frac{\xi}{1 + \xi}, \quad (4.4.25)$$

където $M^{(1)}$ означава блочната Якоби (или Гаус-Зайдел) матрица на изглаждане за $A^{(1)} = Q^{(0)}$, а $\xi = c(\zeta + |\varsigma|)/(h^2)$, където c е положителна константа. За удобство ще изпускаме индекса на нивото, имайки предвид, че методите и оценките, които изследваме, ще бъдат прилагани рекурсивно (на всички нива $k = 1, 2, \dots, \ell$), т.е. ще записваме $A = A^{(1)}$ и $M = M^{(1)}$.

Искаме да оценим нормата на матрицата на разпространение на грешката

$$E_{\text{TL}} = I - B_{\text{TL}}^{-1}A \quad (4.4.26)$$

на двунивов метод, получен за конкретния избор $B = B_{\text{TL}}$ в стационарния итеративен метод

$$\mathbf{x}_{(i+1)} = \mathbf{x}_{(i)} + B\mathbf{r}_{(i)} = \mathbf{x}_{(i)} + B(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.4.27)$$

Тук \mathbf{b} означава зададената дясна част, $\mathbf{x}_{(i)}$ - i -тата итерация, а $\mathbf{r}_{(i)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_{(i)}$ - i -ят резидуал. Двунивовият преобусловител $B = B_{\text{TL}}$ се дефинира с равенството

$$B_{\text{TL}} = \begin{bmatrix} I & \\ A_{21}B_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & \\ & \tilde{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B_{11}^{-1}A_{12} \\ & I \end{bmatrix}, \quad (4.4.28)$$

виж (4.2.7), където \tilde{Q} е преобусловител за $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, удовлетворяващ условието

$$S \leq \tilde{Q} \leq \frac{1}{\alpha}S \quad (4.4.29)$$

за положителна константа α . По-късно ще докажем неравенствата

$$\alpha S \leq Q \leq S \quad (4.4.30)$$

за адитивната апроксимация на допълнението на Шур Q , описана по-рано, от което следва, че в (4.4.28) може да се използва скалираната матрица

$$\tilde{Q} := \frac{1}{\alpha}Q \quad (4.4.31)$$

и така да се удовлетвори (4.4.29). Нека разгледаме двунивовия метод (4.4.27)–(4.4.28) за $B_{11} = A_{11}$, в който преобусловителят (4.4.28) е означен с \bar{B}_{TL} . Ако приемем, че (4.4.30) е изпълнено, използвайки (4.4.31), веднага се вижда, че

$$\frac{1}{\alpha}A - \bar{B}_{\text{TL}} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{\alpha} - 1)A_{11} & (\frac{1}{\alpha} - 1)A_{12} \\ (\frac{1}{\alpha} - 1)A_{21} & \frac{1}{\alpha}S - \tilde{Q} + (\frac{1}{\alpha} - 1)A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \geq 0$$

и следователно

$$A \leq \bar{B}_{\text{TL}} \leq \frac{1}{\alpha}A. \quad (4.4.32)$$

Достатъчно условие за стационарния итеративен метод (4.4.27) да бъде сходящ е и матриците A и B да бъдат SPD и да удовлетворяват неравенството $B > (1/2)A$.

По-силното допускане (4.4.32) може да бъде използвано, за да се оцени нормата на оператора (4.4.26), както следва: от (4.4.32) получаваме неравенството

$$\bar{B}_{\text{TL}}^{-1/2} A \bar{B}_{\text{TL}}^{-1/2} \leq I,$$

от което следва, че

$$\begin{aligned} \langle \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \mathbf{v}, \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \mathbf{v} \rangle_A - \langle \mathbf{v}, \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \mathbf{v} \rangle_A &= \langle (\bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A - I) \mathbf{v}, \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \mathbf{v} \rangle_A \\ &= \langle (A \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A - A \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A) \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} \|(I - \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A) \mathbf{v}\|_A^2 &= \|\mathbf{v}\|_A^2 - \langle \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_A - \langle \mathbf{v}, \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \mathbf{v} \rangle_A + \langle \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \mathbf{v}, \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \mathbf{v} \rangle_A \\ &\leq \|\mathbf{v}\|_A^2 - \langle \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_A, \end{aligned}$$

откъдето следва

$$\begin{aligned} \|I - \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A\|_A^2 &\leq \inf_{\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{v}\|_A^2 - \langle \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_A}{\|\mathbf{v}\|_A^2} \leq 1 - \inf_{\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{\langle \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \quad (4.4.33) \\ &\leq 1 - \lambda_{\min}(\bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A) \leq 1 - \lambda_{\min}(\tilde{Q}^{-1} S) = 1 - \alpha \lambda_{\min}(Q^{-1} S) \leq 1 - \alpha. \end{aligned}$$

От (4.4.33) се вижда, че за да оценим нормата на

$$\bar{E}_{\text{TL}} = I - \bar{B}_{\text{TL}}^{-1} A,$$

константата α в (4.4.30) трябва да се оцени отдолу. Горната граница в (4.4.30) е използвана за получаването на (4.4.32). Нека разгледаме спектралната еквивалентност между S и неговата апроксимация Q . Горната граница в (4.4.30) следва от добре известното минимизационно свойство на допълненията на Шур, т.е.,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2^T Q \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_2^T \left(\sum_{G \in \mathcal{G}} R_{G:2}^T S_G R_{G:2} \right) \mathbf{v}_2 = \sum_{G \in \mathcal{G}} \mathbf{v}_{G:2}^T S_G \mathbf{v}_{G:2} \\ &= \sum_{G \in \mathcal{G}} \min_{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{G:1} \\ \mathbf{v}_{G:2} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{G:1} \\ \mathbf{v}_{G:2} \end{bmatrix}^T A_G \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{G:1} \\ \mathbf{v}_{G:2} \end{bmatrix} = \sum_{G \in \mathcal{G}} \min_{\mathbf{v}_1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}^T R_G^T A_G R_G \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \\ &\leq \min_{\mathbf{v}_1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}^T \left(\sum_{G \in \mathcal{G}} R_G^T A_G R_G \right) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \min_{\mathbf{v}_1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_2^T S \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Долна граница за α може да се получи с помощта на локален анализ. Отправна точка е конструкцията на матрицата

$$C = \sum_{G \in \mathcal{G}} R_G^T C_G R_G, \quad (4.4.34)$$

която е спектрално еквивалентна на A и освен това позволява съгласувана двунивова трансформация по отношение на множеството от макроструктурни матрици \mathcal{A}_G , т.е.,

$$\widehat{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & \widehat{C}_{12} \\ \widehat{C}_{21} & \widehat{C}_{22} \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} J, \quad (4.4.35)$$

където J има вида

$$J = \begin{bmatrix} I & W \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.4.36)$$

Базисната трансформация (4.4.35) се нарича съгласувана, ако

$$\widehat{C}_{22} = \widehat{C}_{22}(W) = [W^T, I] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ I \end{bmatrix} = \sum_{G \in \mathcal{G}} R_{G:2}^T \widehat{C}_{G:22} R_{G:2}$$

и

$$\widehat{C}_{G:22} = \widehat{C}_{G:22}(W_G) = [W_G^T, I_G] \begin{bmatrix} C_{G:11} & C_{G:12} \\ C_{G:21} & C_{G:22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_G \\ I_G \end{bmatrix}$$

където $W_G = W|_G := R_{G:1} W R_{G:2}^T$ е рестрикцията на W върху G за всички $G \in \mathcal{G}$, виж [50]. Тук $R_{G:1}$ и $R_{G:2}$ са получени от R_G чрез премахването на всички негови редове и стълбове, съответстващи на грубите степени на свобода (за $R_{G:1}$) и фините степени на свобода (за $R_{G:2}$). Поради препокриването на макроструктурите G , определени редове и стълбове на C_G могат да изчезнат, докато C и A остават спектрално еквивалентни. Тук всяка матрица C_G е получена чрез елиминирането в съответната матрица A_G на фините степени на свобода за гранични възли на G и поставянето на стълб и ред от нули за всички фини степени на свобода. С празни кръгчета на Фиг. 4.7 са изобразени 8 фини степени на свобода, за които прилагаме тази стъпка на елиминация.

Нека отбележим, че препокриващите се макроструктури са построени от препокриващи се структури рекурсивно (по същия начин). Следователно е възможно да се използват теглата $\sigma_{F_G^{(p)}}$ за $F_G^{(p)} \subset G$, $p = 1, 2, \dots, 9$ както е показано на Фиг. 4.9 и в съответствие със Забележка 4.2.3, т.е.,

$$(\sigma_{F_G^{(1)}}, \sigma_{F_G^{(2)}}, \dots, \sigma_{F_G^{(9)}}) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) \quad (4.4.37)$$

които са дефинирани сега за макроструктурата G и нейните осем съседа G' , които имат ненулево сечение с G , състоящо се от поне една структура. Теглото за G се дефинира от $\sigma_G := \sigma_{F_G^{(5)}}$, където $F_G^{(5)}$ е структурата в центъра на G . Също така,

$\sigma_{F_G^{(1)}}, \sigma_{F_G^{(3)}}, \sigma_{F_G^{(7)}}, \sigma_{F_G^{(9)}}$ дефинират теглата за съседите G' по посоките юг-запад, юг-изток, север-запад, и север-изток (които имат ненулево сечение с G , състоящо се от една структура). И накрая, $\sigma_{F_G^{(2)}}, \sigma_{F_G^{(4)}}, \sigma_{F_G^{(6)}}, \sigma_{F_G^{(8)}}$ дефинират теглата за съседите G' на юг, запад, изток и север съответно (които имат ненулево сечение с G , състоящо се от 3 структури). Тогава, означавайки с s решението на уравнението

$$1s + 4\frac{1}{2}s + 4\frac{1}{4}s = 1,$$

получаваме

$$sC' := s \sum_{G \in \mathcal{G}} \left(\sum_{G': \exists F \in G \cap G'} \sigma_{G'} C_{G'} \right) = s \sum_{G \in \mathcal{G}} C'_G \leq C,$$

където $G' = G$ се появява и във втората сума. Тогава от условието

$$\beta A \leq sC' \tag{4.4.38}$$

следва, че $\beta A \leq C$ и тъй като $C_G \leq A_G$ за всички $G \in \mathcal{G}$, получаваме

$$\beta A \leq C \leq A. \tag{4.4.39}$$

Нека отбележим, че константа β , удовлетворяваща (4.4.38), може да бъде определена от решаването на локалните задачи за собствени стойности

$$\frac{1}{s} A'_G \mathbf{v}_G = \lambda_G C'_G \mathbf{v}_G$$

и след това полагайки $\beta := 1/\max_G \{\lambda_{G:\max}\}$. Тук $A'_G = R_{\mathcal{D}(C'_G) \rightarrow G}^T A_G R_{\mathcal{D}(C'_G) \rightarrow G}$. След това от (4.4.39) следва, че

$$\beta S_A \leq S_C, \tag{4.4.40}$$

където $S_A = S$ и S_C означават съответните глобални допълнения на Шур на A и C . Накрая трябва да построим съгласувана базисна трансформация за C . Проблемът е как да се дефинират интерполационните тегла в подматрицата W в (4.4.36) по такъв начин, че всички фини степени на свобода в сечението на две макроструктури G и G' да се интерполират само от грубите степени на свобода в същото сечение. Коефициентите в W , съответстващи на вътрешните фини степени на свобода от $F_G^{(1)}, F_G^{(3)}, F_G^{(7)}$ и $F_G^{(9)}$, могат да се определят от минимизирането на енергията за локалните матрици $A_{F_G^{(1)}}, A_{F_G^{(3)}}, A_{F_G^{(7)}}$, и $A_{F_G^{(9)}}$. Оставащите четири фини степени на свобода на G могат да бъдат интерполирани по същия начин от грубите степени

на свобода на $F_G^{(2)}$, $F_G^{(4)}$, $F_G^{(6)}$ и $F_G^{(8)}$. Тогава лесно може да се види, че за двунивовото разделяне, свързано с трансформацията (4.4.35), е в сила оценката

$$S_C \leq \widehat{C}_{22}. \quad (4.4.41)$$

Освен това, използвайки локалната съвместимост на трансформацията (4.4.35), основна връзка между произволна йерархична матрица от грубата мрежа и допълнението на Шур, което включва константата γ в КБШ неравенството, както и факта, че $C_G \leq A_G$ и следователно $S_{C_G} \leq S_{A_G} = S_G$, можем да заключим, че

$$\widehat{C}_{22} = \sum_G \widehat{C}_{G:22} \leq \sum_G \frac{1}{1 - \gamma_G^2} S_{C_G} \leq \frac{1}{1 - (\max_G \{\gamma_G\})^2} \sum_G S_{A_G} = \frac{1}{1 - \gamma_{\max}^2} Q,$$

където $\gamma_{\max} = \max_G \{\gamma_G\}$ означава максимумът на локалните (макроструктурни) константи на КБШ. Комбинирайки последното с (4.4.40) получаваме

$$\beta(1 - \gamma_{\max}^2) S_A \leq Q \quad (4.4.42)$$

и следователно средство за оценяване локално на константата α в (4.4.33), т.е.,

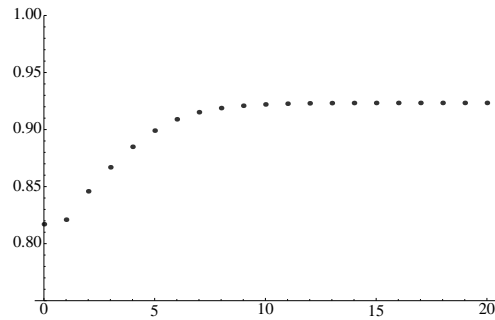
$$\alpha \geq \frac{1 - (\max_G \{\gamma_G\})^2}{\max_G \{\lambda_{G:\max}\}}. \quad (4.4.43)$$

На Фиг. 4.10 е изобразен коефициентът на намаляване на грешката на двуниво-вия метод (4.4.27)–(4.4.28) за ортотропната задача. Резултатите показват равномерна сходимост, т.е., робастност по отношение на параметъра $\zeta = 2^{-t}$, $t \in \{0, 1, \dots, 20\}$. Както може да се види от Фиг. 4.11, резултатите са по-лоши за задача (1.1.15), но въпреки че сходимостта като цяло се влошава при ι клонящо към 0, за (умерена) фиксирана стойност на ι тя е също равномерна по отношение на θ . Както числените резултати в следващата секция показват, оценките, получени от този локален анализ, са много песимистични.

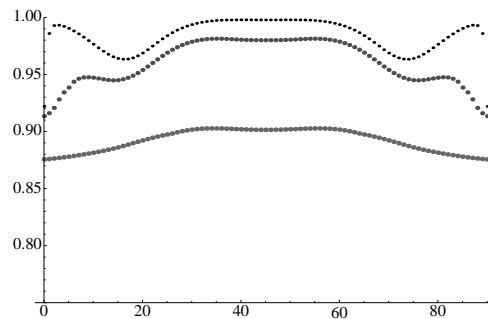
4.5 Числени експерименти

Представените числени експерименти илюстрират поведението на нелинейния АМЛІ метод, базиран на рекурсивно прилагане на оператор на изглаждане M и двунивов преобусловител B_{TL} за няколко представителни тестови задачи.

Нелинейният АМЛІ метод е тестван върху равномерна мрежа, състояща се от $2 \times n \times n$ квадратични елемента (триъгълника), където $n = 2^{\ell+2}$, т.е., $n = 8, 16, \dots, 256$.



Фигура 4.10: Ортотропна задача, $\zeta = 2^{-t}$, $t \in \{0, 1, \dots, 20\}$: Пресметнат коефициент на сходимост с помощта на (4.4.33), изобразен като функция на t .



Фигура 4.11: Задача със завъртаща се посока на доминираща анизотропия, $\nu \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$, $\theta \in \{0^\circ, 1^\circ, \dots, 90^\circ\}$: Пресметнат коефициент на сходимост с помощта на (4.4.33), изобразен като функция на θ .

За удобство, гранични условия на Дирихле са наложени върху цялата граница $\Gamma = \partial\Omega$, т.е., $\Gamma_D = \Gamma$ в (1.1.16). Нека отбележим, че числените резултати при други гранични условия са много сходни.

Най-грубата разширена мрежа ($\ell = 0$) се състои от 41 възела, което отговаря на равномерна мрежа с $2 \times 2^2 \times 2^2 = 32$ елемента, както е показано на Фиг. 4.2(б). Най-фината мрежа е получена при $\ell = 1, 2, \dots, 6$ стъпки на равномерно сгъстяване. За $\ell = 6$ най-фината мрежа се състои от $2 \times 256 \times 256$ квадратични елемента и има $(512 + 1) \times (512 + 1)$ възела.

Представено е сравнение между три различни имплементации на нелинейния AMLI W метод, които се отличават по избора на оператор на изглаждане, както следва: (а): без изглаждане; (б): поточково изглаждане на Гаус-Зайдел (G-S); (с): блочно изглаждане на Гаус-Зайдел (G-S). W методът изпълнява 2 вътрешни итерации на GCG метода на всяко грубо ниво освен най-грубото, на което задачата се

решава точно (чрез използването на пълна факторизация). За дясна част на (1.1.11) сме избрали нулевия вектор и сме инициализирали външната GCG итерация на преобуславяне с произволен вектор.

В първата група от експерименти разглеждаме елиптичната моделна задача с коефициенти $\mathbf{a}_{e:11} = 1$, $\mathbf{a}_{e:12} = \delta(1 - 10^{-a_1})10^{-a_2/2}$ и $\mathbf{a}_{e:22} = 10^{-a_2}$ с $\delta = \pm 1$ и $a_1 \in \{0, 2, 4, 6\}$, $a_2 \in \{0, 2, 4, 6\}$.

Таблицы 4.1–4.7 показват, че скоростта на сходимост се влошава с увеличаването на неортотропната анизотропия и размера на дискретната задача, когато не прилагаме глобален оператор на изглаждане. Това е резултат от растящия брой външни GCG итерации, които са необходими за достигане на зададената точност 10^8 . Въвеждането на поточново изглаждане по метода на Гаус-Зайдел подобрява значително скоростта на сходимост на предложениия алгоритъм. Включването на глобален блочен оператор на изглаждане по метода на Гаус-Зайдел води до (почти) равномерна сходимост на итеративния метод. За пълнота на изложението числени резултати са представени и за глобалния блочен Якоби оператор на изглаждане в Таблица 4.8. За разглежданата силно анизотропна задача (1.1.14), нелинейните AMLI методи, използващи глобални блочни матрици за изглаждане по метода на Гаус-Зайдел и по метода на Якоби, показват много сходни скорости на сходимост.

Нелинеен AMLI W метод: $a_1 = 0$

		Без Допъл. Изгл.					Поточново G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$a_2 \backslash \ell$	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	2	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	9	9
	4	8	8	9	9	9	8	8	9	9	9	7	7	8	8	8
	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	7

Таблица 4.1: Брой итерации за достигане на относителна грешка 10^{-8}

Във втората група от експерименти елементната коефициентна матрица е както в (1.1.15). В Таблицы 4.9–4.10 ъгълът $\theta_e = \theta$ е константен върху цялата област, докато Таблица 4.11 представя резултатите, които са получени, когато θ се изменя плавно

Нелинеен AMLI W метод: $a_1 = 2, \delta = 1$

		Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$a_2 \backslash \ell$	0	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	2	11	13	16	17	17	10	11	12	12	13	10	10	10	11	11
	4	12	22	27	31	*	11	16	19	21	119	8	8	9	9	8
	6	12	23	28	34	*	11	18	21	27	206	6	6	6	6	7

Таблица 4.2: Брой итерации за достигане на относителна грешка 10^{-8} Нелинеен AMLI W метод: $a_1 = 2, \delta = -1$

		Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$a_2 \backslash \ell$	0	10	11	12	12	12	10	11	12	12	12	10	11	12	12	12
	2	11	14	17	18	18	11	12	12	13	14	10	10	10	11	11
	4	12	22	27	31	32	11	16	19	22	22	8	8	9	9	9
	6	12	23	28	32	*	11	17	21	25	233	6	6	6	6	7

Таблица 4.3: Брой итерации за достигане на относителна грешка 10^{-8} Нелинеен AMLI W метод: $a_1 = 4, \delta = 1$

		Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$a_2 \backslash \ell$	0	12	13	13	13	14	12	12	12	12	12	12	12	12	12	13
	2	11	19	38	52	59	11	12	13	14	15	10	10	11	11	12
	4	13	*	*	*	*	11	29	48	59	119	8	8	9	9	8
	6	13	198	*	*	*	12	29	56	126	267	6	6	6	6	7

Таблица 4.4: Брой итерации за достигане на относителна грешка 10^{-8}

от лявата до дясната граница на областта $\Omega = (0, 1)^2$ в съответствие с функцията

$$\theta = -\frac{\pi(1 - |2x - 1|)}{12} \quad \text{за } x \in (0, 1). \quad (4.5.44)$$

Нелинеен AMLI W метод: $a_1 = 4, \delta = -1$

		Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$a_2 \backslash \ell$	0	5	5	8	10	11	4	5	8	9	10	4	5	8	9	10
	2	12	20	38	55	60	11	13	14	14	16	10	11	11	12	13
	4	13	527	*	*	*	12	27	48	59	60	8	8	9	9	9
	6	13	197	*	*	*	12	29	60	129	241	6	6	6	6	7

Таблица 4.5: Брой итерации за достигане на относителна грешка 10^{-8}

Нелинеен AMLI W метод: $a_1 = 6, \delta = 1$

		Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$a_2 \backslash \ell$	0	12	13	13	13	14	12	12	12	12	13	12	12	12	12	13
	2	11	19	42	101	417	11	12	13	14	16	10	10	11	11	12
	4	13	*	*	*	*	11	27	56	91	126	8	8	9	9	8
	6	13	*	*	*	*	12	30	59	117	232	6	6	6	6	7

Таблица 4.6: Брой итерации за достигане на относителна грешка 10^{-8}

Нелинеен AMLI W метод: $a_1 = 6, \delta = -1$

		Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$a_2 \backslash \ell$	0	3	3	3	4	5	2	3	3	3	4	2	3	3	3	4
	2	12	20	42	99	336	11	13	14	15	18	10	11	11	12	13
	4	13	*	*	*	*	12	28	56	96	148	8	8	9	9	9
	6	13	*	*	*	*	12	30	59	121	209	6	6	6	6	7

Таблица 4.7: Брой итерации за достигане на относителна грешка 10^{-8}

Символът ϖ , използван в последната таблица, означава броя на стъпките при блочен Гаус-Зайдел оператор на изглаждане за една GCG итерация на всяка груба

Нелинеен AMLI W метод: $a_1 = 6$, $\delta = -1$

		Блочно Якоби Изгл.					
		1	2	3	4	5	6
a_2	ℓ						
	0	3	3	3	3	4	5
	2	10	10	12	12	15	18
	4	8	8	8	9	10	10
	6	6	6	6	6	6	7

Таблица 4.8: Брой итерации за достигане на относителна грешка 10^{-8}

мрежа (освен най-грубата). Това означава че, $\varpi = 0$ съответства на случая, в който не е приложено глобално изглаждане.

Получените резултати потвърждават още веднъж важноста от въвеждането на блочен оператор на изглаждане в AMLI алгоритъма за построяването на робастен многонивов метод с (почти) константен брой (външни) итерации.

Нелинеен AMLI W метод: $\iota = 10^{-6}$

		Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.					
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	
θ	ℓ																
	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	7	
	$\pi/180$	13	42	119	*	*	11	19	27	54	81	8	9	9	10	10	
	$\pi/36$	11	21	49	86	226	11	13	14	15	19	10	10	11	11	12	
	$\pi/18$	11	13	18	25	35	11	11	11	12	12	10	10	10	11	11	
	$\pi/6$	12	12	13	17	24	12	12	12	12	13	12	12	12	12	13	
$\pi/4$	12	13	13	13	14	12	12	12	12	13	12	12	12	12	13		

Таблица 4.9: Брой итерации за достигане на относителна грешка 10^{-8}

4.6 Заключение

Числените експерименти, представени в Таблицы 4.1–4.11, потвърждават големия потенциал на предложени нов подход за решаването на крайноелементни системи,

Нелинеен AMLI W метод: $\theta = \pi/36$

$\iota \backslash \ell$	Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
10^0	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10^{-2}	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
10^{-4}	11	15	19	20	22	11	12	13	13	13	10	10	11	11	11
10^{-6}	11	21	49	86	226	11	13	14	15	19	10	10	11	11	12
10^{-8}	11	21	55	246	*	11	13	14	16	25	10	10	11	11	12

Таблица 4.10: Брой итерации за достигане на относителна грешка 10^{-8}

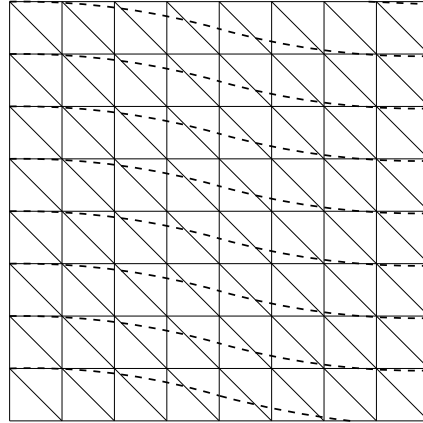
Нелинеен AMLI W метод: $\theta = -\pi(1 - |2x - 1|)/12$

$\varpi \backslash \ell$	Поточково G-S Изгл.						Блочно G-S Изгл.					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
0	11	11	15	28	63	179	11	11	15	28	63	179
1	11	11	12	14	19	34	10	11	11	12	15	22
2	11	11	11	13	17	29	10	11	11	11	13	17
5	10	11	11	12	15	23	10	10	10	11	11	14
10	10	11	11	11	13	19	10	10	10	10	11	12
20	10	10	10	11	12	17	10	10	10	10	10	11

Таблица 4.11: Брой итерации за достигане на относителна грешка 10^{-8}

възникнали при дискретизацията на елиптични задачи с конформни квадратични елементи, в случая когато посоката на анизотропия на коефициентната матрица не е съгласувана с направленията на страните на елементите от въведената триангулация. Също така, проведените експерименти демонстрират, че някои теоретични оценки са потенциално песимистични.

Представени са числени експерименти, които показват добри възможности за прилагане на предложените методи за задачи, които са извън обхвата на разработената теория. В този контекст си струва да отбележим, че блочният Гаус-Зайдел оператор на изглаждане, съответстващ на фиксирана посока (съгласувана с мрежата) остава ефективен и в случая на променлива посока на доминираща анизотропия, когато тя



Фигура 4.12: Посока на доминираща анизотропия в $\Omega = (0, 1)^2$ според (4.5.44).

е относително близка до посоката на оператора на изглаждане, виж Фиг. 4.11–4.12.

За да дадем оценка на изчислителната сложност на метода, сме анализирали броя на работните единици за изпълнение на една външна итерация на нелинейния AMLI W метод. Тук под работна единица се разбира времето за едно умножение на матрица по вектор на нивото на най-фината мрежа. Така за изчислителната сложност получаваме 26 и 28, съответно за изглаждащ оператор по метода на Гаус-Зайдел и по блочния метод на Гаус-Зайдел.

Накрая в Таблица 4.12 мрежовата сложност σ_Ω и операторната сложност σ_A са представени за различни нива на сгъстяване на мрежата. Те се дефинират чрез

Сложност на нелинейния AMLI W метод							
ℓ	1	2	3	4	5	6	7
σ_Ω	1.64	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67
σ_A	2.21	2.48	2.64	2.73	2.77	2.80	2.81

Таблица 4.12: Мрежова сложност σ_Ω и операторна сложност σ_A

отношенията

$$\sigma_A := \frac{\sum_{k=0}^{\ell} \text{ненулеви_елементи}(A^{(k)})}{\text{ненулеви_елементи}(A^{(\ell)}), \quad \sigma_\Omega := \frac{\sum_{k=0}^{\ell} |\Omega^{(k)}|}{|\Omega^{(\ell)}|} \quad (4.6.45)$$

и са показател за нарастването на необходимата компютърна памет в процеса на сгъстяване на мрежата.

Заклучение

Резултатите, представени в дисертационния труд, са в областта на създаване на ефективни методи и алгоритми за решаване на алгебрични линейни системи, получени при дискретизация на елиптичната гранична задача от втори ред.

Разгледани са класове крайноелементни задачи, базирани на конформни крайни елементи от по-висок ред. Неголям брой изследвания досега са посветени на разработването и анализа на ефективни методи и алгоритми за елиптични системи от по-висок ред, а директното прилагане на вече утвърдени подходи и техники не води до робастност при силно анизотропни елиптични задачи. Това, заедно с по-добрите апроксимационни свойства на тези дискретизации в сравнение с линейните елементи, мотивира интереса към тези крайни елементи и води до необходимост от създаването на нови техники и подходи за ефективното решаване на съответните алгебрични системи.

В дисертацията са предложени и изследвани нови оптимални алгоритми, които се базират на многонивова факторизация от тип AMLI и метода на спрегнатия градиент с преобуславяне. Оптималните методи, използващи последователност от вложени мрежи, са едни от предпочитаните за решаване на крайноелементни системи. През последните десетилетия се провеждат много активни изследвания в тази област. Независимо от това, все още съществуват много сериозни предизвикателства и нерешени проблеми в областта на многонивовите методи за редица важни класове задачи.

Основни научни приноси

- (1) Изследвани са критериите за оптималност на многонивов метод за елиптични гранични задачи от втори ред, дискретизирани с квадратични конформни еле-

менти. За случая на ортотропна коэффициентна матрица е получена равномерна оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ за йерархично разделяне на матрицата на коравина. Построен е преобусловител за водещия диагонален блок и е доказана неговата оптималност. Получените резултати изпълняват условията за оптималност на AMLI методите, откъдето следва оптималността на предложения многонивов преобусловител за ортотропни елиптични крайно-елементни задачи.

- (2) Изследвани са методи от тип SC AMLI за преобуславяне на ортотропни елиптични задачи, дискретизирани с биквадратични и бикубични елементи. И в двата случая са разгледани два варианта за рафиниране на мрежата: стандартен и балансиран. Доказани са равномерни оценки на съответните константи в усилените неравенства на КБШ. Показано е, че при подходяща номерация на неизвестните, водещите диагонални блокове имат лентова структура с равномерно ограничена ширина на полулентата. По този начин са получени многонивови преобусловители с оптимална изчислителна сложност. Доказаните оценки са равномерни по отношение на броя на нивата на съгъстяване (броя на неизвестните), скоковете на коефициентите, както и мрежова и/или коэффициентна ортотропия на задачата.
- (3) Предложен е и е изследван нов клас оптимални многонивови методи от тип AMLI за преобуславяне на системи, получени при дискретизация на силно анизотропни елиптични задачи с квадратични конформни крайни елементи. Изследваните методи не изискват йерархична декомпозиция на крайноелементното пространство. В основата на предложения подход е локална адитивна апроксимация на допълнението на Шур. Изследвани са свойствата на оператор на изглаждане от тип блочен метод на Якоби. Доказани са равномерни оценки, от които следва оптимална изчислителна сложност на метода за преобуславяне. Изследвани са задачи, при които направлението на доминираща анизотропия не е съгласувано със страните на триъгълниците от мрежата.
- (4) Изследваните методи и алгоритми са реализирани програмно. Представените числени експерименти потвърждават тяхната оптималност, както и асимптотичната точност на доказаните равномерни оценки на константите в усиленото

неравенство на КБШ.

Декларация за оригиналност на резултатите

Декларирам, че настоящият дисертационен труд представя оригинални резултати, които са следствие от проведени от мен научни изследвания (с помощта и съдействието на научния ми ръководител и на научния ми консултант). Всички резултати, използвани в дисертацията, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са старателно реферирани и подробно цитирани в библиографията.

Настоящата дисертация не е прилагана за получаването на научна степен в друга научна институция.

Подпис

Списък на използвани съкращения

МКЕ	метод на крайните елементи
МКР	метод на крайните разлики
SPD	симетрична положително определена
SPSD	симетрична положително полуопределена
CG	(метод на) спрегнатия градиент
PCG	(метод на) спрегнатия градиент с преобуславяне
GCG	обобщен (метод на) спрегнатия градиент с преобуславяне
КБШ	Коши-Буняковски-Шварц
AMLI	алгебричен многонивов итерационен (метод)
AMG	алгебричен многомрежов (метод)
SC	semi-coarsening
ASCA	адитивна апроксимация на допълнението на Шур
G-S	Гаус-Зайдел (на англ. Gauss-Seidel)

Литература

- [1] Б. Боянов. *Лекции по числени методи*. Дарба, 1995.
- [2] Св. Маргенов. *Числени методи за системи с разредени матрици*. Българска Академия на Науките, София, 2007.
- [3] Бл. Сендов, В Попов. *Числени методи I, II*. Наука и изкуство, София, 1978.
- [4] P. Arbenz, S. Margenov, and Y. Vutov. Parallel MIC(0) preconditioning of 3D elliptic problems discretized by Rannacher-Turek finite elements, *Comput. and Math. with Appl.*, 55(10):2197–2211, 2008.
- [5] O. Axelsson. A generalized Conjugate Gradient, Least Square Method, *Numer. Math.*, 51:209–227, 1987.
- [6] O. Axelsson. *Iterative Solution Methods*. Cambridge University Press, 1994.
- [7] O. Axelsson. Stabilization of Algebraic Multilevel Iteration method: additive methods. *Numer. Alg.*, pages 23–47, 1999.
- [8] O. Axelsson and V. Barker. *Finite element solution of boundary value problems: Theory and computations*, Academic Press, 1983.
- [9] O. Axelsson and R. Blaheta. Two simple derivations of universal bounds for the C.B.S. inequality constant. *Appl. Math.*, 49(1):57–72, 2004.
- [10] O. Axelsson, R. Blaheta, and M. Neytcheva. Preconditioning of boundary value problems using elementwise Schur complements. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 31(2):767–789, 2009.
- [11] O. Axelsson and I. Gustafsson. Preconditioning and two-level multigrid methods of arbitrary degree of approximations. *Math. Comp.*, 40:219–242, 1983.

-
- [12] O. Axelsson and S. Margenov. On multilevel preconditioners which are optimal with respect to both problem and discretization parameters. *Comp. Meth. in Appl. Math.*, 3(1):6–22, 2003.
- [13] O. Axelsson and A. Padiy. On the additive version of the algebraic multilevel iteration method for anisotropic elliptic problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20:1807–1830, 1999.
- [14] O. Axelsson and P. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods I. *Numer. Math.*, 56:157–177, 1989.
- [15] O. Axelsson and P. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27:1569–1590, 1990.
- [16] O. Axelsson and P. Vassilevski. A black box generalized conjugate gradient solver with inner iterations and variable-step preconditioning. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, (12):625–644, 1991.
- [17] O. Axelsson and P. Vassilevski. Variable-step multilevel preconditioning methods. *Num. Lin. Alg. Appl.*, (1):75–101, 1994.
- [18] R. Bank and T. Dupont. An optimal order process for solving finite element equations. *Math. Comp.*, 36:427–458, 1981.
- [19] R. Barret, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. van der Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [20] G. Bencheva and S. Margenov. Parallel incomplete factorization preconditioning of rotated linear FEM systems. *J. Comput. Appl. Mech.*, 4(2):105–117, 2003.
- [21] R. Blaheta, S. Margenov, and M. Neytcheva. Uniform estimate of the constant in the strengthened CBS inequality for anisotropic non-conforming FEM systems. *Numer. Lin. Algebra Appl.*, 11:309–326, 2004.
- [22] D. Braess. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge University Press, second edition, 2001.

-
- [23] J. Bramble. *Multigrid methods*. Longman Scientific & Technical, 1993.
- [24] S. Brenner and L. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer-Verlag, 1994.
- [25] M. Brezina, A. Cleary, R. Falgout, V. Henson, J. Jones, T. Manteuffel, S. McCormick and J. Ruge. Algebraic multigrid based on element interpolation (AMGe). *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(5):1570–1592, 2000.
- [26] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1994.
- [27] T. Chan and P. Vanek. Detection of strong coupling in algebraic multigrid solvers. In *Multigrid Methods VI*, volume 53, pages 11–23. Springer-Verlag, 2000.
- [28] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1980.
- [29] Y. Efendiev, J. Galvis, R.D. Lazarov, S. Margenov and J. Ren. Robust two-level domain decomposition preconditioners for high-contrast anisotropic flows in multiscale media. *Comp. Meth. Appl. Math*, 12(4):415–436, 2012.
- [30] V. Eijkhout and P. Vassilevski. The role of the strengthened Cauchy-Bunyakowski-Schwarz inequality in multilevel methods. *SIAM Review*, 33:405–419, 1991.
- [31] R. Falgout. An Introduction to Algebraic Multigrid Computing. *Computing in Science & Engineering*, 8:24–33, 2006.
- [32] R. Fedorenko. On a relaxation method for solving discrete elliptic equations. *J. Comp. Math. and Math. Phys.*, 1–5:922–927, 1961.
- [33] I. Georgiev, J. Kraus, M. Lymbery, and S. Margenov. On two-level splittings for quadratic FEM anisotropic elliptic problems. Technical Report, 5th Annual meeting of BGSIAM’10, 2011.
- [34] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov and J. Schicho. Locally optimized MIC(0) preconditioning of Rannacher-Turek FEM systems. *Appl. Numer. Math.*, 59:2402–2415, 2009.

-
- [35] I. Georgiev, M. Lymbery and S. Margenov. Analysis of the CBS constant for quadratic finite elements. volume 6046 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 412–419, Heidelberg 2010. Springer.
- [36] G. H. Golub and C. F. van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [37] C. Grossmann, H.-G. Roos, and M. Stynes. *Numerical treatment of partial differential equations*. Springer, 2007.
- [38] J. L. Guermond and P. Minev. A new class of massively parallel direction splitting for the incompressible Navier-Stokes equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 200:2083–2093, 2011.
- [39] I. Gustafsson. On modified incomplete factorization methods. In *Numerical Integration of Differential Equations and Large Linear Systems*, pages 334–351. Springer Berlin Heidelberg, 1982.
- [40] W. Hackbusch. *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer-Verlag, 1985.
- [41] W. Hackbusch. *Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations*. Springer, New York, 1993.
- [42] M.R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, 49(6):409–436, 1952.
- [43] S.C. Jardin. Review of implicit methods for the magnetohydrodynamic description of magnetically confined plasmas. *J. Comp. Phys.*, 231(3):822–838, 2011.
- [44] C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element methods*. Cambridge University Press, 1987.
- [45] J. Jones and P. Vassilevski. AMGe based on element agglomeration. *SIAM J. Sci. Comput.*, 23(1):109–133, 2001.
- [46] N. Kosturski and S. Margenov. MIC(0) preconditioning of 3D FEM problems on unstructured grids: conforming and non-conforming elements. *J. of Comput. and Appl. Math.*, 226:288–297, 2009.

-
- [47] J. Kraus. An algebraic preconditioning method for M -matrices: linear versus non-linear multilevel iteration. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 9:599–618, 2002.
- [48] J. Kraus. Algebraic multilevel preconditioning of finite element matrices using local Schur complements. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 13:49–70, 2006.
- [49] J. Kraus. Algebraic multigrid based on computational molecules, 2, Linear elasticity problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(1):505–524, 2008.
- [50] J. Kraus. Additive Schur complement approximation and application to multilevel preconditioning. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34:A2872–A2895, 2012.
- [51] J. Kraus. Additive Schur complement approximation for elliptic problems with oscillatory coefficients. volume 7116 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 52–59, Heidelberg, 2012. Springer.
- [52] J. Kraus, M. Lybery, and S. Margenov. On the robustness of two-level preconditioners for quadratic FE orthotropic elliptic problems. volume 7116 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 582–589, Heidelberg, 2012. Springer.
- [53] J. Kraus and S. Margenov. *Robust Algebraic Multilevel Methods and Algorithms*. Radon Series on Computational and Applied Mathematics. De Gruyter, Germany, 2009.
- [54] J. Kraus and J. Schicho. Algebraic multigrid based on computational molecules, 1: Scalar elliptic problems. *Computing*, 77:57–75, 2006.
- [55] U. Langer, S. Reitzinger, and J. Schicho. Symbolic methods for the element preconditioning technique. , volume 2630 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 293–308, Heidelberg. Springer.
- [56] R. Lazarov, P. S. Vassilevski, and S. Margenov. Solving elliptic problems by the domain decomposition method using precondition matrices derived by multilevel splitting of finite element matrix. *Proceedings of the 1st Int. Conf. on Supercomputing (Greece)*, pages 826–835, 1987.
- [57] I. Lirkov, S. Margenov, and L. Zikatanov. Circulant block-factorization preconditioning of anisotropic elliptic problems. *Computing*, 58(3):245–258, 1997.

-
- [58] M. Lymbery and S. Margenov. Robust semi-coarsening multilevel preconditioning of biquadratic FEM systems. *Cent. European Journal Math.*, 10(1):357–369, 2012.
- [59] M. Lymbery and S. Margenov. Robust balanced semi-coarsening AMLI preconditioning of biquadratic FEM Systems. volume 1404 of *AIP Proceedings*, pages 438–447. American Institute of Physics Inc., 2012.
- [60] J.F. Maitre and S. Musy. The Contraction Number of a Class of Two-level Methods; An Exact Evaluation for Some Finite Element Subspaces and Model Problems. *Lect. Notes Math.*, 960:535-544, 1982.
- [61] A. El maliki, A. Guénette, and M. Fortin. An efficient hierarchical preconditioner for quadratic discretizations of finite element problems. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 18:789–803, 2011.
- [62] S. Margenov. Semicoarsening AMLI algorithms for elasticity problems. *Num. Lin. Alg. Appl.*, 5:347–362, 1998.
- [63] S. Margenov, L. Xanthis, and L. Zikatanov. On the optimality of the semi-coarsening AMLI algorithm. *Iter. Meth. Lin. Alg.*, pages 270–280, 1995.
- [64] M. Neytcheva. On element-by-element Schur complement approximations. *Linear Algebra and Its Applications*, 434:2308–2324, 2011.
- [65] M. Neytcheva, M. Do-Quang, and H. Xin. Element-by-element Schur complement approximations for general nonsymmetric matrices of two-by-two block form. volume 5910 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 108–115, Heidelberg, 2010. Springer.
- [66] Y. Notay. Using approximate inverses in algebraic multilevel methods. *Numer. Math.*, 80:397–417, 1998.
- [67] Y. Notay. Flexible conjugate gradients. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22:1444–1460, 2000.
- [68] I. Pultarova. Preconditioning and *a posteriori* error estimates using *h*- and *p*-hierarchical finite elements with rectangular supports. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 16(5):415–430, 2009.

- [69] J.W. Ruge and K. Stüben. Algebraic multigrid. In *Multigrid Methods*, volume 3, pages 73–130. SIAM, Philadelphia, 1987.
- [70] J.B. Schroder, *Smoothed aggregation solvers for anisotropic diffusion*, Numer. Linear Algebra Appl., 19, 2012, 296–312.
- [71] G. Strang and J. Fix. *An analysis of the finite element method*. Prentice Hall, 1973.
- [72] P. Vanek, M. Brezina, and J. Mandel. Convergence of algebraic multigrid based on smoothed aggregation. *Numerische Mathematik*, 88(3):559–579, 2012.
- [73] P. Vassilevski. *Multilevel Block Factorization Preconditioners: Matrix-based Analysis and Algorithms for Solving Finite Element Equations*. Springer, New York, 2008.
- [74] P.S. Vassilevski. Hybrid V-cycle algebraic multilevel preconditioners. *Math. Comp.*, 58:489–512, 1992.
- [75] P.S. Vassilevski. On two ways of stabilizing the hierarchical basis multilevel methods. *SIAM Review*, 39:18–53, 1997.