



БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ  
ИНСТИТУТ ПО ИНФОРМАЦИОННИ  
И КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ

Мария Димитрова Лимбъри

ОПТИМАЛНИ МНОГОНИВОВИ МЕТОДИ ЗА  
КОНФОРМНИ КВАДРАТИЧНИ, БИКВАДРАТИЧНИ И  
БИКУБИЧНИ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация за присъждане на  
*образователната и научната степен „Доктор“*

Научна специалност: 01.01.09, Изчислителна Математика“

Научен ръководител:  
проф. Светозар Маргенов

Научен консултант:  
доц. Йоханес Краус

София, 2013г.

Дисертационният труд е обсъден и допуснат до защита на разширено заседание на секция „Научни Пресмятания“ на ИИКТ-БАН, състояло се на 14.05.2013г.

Дисертационният труд съдържа 131 страници, в които 34 фигури, 19 таблици и 7 страници литература, включваща 75 заглавия.

Защитата на дисертацията ще се състои на ..... г. от 14:00 часа в зала ..... на Института по ..... - БАН на открито заседание на научно жури в състав:

1. ...
2. ...
3. ...
4. ...
5. ...

Материалите за защитата са на разположение на интересуващите се в стая ... на ИИКТ-БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, блок ..., град София.

Автор: Мария Димитрова Лимбъри

Заглавие: Оптимални многонивови методи за конформни квадратични, биквадратични и бикубични крайни елементи

# Обща характеристика на дисертационния труд

## Обзор на изследваната област и актуалност на темата

Компютърното моделиране е една бързо развиваща се интердисциплинарна област, която намира все повече нови приложения при решаването на различни задачи от физиката, астрофизиката, химията, биологията, икономиката, психологията, социалните и инженерни науки. То включва създаването на: а) математически модел, който адекватно описва съответния реален феномен; б) числени методи, с които се дискретизират диференциалните и/или интегрални уравнения в математическия модел; в) ефективни методи и алгоритми, с които се решават системите линейни алгебрични уравнения, получени след дискретизацията; г) алгоритми, с които се визуализират и анализират резултатите от проведените числени експерименти; д) високопроизводителни компютърни програми, които максимално използват възможностите и архитектурата на съвременните изчислителни системи. Компютърните симулации дават възможност за икономии при скъпо струващи лабораторни и практически експерименти. Те са особено приложими и важни също така при моделирането на нови материали и технологии, както и при изследването на процеси, за които измерванията и наблюденията са невъзможни, а аналитичното решение твърде сложно.

Съществуват различни техники за дискретизация на моделната задача. Едни от най-утвърдените са методът на крайните елементи (МКЕ) и методът на крайните разлики (МКР), виж например [22, 24, 37, 71]. Тяхното прилагане води до система от линейни алгебрични уравнения, [1, 3], която притежава важното свойство, че съответната матрица е разреждана, т.е., броят на ненулеви елементи във всеки ред или стълб е ограничен от константа, независеща от параметъра на дискретизация на съответния метод. Тези системи могат да бъдат от голяма размерност, което налага развитието на числени методи и алгоритми, предназначени за ефективното решаване на задачи с разреждени матрици. Нарастването на производителността на изчислителната техника променя разбирането за голяма размерност, но независимо от развитието в това направление, определящи за развитието на компютърното моделиране са постиженията в областта на числените методи и алгоритмите за тяхната реализация, [3, 8]. Резултатите, които представяме в настоящата дисертация, са в тази област.

МКЕ и МКР принадлежат към групата на така наречените *мрежови методи*. При определени предположения матриците, получени след дискретизацията на моделната задача по двата метода, имат близки свойства и дори могат да съвпадат, но по отношение на общността и алгоритмите за неговата реализация МКЕ има известно преимущество. В настоящия труд системно се използват терминологията и свойствата на МКЕ.

Дискретизацията с конформни линейни крайни елементи е най-добре изученият случай на прилагане на МКЕ, като за ефективното решаване на произтичащите линейни системи са разработени специални числени алгоритми. Както е показано в [9] и [60] обаче, тези алгоритми не са робастни за крайноелементни задачи, при които посредством специални техники на разделяне на крайноелементното пространство първоначалната система, базирана на дискретизация с конформни квадратични еле-

менти, се свежда до система, съответстваща на конформни линейни елементи. Важно е да отбележим, че независимо от по-голямата точност на приближеното решение при използването на крайни елементи от по-висок ред и приложението им в редица приложни задачи, като например от областта на плазма физиката, [43], свързаните крайноелементни системи от по-висок ред досега са изследвани в много малка степен, виж например [61].

Това са някои от причините за специалния интерес към използването на тези елементи за ефективно числено решаване на диференциални уравнения, което е предмет на настоящата дисертация.

Ако за численото решаване на елиптическа гранична задача в област  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , използваме мрежов числен метод, при много общи предположения диференциалната задача се свежда до система от линейни алгебрични уравнения с  $(N \times N)$  матрица  $A$ , която е симетрична и положително определена (SPD). Съществуват два основни подхода при решаването на такъв клас линейни системи - преки и итерационни. Класически представител на преките методи е методът на Гаус, виж [1, 3], чиято изчислителна сложност е  $\mathcal{O}(N^3)$ . Най-бързият измежду преките методи с изчислителна сложност  $\mathcal{O}(N^{3/2})$  е методът на вложените сечения (Nested Dissection), виж например [8], който се базира на рекурсивното разделяне на графа, представящ структурата на ненулевите елементи на матрицата  $A$ . Асимптотично същата сложност има и методът на спрегнатия градиент, който е един от най-популярните итерационни методи. Поради тази причина итерационните методи са се наложили над преките, особено при решаването на задачи с достатъчно голяма размерност.

Методът на спрегнатия градиент е съвременен метод от вариационен тип в подпространства на Крилов, виж [6, 8, 22]. Негово обобщение е методът на спрегнатия градиент с преобуславяне, чиято ефективност се определя от качествата на преобусловителя. Когато се използва модифицирана непълна факторизация на Холецки (MIC) за преобусловител, общата изчислителна сложност на алгоритъма е  $\mathcal{O}(N^{5/4})$ , виж [39]. Да отбележим също така, че в този конкретен случай методът на спрегнатия градиент с преобуславяне има доказано ефективна паралелна реализация, виж [4, 20]. Изследванията в областта на конструирането на оптимални преобусловители, за които методът на спрегнатия градиент с преобуславяне има изчислителната сложност  $\mathcal{O}(N)$ , допринасят значително за развитието на методите за решаване на линейни системи.

Методите, построени върху последователност (йерархия) от дискретизации, играят важна роля в теорията на съвременните итерационни методи, и се разделят основно на две групи - многомрежови (multigrid), [11, 23, 40], и многонивови (multilevel) методи, [12, 14, 15, 56, 73]. Особеност на многомрежовите методи е, че използват повече свойствата на диференциалната задача, докато при многонивовите конструкцията е в значителна степен алгебрична. Рекурсивните итерационни методи, основаващи се на последователност от вложени мрежи, за първи път са въведени от Р. Федеронко през 1961 година, [32]. През 1987 година П. Василевски, Р. Лазаров и С. Маргенов в [56] представят конструкцията на почти оптимален алгебричен многонивов метод, като решителна следваща стъпка е направена в работите на Axelsson и Василевски, поставящи началото на AMLI методите. Свързана публикация, разглеждаща почти оптимални преобусловители за елиптически задачи, е в областта на циркулантните

блочни факторизации, виж [57].

Както в други дялове на математиката и компютърните науки, и в областта на оптималните алгебрични итерационни методи можем напълно заслужено да говорим за българска школа, която успешно продължава да се развива. Съществени приноси в това направление имат Панайот Василевски, Райчо Лазаров, Светозар Маргенов, Мая Нейчева, Людмил Зикатанов. Важно е да споменем и близкото сътрудничество на българската школа с редица водещи учени в тази област, сред които са Уве Акселсон, Улрих Лангер, Радим Блахета и Йоханес Краус.

## Методология на изследването

Понятията изчислителна сложност, скорост на сходимост и робастност (от англ. robustness или устойчивост) са основни в методологията на изследване в дисертацията. Представените резултати са с конструктивен характер, а предложените методи имат с ясна алгоритмична структура и анализ.

Методът на спрегнатия градиент с преобуславяне се е наложил сред останалите съвременни итерационни методи. Определящи за неговата ефективност са скоростта на сходимост, която зависи от спектралното число на обусловеност на преобуславяната матрица  $\kappa(B^{-1}A)$ , и изчислителната сложност на решаването на системи с преобусловителя  $B$ .

В случая на многонивови преобусловители числото на обусловеност може да се оцени с помощта на константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ). Нови оптимални многонивови алгоритми са предложени и анализирани в дисертационния труд. Използваният апарат на изследване включва построяването на спектрално еквивалентни приближения за специални класове матрици, възникващи в процеса на многонивова факторизация, получаването на нови равномерни оценки за константата в усиленото неравенство на КБШ и дефинирането на подходящи оператори на изглаждане, стабилизиращи числото на обусловеност.

Представените методи и алгоритми в дисертационния труд имат програмна реализация. Проведени са числени експерименти, чиито резултати са анализирани.

## Цели на дисертационния труд

Основните цели на изследванията в представената дисертация са:

- Разработване и изследване на оптимални преобусловители от класа на алгебричните многонивови (Algebraic Multilevel Iteration или AMLI) методи, които се основават на йерархични базисни разделяния за крайноелементни дискретизации с конформни квадратични елементи на елиптичната гранична задача от втори ред.
- Разработване и изследване на оптимални преобусловители от класа на алгебричните многонивови методи, които се основават на йерархични базисни разделяния за крайноелементни дискретизации с конформни биквадратични и конформни бикубични елементи на елиптичната гранична задача от втори ред.

- Разработване и изследване на оптимални преобусловители от класа на алгебричните многонивови методи, които се основават на нейерархични базисни разделяния за крайноелементни дискретизации с конформни квадратични елементи на елиптичната гранична задача от втори ред.

Работата по дисертацията цели не само теоретичното изследване на предложените алгоритми, но и тяхната програмна реализация. Представен е анализ на резултатите от проведените числени експерименти.

## Списък на публикациите по дисертацията

### Научни публикации в международни списания с импакт фактор

- M. Lyubery, S. Margenov: Robust Semi-Coarsening Multilevel Preconditioning of Biquadratic FEM Systems, Cent. Eur. J. Math., 10(1), 2012, 357-369. IF=0.44
- J. Kraus, M. Lyubery, S. Margenov: Robust Multilevel Methods for Quadratic Finite Element Anisotropic Elliptic Problems, Numer. Linear Algebra Appl., to appear, 24 pages. IF=1.168

### Научни публикации в международни поредици с SJR ранг:

- I. Georgiev, M. Lyubery, S. Margenov: Analysis of the CBS Constant for Quadratic Finite Elements, LNCS, 6046, 2011, 412-419. SJR=0.33
- J. Kraus, M. Lyubery, S. Margenov: On the Robustness of Two-Level Preconditioners for Quadratic FE Orthotropic Elliptic Problems, LNCS, 7116, 2012, 582-589. SJR=0.33
- M. Lyubery, S. Margenov: Robust Balanced Semi-Coarsening AMLI Preconditioning of Biquadratic FEM Systems, AIP Conf. Proc., 1404, 2011, 438-447. SJR=0.14
- J. Kraus, M. Lyubery, S. Margenov: Semi-Coarsening AMLI Preconditioning of Higher Order Elliptic Problems, AIP Conf. Proc., 1487, 2012, 30-41. SJR=0.14

### Глави в книги:

- J. Kraus, M. Lyubery, S. Margenov: Robust Algebraic Multilevel Preconditioners for Anisotropic Problems, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, volume "Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Algorithms and their Applications in honor of Professor Raytcho Lazarov's 40 years in Computational and Applied Mathematics", to appear, 27 pages.

### Научни публикации в сборници с разширени абстракти:

- I. Georgiev, J. Kraus, M. Lyubery, S. Margenov: On Two-level Splittings for Quadratic FEM Anisotropic Elliptic Problems, Annual Meeting of BGSIAM'10, 35-40.

## Апробация на резултатите

Съществени части от дисертацията са представени на следните специализирани международни научни конференции: 7th International Conference on “Numerical Methods and Applications”, Боровец, България, 2010; 8th International Conference on “Large-Scale Scientific Computations”, Созопол, България, 2011; 3rd Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the “Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences”, Албена, България, 2011; 4th Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the “Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences”, Св. Св. Константин и Елена, Варна, България, 2012; “European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering”, Виена, Австрия, 2012.

Резултати от дисертацията са докладвани и в рамките на: 5th Annual Meeting of BGSIAM’10, Sofia, Bulgaria, 2010. Изнесени са семинари в Йохан Радон Института по Изчислителна и Приложна Математика, Австрийска Академия на Науките, Линц, Австрия и Института по Информационни и Комуникационни Технологии, Българска Академия на Науките, София, България.

## Участие в научни проекти

- Център за върхови научни постижения „Суперкомпютърни приложения”, фонд „Научни изследвания”, ДО02-115/2008.
- Доизграждане на център за върхови научни постижения „Суперкомпютърни приложения”, фонд „Научни изследвания”, ДЦВП02/1.
- Ефективни многонивови методи и алгоритми за задачи с хетерогенни коефициенти, фонд „Научни изследвания”, ДМУ 03-62/2011.
- Съвременните пресмятания в полза на иновацията, фонд „Капацитети” в 7-ма Рамкова програма на Европейската комисия (ЕК), „Научно-изследователски потенциал в конвергентните райони”, FP7, договор 316087.

Настоящата дисертация се състои от увод, четири глави, заключение, списък на използваните съкращения и списък на цитираната литература, като основното съдържание е поместено на ... страници. Изложението е придружено с фигури и таблици, а списъкът на цитираната литература включва ... заглавия.

## Глава 1. Въведение

Настоящата глава цели да въведе читателя в предметната област и терминологията на дисертационния труд. Разглеждаме елиптичната гранична задача от втори ред

$$Lu \equiv -\nabla \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1.1a)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (1.1.1b)$$

$$(\mathbf{a}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (1.1.1c)$$

където  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  е изпъкнала многоъгълна област,  $f \in L_2(\Omega)$ , а  $u$  търсим в пространството  $H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v dx < \infty\}$ . Външната нормала към границата  $\Gamma = \partial\Omega$  е означена с  $\mathbf{n}$ . Коефициентната матрица  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^2$  е SPD и равномерно ограничена в  $\Omega$ .

За решаването на задача (1.1.1) използваме МКЕ, който е изключително приложим за области с произволна геометрия и неструктурирани мрежи, има елегантна формулировка и робастност. При МКЕ търсим приближено решение  $u_h$  на диференциалната задача във вариационна форма в някакво крайномерно подпространство  $\mathcal{V}_h$ . Ако  $\mathcal{V}_h$  е подпространство на Соболево пространство  $\mathcal{V}$ , в което е дефинирана вариационната задача, МКЕ се нарича *конформен* метод. Най-честият избор в МКЕ са подпространствата от на части полиномиални функции върху разделяне (триангулация)  $\mathcal{T}_h$  на областта.

МКЕ свежда диференциалната задача до решаването на система линейни алгебрични уравнения

$$A_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}_h. \quad (1.1.11)$$

Тук  $\mathbf{u}_h = \{u_i\}_{i=1}^N$  е търсеният вектор ( $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$ ).  $A_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$  е разрежена матрица, която за елиптичната задача (1.1.1) е SPD и може да се пресметне, използвайки интегрално усреднените стойности на  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  върху всеки елемент  $e \in \mathcal{T}_h$ , означени с  $\mathbf{a}_e$ . В следващите глави ще изследваме три представителни варианта за  $\mathbf{a}_e$ :

(a) *Ортотропната анизотропна задача*, където

$$\mathbf{a}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{e:11} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{e:22} \end{bmatrix}, \quad 0 < \mathbf{a}_{e:22} \leq \mathbf{a}_{e:11}; \quad (1.1.13)$$

(b) *Неортотропната анизотропна задача*, за която

$$\mathbf{a}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{e:11} & \mathbf{a}_{e:12} \\ \mathbf{a}_{e:12} & \mathbf{a}_{e:22} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 < \mathbf{a}_{e:22} \leq \mathbf{a}_{e:11}, \\ -\sqrt{\mathbf{a}_{e:11}\mathbf{a}_{e:22}} < \mathbf{a}_{e:12} < \sqrt{\mathbf{a}_{e:11}\mathbf{a}_{e:22}}; \end{matrix} \quad (1.1.14)$$

(c) Задачата със завъртаща се посока на доминираща анизотропия, (на англ. *rotated diffusion problem*), представена с

$$\mathbf{a}_e = \begin{bmatrix} \iota + \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \iota + \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \iota I + \mathbf{d}\mathbf{d}^T, \quad (1.1.15)$$

където  $\iota > 0$  и  $\mathbf{d}^T = (\cos \theta, \sin \theta)$  за на части константен ъгъл  $\theta = \theta_e$ .

В Раздел 1.2 са представени итерационни методи за решаване на системи с разредени матрици. Изложението започва с описание на метода на спрегнатия градиент (CG), при който направленията на търсене са взаимно ортогонални по отношение на енергетичното скаларно произведение. За неговата скорост на сходимост може да се формулира следната лема:

**Теорема 1.2.1.** В сила е неравенството

$$it(\epsilon) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\kappa(A)} \ln \left( \frac{2}{\epsilon} \right) + 1, \quad (1.2.23)$$



където с  $it(\epsilon)$  е означено най-малкото цяло положително число  $n$ , за което се удовлетворява условието

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(n)}\|_A \leq \epsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(0)}\|_A, \quad (1.2.24)$$

където с  $\mathbf{x}_{(n)}$  сме означили приближеното решение на  $n$ -тата итеративна стъпка в CG алгоритъма.

От Теорема 1.2.1 следва, че броят итерации в CG метода, необходими за достигането на отнапред зададена относителна точност зависи от спектралното число на обусловеност на матрицата на системата. За двумерни елиптични задачи от втори ред това означава, че броят итерации ще расте пропорционално на  $\mathcal{O}(h^{-1}) = \mathcal{O}(N^{\frac{1}{2}})$ .

Подобряването на сходимостта при решаването на лошо обусловени системи налага допълнителното прилагане на така наречената техника на преобусловяване, водеща до метода на спрегнатия градиент с преобуславяне (PCG). При тази процедура изходната система (1.1.11) се заменя с еквивалентната преобусловена система  $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ , където  $\tilde{A} = B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\tilde{\mathbf{x}} = B^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}$ , а  $\tilde{\mathbf{b}} = B^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b}$ , която вече решаваме по CG метода. Матрицата  $B = B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$  се нарича преобусловяваща или преобусловител. Скоростта на сходимост на PCG метода към точното решение на система (1.1.11) следва от Теорема 1.2.1, като този път в оценката (1.2.23) участва спектралното число на обусловеност на преобусловената матрица,  $\kappa(B^{-1}A)$ . От оценката на скоростта на сходимост и конструкцията на PCG метода следва общата стратегия за конструиране на ефективни преобусловители, виж например [53], а именно

- Числото на обусловеност на преобусловената матрица да бъде значително по-малко от това на оригиналната матрица ( $\kappa(B^{-1}A) \ll \kappa(A)$ ).
- Да съществува ефективен алгоритъм за решаване на системи с преобусловителя, с изчислителна сложност много по-малка от сложността на решаване на системи с изходната матрица ( $\mathcal{N}(B^{-1}\mathbf{x}) \ll \mathcal{N}(A^{-1}\mathbf{x})$ ).

**Дефиниция 1.2.1.** Преобусловителят  $B$  наричаме оптимален, ако PCG метод с преобуславяща матрица  $B$  има оптимална изчислителна сложност  $\mathcal{N}^{PCG} = \mathcal{O}(N)$ , т.е. когато  $\kappa(B^{-1}A) = \mathcal{O}(1)$  и  $\mathcal{N}(B^{-1}\mathbf{x}) = \mathcal{O}(N)$ , където с  $N$  сме означили размерността на системата.

При така наречения обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне (GCG) различни (променящи се) преобусловители могат да се използват на различни итерации, виж например [5, 16, 17, 53, 67], като в този случай преобуславителят не се дефинира като линеен оператор, а чрез самия итеративен процес. Поради по-общия вид на преобусловителя обаче, ортогоналността на направленията на търсене  $\mathbf{p}_{(n)}$  вече не е гарантирана и трябва да се наложи експлицитно, което прави GCG метода по-скъп от стандартния PCG метод.

Въведение в теорията на оптималните алгебрични многонивови методи е направено в Раздел 1.3, където е описан алгебричният многонивов преобусловител (AMLI). За първи път той е предложен в [14, 15] за случая на изотропна елиптична задача, дискретизирана с конформни крайни елементи, като по-късно той е обобщен и развит и за по-широк клас диференциални задачи и дискретизации.

Нека SPSD матрицата  $A$  има следното две на две блочно представяне

$$A := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (1.3.32)$$

където  $A_{11}$  е неособена матрица. Ако  $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  е допълнението на Шур за  $A$ , в сила е точната блочна факторизация

$$A := \begin{bmatrix} A_{11} & \\ A_{21} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I_2 \end{bmatrix}. \quad (1.3.34)$$

Определящи за ефективността на преобусловителите, базирани на блочната факторизация (1.3.34), са свойствата на разделянето (1.3.32), което се характеризира с константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ).

Нека  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$  са крайномерни векторни пространства, чиито размерности са съгласувани с блочното представяне (1.3.32) на SPSD матрица  $A$  с неособен блок  $A_{11}$ . Нека също така  $\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ ,  $\mathbf{W}_1 = \{[\mathbf{v}_1^T, \mathbf{0}^T]^T, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{V}_1\}$  и  $\mathbf{W}_2 = \{[\mathbf{0}^T, \mathbf{v}_2^T]^T, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_2\}$ .

Константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ) се дефинира като минималната положителна константа  $\gamma$ , която за всеки ненулеви вектора  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, 2$  удовлетворява неравенството

$$|\mathbf{v}_1^T A_{12} \mathbf{v}_2| \leq \gamma \{\mathbf{v}_1^T A_{11} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2\}^{1/2}. \quad (1.3.36)$$

Следните три лема са ключови за извеждането на теоретични оценки на константата в усиленото неравенство на КБШ, виж например [6, 30, 53].

**Лема 1.3.2.** Нека  $A$  е SPSD матрица с положително определен първи блок  $A_{11}$ , а  $\gamma$  е най-малката константа, удовлетворяваща (1.3.36). Тогава са в сила твърденията

- (а)  $\gamma \leq 1$ ;
- (б)  $\gamma = 1$ , ако  $\exists \mathbf{w} = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T]^T \in \ker(A)$ , за което  $\mathbf{v}_2 \notin \ker(A_{22})$ ;
- (в)  $\gamma < 1$ , ако за всяко  $\mathbf{w} = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T]^T \in \ker(A)$  е в сила, че  $\mathbf{v}_2 \in \ker(A_{22})$ ;
- (г) От условие (в) следва, че

$$\gamma = \sup_{\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i \setminus \ker(A_{ii}), i=1,2} \frac{\mathbf{v}_1^T A_{12} \mathbf{v}_2}{(\mathbf{v}_1^T A_{11} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2)^{1/2}}.$$

**Лема 1.3.3.** Нека за SPSD матрицата  $A$  е изпълнено условие (в) от Лема 1.3.2. Тогава за  $\gamma$  са в сила твърденията

- (а)

$$\gamma^2 = \sup_{\mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_2 \setminus \ker(A_{22})} \frac{\mathbf{v}_2^T A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2}; \quad (1.3.37)$$

(б) за всяко  $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_2 \setminus \ker(A_{22})$

$$1 - \gamma^2 \leq \frac{\mathbf{v}_2^T S \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2} \leq 1, \quad (1.3.38)$$

където лявото неравенство е точно, а дясното е точно при условие  $\ker(A_{12}) \neq \{\mathbf{0}\}$ .

Нека  $\mathcal{E}$  е множество от индекси,  $A_E$  са локални матрици, които са SPSD, и матрицата на системата  $A$  има представянето

$$A = \sum_{E \in \mathcal{E}} A_E, \quad \mathbf{v} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mathbf{v}_E, \quad (1.3.39)$$

където сумирането е в смисъл на асемблиране. Локалните матрици  $A_E$  и съответните вектори  $\mathbf{v}_E$  могат да се представят в две на две блочна форма в съответствие с глобалното блочно разделяне на векторното пространство, както следва

$$A_E = \begin{bmatrix} A_{E:11} & A_{E:12} \\ A_{E:21} & A_{E:22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E:1} \\ \mathbf{v}_{E:2} \end{bmatrix}. \quad (1.3.40)$$

**Лема 1.3.4.** Нека локалните матрици  $A_E$ , удовлетворяващи (1.3.39), имат представянето (1.3.40). Ако с  $\gamma_E$  означим локалните константи в усиленото неравенство на КБШ, съответстващи на  $A_E$ ,  $E \in \mathcal{E}$  т.е.,

$$\gamma_E^2 = \sup_{\mathbf{v}_{E:2} \in V_{E:2} \setminus \ker(A_{E:22})} \frac{\mathbf{v}_{E:2}^T A_{E:21} A_{E:11}^{-1} A_{E:12} \mathbf{v}_{E:2}}{\mathbf{v}_{E:2}^T A_{E:22} \mathbf{v}_{E:2}}, \quad (1.3.41)$$

за глобалната константа в усиленото неравенство на КБШ  $\gamma$  ще бъде в сила неравенството

$$\gamma \leq \max_{E \in \mathcal{E}} \gamma_E. \quad (1.3.42)$$

В [11, 18] за първи път е представена теорията на оптималните двунивови методи, където основната идея при построяването на оптимални двунивови преобуславители е крайнолементното пространство да се раздели по такъв начин, че КБШ константата да бъде ограничена далеч от единица.

Други техники на преобуславяне са базирани на апроксимиране на (някои от) блоковете в (1.3.34). В [48] за първи път е представено построяването на апроксимация  $Q$  на точното допълнение на Шур  $S$ , при което се избягва използването на йерархичен базис.

Алгебричните многонивови итерационни преобуславители (AMLI) са рекурсивно обобщение на двунивовите и се дефинират върху редица от вложени мрежи  $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell$ . В зависимост от техниката на построяване AMLI алгоритмите се разделят на линейни и нелинейни.

Следващите теореми, виж [14, 15, 47, 73], представят основни резултати за AMLI методите.

**Теорема 1.3.2.** Числото на обусловеност на  $B^{(k)-1}A^{(k)}$  може да бъде равномерно ограничено с подходящ избор на параметрите  $k_0$  и  $\nu$  и на полиномна функция  $p^{(k)}$ , удовлетворяваща  $p^{(k)}(0) = 1$ , при условие че V-цикличните преобуславители с ограничени разлика в нивата  $\ell - k \leq k_0$  имат равномерно ограничени числа на обусловеност.

**Теорема 1.3.3.** Нека  $A^{(\ell)}$  е SPD матрица и да разгледаме линейната система  $A^{(\ell)}\mathbf{x} = \mathbf{d}^{(\ell)}$ . Нека  $\underline{\vartheta}_k \bar{B}^{(k)} \leq A^{(k)} \leq \bar{\vartheta}_k \bar{B}^{(k)}$  за  $k = 1, \dots, \ell$  и  $\vartheta := \max_{0 < k \leq \ell} \bar{\vartheta}_k / \underline{\vartheta}_k$ . Ако броят вътрешни GCG итерации на всяко грубо ниво (освен най-грубото, където  $A^{(0)} = Q^{(0)}$ ),  $\nu$ , е избран така че

$$\delta(\nu) := \left(1 - \frac{4\vartheta(1 - \epsilon)^2}{(1 + \vartheta - 2\epsilon + \vartheta\epsilon^2)^2}\right)^{\nu/2} \leq \epsilon, \quad 0 < \epsilon < 1, \quad (1.3.85)$$

то за итерациите, генерирани от нелинейния AMLI алгоритъм,  $\mathbf{x}_{(i)}$ , е в сила

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(i+1)}\|_{A^{(0)}}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(i)}\|_{A^{(0)}}} \leq \sqrt{1 - \frac{4\vartheta(1 - \epsilon)^2}{(1 + \vartheta - 2\epsilon + \vartheta\epsilon^2)^2}} < 1. \quad (1.3.86)$$

За AMLI методите могат да се формулират следните условия за оптималност. Нека за апроксимацията  $B_{11}^{(k)}$  на водещия блок  $A_{11}^{(k)}$  е изпълнено

$$A_{11}^{(k)} \leq B_{11}^{(k)} \leq \omega A_{11}^{(k)}, \quad \omega < \infty. \quad (1.3.87)$$

Тогава мултипликативният многонивов преобусловител е оптимален, ако

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} < \nu < \varrho, \quad (1.3.90)$$

където  $\varrho = \min_k N_k / N_{k-1}$ .

За хибридният AMLI V преобусловител, където стойността на  $\nu$  не е еднозначно определена, тези условия се предефинират по следния начин, виж [74],

$$\begin{aligned} \nu_k &= 1, & \text{ако } (k \bmod k_0) \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^{(k_0)^2}}} &< \nu_k < \varrho_{k_0}, & \text{ако } (k \bmod k_0) = 0, \end{aligned} \quad (1.3.91)$$

където  $\gamma^{(k_0)}$  е КБШ константата за вложените пространства  $\mathcal{V}_{jk_0} \subset \mathcal{V}_{(j+1)k_0}$ , а  $\varrho_{k_0} = N_{(j+1)k_0} / N_{jk_0}$ .

## Глава 2. Йерархични базисни разделяния за квадратични елементи

Раздел 2.1 представя мотивацията за изследването на йерархични базисни разделяния за конформни квадратични крайни елементи, като се акцентира върху потенциала на йерархичния базис при разработването на робастни многонивови методи. В

следващия раздел е получена елементната матрица на коравина за конформен квадратичен елемент и е показана основна трансформационна връзка между крайноелементните функции на два различни елемента. В Раздел 2.3 са описани основните техники за получаване на йерархични двунивови разделяния, а именно DA, FR и P разделянията, виж например [53].

Ортотропната елиптическа задача (1.1.13) е във фокуса на Раздел 2.4. Доказана е следната лема:

**Лема 2.4.1.** Константата  $\gamma$  в усиленото неравенство на КБШ, съответстваща на йерархично двунивово разделяне на конформното квадратично крайноелементно пространство, е равномерно ограничена по отношение на коефициента на анизотропия на ортотропния оператор и

$$\gamma^2 \leq 3/4. \quad (2.4.13)$$

**Следствие 2.4.1.** Спектралното число на обусловеност на двунивовия преобусловител, асемблиран от макроелементните допълнения на Шур, е равномерно ограничено по отношение на размерността на задачата и коефициента на анизотропия на ортотропния елиптически оператор, т.е.

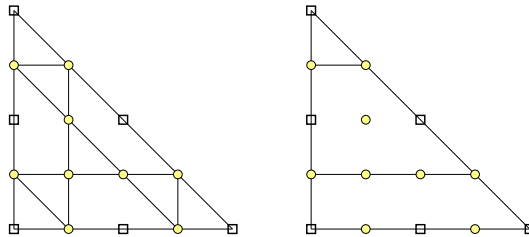
$$\kappa(Q^{-1}S) \leq 4. \quad (2.4.15)$$

За ортотропната задача в Раздел 2.4.2 представяме построяването на спектрално еквивалентен преобусловител на  $A_{11}$ , базиран на асемблирането на локални преобусловители на макроелементните водещи блокове. Ако

$$B_{11} = \sum_E B_{E:11}, \quad (2.4.16)$$

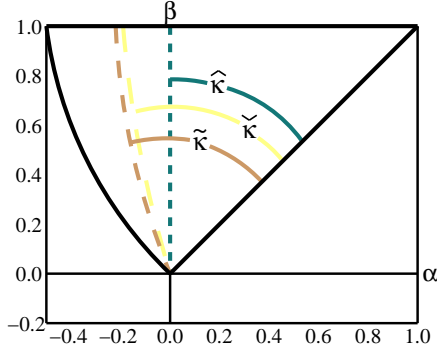
за съответното спектрално число на обусловеност ще е в сила оценката

$$\kappa(B_{11}^{-1}A_{11}) \leq \kappa(B_{E:11}^{-1}A_{E:11}). \quad (2.4.17)$$

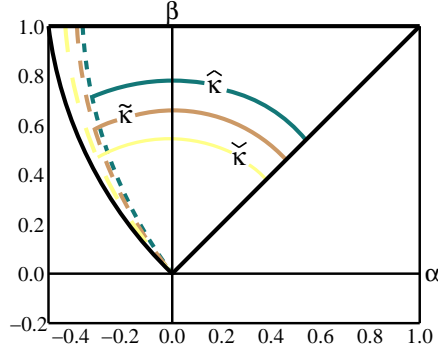


Фигура 2.3: Свързаност на  $A_{E:11}$  (ляво) и  $B_{E:11}$  (дясно)

Преобулавящата матрица  $B_{E:11}$  се получава от  $A_{E:11}$  посредством изключването на всички извъндиагонални елементи, които отговарят на вертикални или диагонални ребра в графа, съответстващ на макроелементния главен блок, виж Фиг. 2.3, и



Фигура 2.4:  $\{\alpha, \beta\} : \gamma_E^2 \leq \frac{3}{4}$ .



Фигура 2.5:  $\{\alpha, \beta\} : \gamma_E^2 \leq \frac{8}{9}$ .

добавянето на техните стойности към диагоналните елементи в съответните редове. С подходяща номерация на неизвестните, полученият в резултат глобален преобусловител  $B_{11}$  става тридиагонална матрица. Следователно броят аритметични операции за решаването на линейна система с  $B_{11}$  е пропорционален на броя на неизвестните в тази система. Сега можем да формулираме следната лема:

**Лема 2.4.2.** Спектралното число на обусловеност на преобусловителя (2.4.16), както дефиниран по-горе, е равномерно ограничен по отношение на размерността на задачата и коефициента на анизотропия на ортотропния елиптически оператор, т.е.

$$\kappa(B_{11}^{-1}A_{11}) \leq 4. \quad (2.4.18)$$

Следващата теорема представя основния резултат:

**Теорема 2.4.2.** АМЛІ преобусловителят за ортотропната елиптическа задача, дискретизирана с конформни квадратични крайни елементи, и параметри  $\varrho = 4$  и  $\nu = 3$  има изчислителна сложност от оптимален ред, която е равномерна по отношение на мрежова и коефициентна анизотропия.

В Раздел 2.5 представяме числени експерименти първо за DA, FR, и P йерархичните разделяния. При локалното изследване без загуба на общността можем да считаме, че за ъглите  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\theta_3$  на произволния елемент  $e$  е изпълнено  $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3$ . Тогава ако  $a$ ,  $b$  и  $c$  са котангенсите на ъглите, то  $|a| \leq b \leq c$ ,  $a = (1 - bc)/(b + c)$ , виж [53]. Полагайки  $\alpha = a/c$  и  $\beta = b/c$ , можем да оценим локалните КБШ константи в термините на  $(\alpha, \beta)$  с допустима област  $D$ :

$$D = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^2 : -\frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \max\left\{-\frac{\alpha}{\alpha+1}, |\alpha|\right\} \leq \beta \leq 1 \right\}. \quad (2.5.21)$$

Множествата  $\{\alpha, \beta\}$ , за които локалните КБШ константи удовлетворяват неравенството  $\gamma_E^2 < 3/4$ , са показани на Фиг. 2.4. Според АМЛІ условието за оптималност (1.3.90), този случай отговаря на стабилизиращ полином от степен  $\nu = 2$ . Аналогично, Фиг. 2.5 показва областта на същите параметри, за които  $\gamma_E^2 < 8/9$ , т.е.  $\nu = 3$ .

На базата на получените числени резултати чрез софтуерния продукт Mathematica, се заключава, че за фиксиран минимален ъгъл  $\theta_3$ , най-голямата стойност за

Таблица 2.1:  $\gamma_E^2$  за равнобедрени триъгълници

$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\gamma_{DA,E}^2$	$\gamma_{FR,E}^2$	$\gamma_{P,E}^2$
100°	40°	40°	0.7913	0.7265	0.7245
120°	30°	30°	0.8598	0.8024	0.8333
140°	20°	20°	0.9086	0.8836	0.9220
160°	10°	10°	0.9490	0.9490	0.9798

КБШ константата отговаря на равнобедрени триъгълници с  $\theta_2 = \theta_3$ . Това е мотивацията за избора на представени данни в таблица 2.1.

Таблица 2.2 е свързана с ортотропната елиптична задача. Там са показани някои стойности на числото на обусловеност на  $Q^{-1}S$  за различна размерност на задачата и коефициент на анизотропия.

Таблица 2.2: Относително число на обусловеност за разредена апроксимация на допълнението на Шур

$\kappa(Q^{-1}S)$	$\zeta = 10^0$	$\zeta = 10^{-1}$	$\zeta = 10^{-2}$	$\zeta = 10^{-3}$
$1/h = 8$	1.8755	2.2326	1.6447	1.1362
$1/h = 16$	1.8864	2.4259	2.2913	1.3415
$1/h = 32$	1.8911	2.4872	2.7174	1.9022
$1/h = 64$	1.8931	2.5061	2.8713	2.5305

Получените числени резултати показват, че подходите, базирани на йерархичен базис, не са робастни в случая на произволен елиптичен оператор и елементи от по-висок ред.

От Фиг. 2.4, 2.5 все пак може да се забележи, че регионът, определен от FR разделянето е винаги по-голям от регионът, определен от DA разделянето, т.е.  $\gamma_{FR} \leq \gamma_{DA}$ , което е в пълно съответствие с теорията на обобщените FR разделяния, виж [53]. Също така, наблюдава се предимството на FR разделянето за задачи с по-силна анизотропия (виж също Таблица 2.1), като за някои случаи с по-умерена анизотропия имаме, че  $\gamma_P \leq \gamma_{FR}$ .

В частност, вижда се, че за FR разделянето *AMLI* методът със стабилизиращ полином от трета степен удовлетворява условието за оптималност (1.3.90), ако минималният ъгъл  $\theta_3 \geq 20^\circ$ . Важно е да се отбележи, че такива условия могат да се контролират от много от съвременните мрежови генератори, например мрежовия генератор TRIANGLE, чиито качества са изследвани по-подробно например в [46].

## Глава 3. Йерархични базисни разделяния за биквадратични и бикубични елементи

Построяването на първи робастни многонивови преобусловители за йерархични базисни разделяния на пространствата на конформните биквадратични и бикубични функции е представено в тази глава. Те са получени за крайноелементни дискретизации на ортотропната елиптична гранична задача от втори ред, където областта е правоъгълен полигон и съгъстяването на мрежата на всяка стъпка се извършва по едно от координатните направления. В литературата тези процедури се означават съкратено със SC (semi-coarsening). Раздел 3.1 представя мотивацията за избора на процедура на съгъстяване, като изтъква нейното успешно приложение за билинейни дискретизации и възможността за паралелно реализиране. Раздел 3.2 е посветен на биквадратичните елементи, за които са разгледани равномерният и балансираният вариант на SC процедурата съответно в Раздел 3.2.1 и Раздел 3.2.2. За биквадратичен конформен елемент е пресметната елементната матрица на коравина. Доказана е следната лема:

**Лема 3.2.1.** Константата  $\gamma$  в усиленото неравенство на КБШ, съответстваща на равномерна SC процедура на съгъстяване за конформни биквадратични елементи, е равномерно ограничена по отношение коефициента на анизотропия за  $\varrho = 2, 3, 4, 5$ , като са в сила следните оценки

$$\begin{aligned} \gamma^2 &\leq 27/32 && \approx 0.844, && \varrho = 2, \\ \gamma^2 &\leq 16/21 && \approx 0.762, && \varrho = 3, \\ \gamma^2 &\leq (577 + \sqrt{13441})/768 && \approx 0.902, && \varrho = 4, \\ \gamma^2 &\leq 176/205 && \approx 0.859, && \varrho = 5. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Показано е, че всеки пряк метод за системи с лентови матрици, ако бъде приложен към системата с водещия блок, ще бъде с изчислителна сложност от оптимален ред.

Основният резултат е формулиран в:

**Теорема 3.2.1.** SC AMLI преобусловителят за конформни биквадратични крайни елементи и параметри  $\varrho = 5$  и  $\nu = 3$  или  $\nu = 4$  има изчислителна сложност от оптимален ред, равномерна по отношение на мрежова и коефициентна анизотропия.

Числените експерименти, представени в Таблица 3.1, изследват поведението на КБШ константата  $\gamma$  и на параметъра  $\Pi(\gamma)$  като функция на  $\varepsilon$ , където

$$\Pi(\gamma) := 1/\sqrt{1 - \gamma^2}, \quad \varepsilon := (\mathbf{a}_{22}/\mathbf{a}_{11})(h_x^{(k)}/h_y)^2,$$

за различни стойности на коефициента на съгъстяване  $\varrho$ .

За балансираната SC процедура за биквадратични елементи е доказана:

**Лема 3.2.2.** При балансиран SC подход с  $\varrho = 2$  константата  $\gamma^{(2)}$  в усиленото неравенство на КБШ, съответстваща на биквадратични конформни крайни елементи, е равномерно ограничена по отношение на коефициента на анизотропия, като е в сила оценката

$$(\gamma^{(2)})^2 \leq 113/128 \approx 0.883, \quad \varrho = 2. \tag{3.2.26}$$



Таблица 3.1: Числено пресметнати оценки на  $\gamma$ , биквадратични елементи

$\varepsilon$	$\varrho = 2$		$\varrho = 3$		$\varrho = 4$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$
0.0001	1.155	0.250	1.106	0.182	1.155	0.250
0.001	1.155	0.251	1.106	0.182	1.155	0.251
0.01	1.161	0.257	1.109	0.186	1.161	0.257
0.1	1.210	0.316	1.136	0.225	1.210	0.318
1.	1.539	0.578	1.342	0.444	1.567	0.592
10.	2.228	0.799	1.782	0.685	2.459	0.835
100.	2.491	0.839	2.008	0.752	3.064	0.893
1000.	2.526	0.843	2.045	0.761	3.184	0.901
10000.	2.529	0.844	2.049	0.762	3.198	0.902
$\varepsilon$	$\varrho = 5$		$\varrho = 6$		$\varrho = 7$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$
0.0001	1.126	0.211	1.155	0.250	1.134	0.222
0.001	1.126	0.211	1.155	0.251	1.134	0.223
0.01	1.130	0.216	1.161	0.257	1.138	0.229
0.1	1.166	0.265	1.211	0.318	1.179	0.280
1.	1.426	0.508	1.568	0.593	1.466	0.534
10.	2.056	0.763	2.585	0.850	2.199	0.793
100.	2.512	0.842	3.554	0.921	2.867	0.878
1000.	2.642	0.857	3.819	0.931	3.108	0.896
10000.	2.657	0.858	3.851	0.933	3.142	0.899
$\varepsilon$	$\varrho = 8$		$\varrho = 9$		$\varrho = 10$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$
0.0001	1.155	0.250	1.139	0.228	1.155	0.250
0.001	1.155	0.251	1.139	0.229	1.155	0.251
0.01	1.161	0.257	1.143	0.235	1.161	0.257
0.1	1.211	0.318	1.186	0.289	1.211	0.318
1.	1.569	0.594	1.488	0.549	1.569	0.594
10.	2.633	0.856	2.290	0.809	2.653	0.858
100.	3.904	0.934	3.131	0.898	4.144	0.942
1000.	4.369	0.948	3.497	0.918	4.841	0.957
10000.	4.432	0.949	3.560	0.921	4.949	0.959

Доказано е съществуването на пряк метод, който приложен към системата с водещия блок, е с изчислителна сложност от оптимален ред. От този резултат и предишната лема следва основният резултат:

**Теорема 3.2.2.** Балансираният SC AMLI преобусловител с параметри  $\varrho = 2$ ,  $\nu = 3$ ,  $k_0 = 2$  и четно  $k$  има изчислителна сложност от оптимален ред, равномерно ограничена по отношение на мрежова и коефициентна анизотропия.

Числено изследване на поведението на константата на КБШ  $\gamma^{(2)}$  и на параметъра  $\Pi(\gamma^{(2)})$  като функция на коефициента на анизотропия  $\varepsilon$  е представено в Таблица 3.2 за различни стойности на коефициента на съгъстяване  $\varrho$ , където

$$\Pi(\gamma^{(2)}) := 1/\sqrt{1 - (\gamma^{(2)})^2}, \quad \varepsilon := (\mathbf{a}_{22}/\mathbf{a}_{11})(h_x^{(k)}/h_y^{(k)})^2.$$

Таблица 3.2: Числено пресметнати оценки на  $\gamma^{(2)}$ , биквадратични елементи

$\varepsilon$	$\varrho^2 = 4$		$\varrho^2 = 9$		$\varrho^2 = 16$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	2.921	0.883	2.265	0.805	3.691	0.927
0.001	2.915	0.882	2.259	0.804	3.672	0.926
0.01	2.866	0.878	2.206	0.794	3.509	0.919
0.1	2.511	0.841	1.927	0.731	2.828	0.875
1.	1.799	0.691	1.504	0.558	2.057	0.764
10.	2.511	0.841	1.927	0.731	2.828	0.875
100.	2.866	0.878	2.206	0.794	3.509	0.919
1000.	2.915	0.882	2.259	0.804	3.672	0.926
10000.	2.921	0.883	2.265	0.805	3.691	0.927
$\varepsilon$	$\varrho^2 = 25$		$\varrho^2 = 36$		$\varrho^2 = 49$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	2.990	0.888	4.446	0.949	3.562	0.921
0.001	2.968	0.886	4.400	0.948	3.512	0.919
0.01	2.790	0.872	4.055	0.939	3.207	0.903
0.1	2.279	0.807	3.048	0.892	2.491	0.839
1.	1.697	0.653	2.177	0.789	1.813	0.696
10.	2.279	0.807	3.048	0.892	2.491	0.839
100.	2.790	0.872	4.055	0.939	3.207	0.903
1000.	2.968	0.886	4.400	0.948	3.512	0.919
10000.	2.990	0.888	4.446	0.949	3.562	0.921
$\varepsilon$	$\varrho^2 = 64$		$\varrho^2 = 81$		$\varrho^2 = 100$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	5.116	0.962	4.051	0.939	5.711	0.969
0.001	5.026	0.960	3.961	0.936	5.560	0.968
0.01	4.448	0.949	3.513	0.919	4.731	0.955
0.1	3.193	0.902	2.642	0.857	3.300	0.908
1.	2.256	0.804	1.895	0.722	2.316	0.814
10.	3.193	0.902	2.642	0.857	3.300	0.908
100.	4.448	0.949	3.513	0.919	4.731	0.955
1000.	5.026	0.960	3.961	0.936	5.560	0.968
10000.	5.116	0.962	4.051	0.939	5.711	0.969

Раздел 3.3 разглежда крайноелементни дискретизации с бикубични елементи, като в Раздел 3.3.1 е разгледана равномерният вариант на SC процедурата на съгъстяване на мрежата, а в Раздел 3.3.2 - балансираният. Представена е следната лема:

**Лема 3.3.1.** КБШ константата  $\gamma$ , свързана с SC равномерна процедура на съгъстяване на мрежата за конформни бикубични крайни елементи с параметри  $\varrho = 2$ ,  $\varrho = 3$  и  $\varrho = 4$ , е равномерно ограничена по отношение на коефициента на анизотропия, като са в сила оценките

$$\begin{aligned}
 \gamma^2 &\leq (19 + \sqrt{46})/36 && \approx 0.71618, && \varrho = 2, \\
 \gamma^2 &\leq (9713 + \sqrt{5007793})/13122 && \approx 0.91075, && \varrho = 3, \\
 \gamma^2 &\leq (285 + \sqrt{4062})/408 && \approx 0.85474, && \varrho = 4.
 \end{aligned} \tag{3.3.36}$$

Показано е, че за решаването на системите с водещите блокове може да се се

използва пряк метод с изчислителна сложност от оптимален ред. Като следствие е доказана следващата теорема:

**Теорема 3.3.1.** SC AMLI преобусловителят с параметри  $\varrho = 4$  и  $\nu = 3$  има оптимален ред на изчислителна сложност равномерно по отношение на мрежова и коэффициентна анизотропия.

В Таблица 3.3 е представено числено изследване на константата на КБШ  $\gamma$  и на параметъра  $\Pi(\gamma)$  като функция на коэффициента на анизотропия  $\varepsilon$  за различни стойности на параметъра на сгъстяване  $\varrho$ , където

$$\Pi(\gamma) := 1/\sqrt{1 - \gamma^2}, \quad \varepsilon := (\mathbf{a}_{22}/\mathbf{a}_{11})(h_x^{(k)}/h_y^{(k)})^2.$$

Таблица 3.3: Числено пресметнати оценки на  $\gamma$ , бикубични елементи

$\varepsilon$	$\varrho = 2$		$\varrho = 3$		$\varrho = 4$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$
0.0001	1.265	0.375	1.424	0.507	1.347	0.449
0.001	1.266	0.376	1.429	0.510	1.352	0.453
0.01	1.273	0.383	1.480	0.543	1.405	0.494
0.1	1.343	0.445	1.852	0.708	1.723	0.663
1.	1.635	0.626	2.763	0.869	2.279	0.807
10.	1.820	0.698	3.258	0.906	2.570	0.849
100.	1.870	0.714	3.338	0.910	2.611	0.854
1000.	1.876	0.716	3.346	0.911	2.623	0.855
10000.	1.877	0.716	3.347	0.911	2.624	0.855
$\varepsilon$	$\varrho = 5$		$\varrho = 6$		$\varrho = 7$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$
0.0001	1.363	0.462	1.425	0.508	1.382	0.476
0.001	1.373	0.469	1.446	0.522	1.403	0.492
0.01	1.463	0.533	1.629	0.623	1.585	0.602
0.1	1.902	0.724	2.460	0.835	2.225	0.798
1.	2.536	0.844	3.866	0.933	3.000	0.889
10.	2.815	0.873	4.560	0.952	3.340	0.910
100.	2.857	0.878	4.668	0.954	3.393	0.913
1000.	2.862	0.878	4.679	0.954	3.398	0.913
10000.	2.862	0.878	4.680	0.954	3.399	0.913
$\varepsilon$	$\varrho = 8$		$\varrho = 9$		$\varrho = 10$	
	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$	$\Pi(\gamma_{max})$	$\gamma_{max}^2$
0.0001	1.388	0.481	1.428	0.510	1.398	0.488
0.001	1.417	0.502	1.474	0.540	1.445	0.521
0.01	1.649	0.632	1.823	0.699	1.779	0.684
0.1	2.372	0.822	2.977	0.887	2.644	0.857
1.	3.207	0.903	4.730	0.955	3.585	0.922
10.	3.580	0.922	5.586	0.968	4.001	0.938
100.	3.638	0.924	5.719	0.969	4.066	0.940
1000.	3.644	0.925	5.733	0.970	4.073	0.940
10000.	3.645	0.925	5.7345	0.970	4.074	0.940

При балансирания вариант на SC процедурата на сгъстяване на мрежата за бикубични елементи може да се докаже:

**Лема 3.3.2.** За балансираната SC процедура на сгъстяване на мрежата с  $\varrho = 2$  константата  $\gamma^{(2)}$  в усиленото неравенство на КБШ, съответстваща на бикубични конформни крайни елементи, е равномерно ограничена по отношение на коефициента на анизотропия, като е в сила оценката

$$(\gamma^{(2)})^2 \leq (203 + 5\sqrt{46})/288 \approx 0.823, \quad \varrho = 2. \quad (3.3.45)$$

Доказано е съществуването на преки методи, които приложени към системите с водещите блокове, имат изчислителна сложност от оптимален ред.

Основният резултат е представен в следващата теорема:

**Теорема 3.3.2.** Балансираният SC AMLI преобусловител с параметри  $\varrho = 2$ ,  $\nu = 3$ ,  $k_0 = 2$  и четно  $k$  има изчислителна сложност от оптимален ред, равномерно ограничена по отношение на мрежова и коефициентна анизотропия.

Таблица 3.4 представя числено изследване на КБШ константата  $\gamma^{(2)}$  и  $\Pi(\gamma^{(2)})$  като функция на  $\varepsilon$  за различни стойности на коефициента на сгъстяване  $\varrho$ , където

$$\Pi(\gamma^{(2)}) := 1/\sqrt{1 - (\gamma^{(2)})^2}, \quad \varepsilon := (\mathbf{a}_{22}/\mathbf{a}_{11})(h_x^{(k)}/h_y^{(k)})^2.$$

Числените експерименти в Таблицы 3.1–3.4 потвърждават асимптотичната точност на доказаните теоретични резултати. Равномерните оценки в Лемите 3.2.1–3.3.2 и съответно твърденията в Теореме 3.2.1–3.3.2 представят най-песимистичните варианти по отношение на коефициентната и/или мрежова анизотропия. В този смисъл числено пресметнатите стойности на  $\gamma$  и  $\gamma^{(2)}$  могат да имат допълнителна практическа стойност. Базирайки се на тях, стойностите на  $\varrho$  и  $\nu$  (включително и на  $\nu_k$ ) могат да се варират, за да се получи по-ефективна AMLI постановка за дадена конкретна задача.

Също така, внимание заслужава фактът, че получените резултати са валидни за процедура на сгъстяване, дефинираща SC процес, който еквивалентно може да бъде приложен по което и да е от координатните направления.

Трябва да се отбележи и структурната прилика на SC алгоритмите със стабилизираните методи на променливите направления (stabilized scalable direction splitting methods), виж [38]. Предимство на SC процедурата обаче е възможността да се разглеждат области, състоящи се от правоъгълни (хексагонални) подобласти с прекъснати ортотропни коефициенти.

В заключение Таблица 3.5 представя минималните стойности на параметрите на сгъстяване и степени на стабилизиращ полином, удовлетворяващи условията за конструиране на оптимални йерархични AMLI методи, базирани на равномерно SC сгъстяване на мрежата за билинейни, биквадратични и бикубични крайноелементни системи.

## Глава 4. Неийерархични базисни разделяния за квадратични елементи

Глава 4 е посветена на изследването на алтернативна техника, избягваща използването на йерархичен базис, за получаването на робастни многоноивови преобусловители. Мотивацията в Раздел 4.1 подчертава нуждата от нов подход за ефективното

Таблица 3.4: Числено пресметнати оценки на  $\gamma^{(2)}$ , бикубични елементи

$\varepsilon$	$\varrho^2 = 4$		$\varrho^2 = 9$		$\varrho^2 = 16$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	2.373	0.822	4.759	0.956	3.528	0.920
0.001	2.362	0.821	4.729	0.955	3.495	0.918
0.01	2.294	0.810	4.530	0.951	3.308	0.909
0.1	2.094	0.772	3.784	0.930	2.733	0.866
1.	1.773	0.682	3.070	0.894	2.208	0.795
10.	2.094	0.772	3.784	0.930	2.733	0.866
100.	2.294	0.810	4.530	0.951	3.308	0.909
1000.	2.362	0.821	4.729	0.955	3.495	0.918
10000.	2.373	0.822	4.759	0.956	3.528	0.920
$\varepsilon$	$\varrho^2 = 25$		$\varrho^2 = 36$		$\varrho^2 = 49$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	3.893	0.934	6.640	0.977	4.676	0.954
0.001	3.850	0.933	6.502	0.976	4.585	0.952
0.01	3.613	0.923	5.817	0.970	4.157	0.942
0.1	2.930	0.883	4.265	0.945	3.222	0.904
1.	2.335	0.817	3.278	0.901	2.516	0.842
10.	2.930	0.883	4.265	0.945	3.222	0.904
100.	3.613	0.923	5.817	0.970	4.157	0.942
1000.	3.850	0.933	6.502	0.976	4.585	0.952
10000.	3.893	0.934	6.640	0.977	4.676	0.954
$\varepsilon$	$\varrho^2 = 64$		$\varrho^2 = 81$		$\varrho^2 = 100$	
	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$	$\Pi(\gamma_{max}^{(2)})$	$(\gamma_{max}^{(2)})^2$
0.0001	5.030	0.960	8.108	0.985	5.642	0.969
0.001	4.907	0.958	7.793	0.984	5.453	0.966
0.01	4.372	0.948	6.503	0.976	4.721	0.955
0.1	3.334	0.910	4.525	0.951	3.514	0.919
1.	2.584	0.850	3.439	0.915	2.695	0.862
10.	3.334	0.910	4.525	0.951	3.514	0.919
100.	4.372	0.948	6.503	0.976	4.721	0.955
1000.	4.907	0.958	7.793	0.984	5.453	0.966
10000.	5.030	0.960	8.108	0.985	5.642	0.969

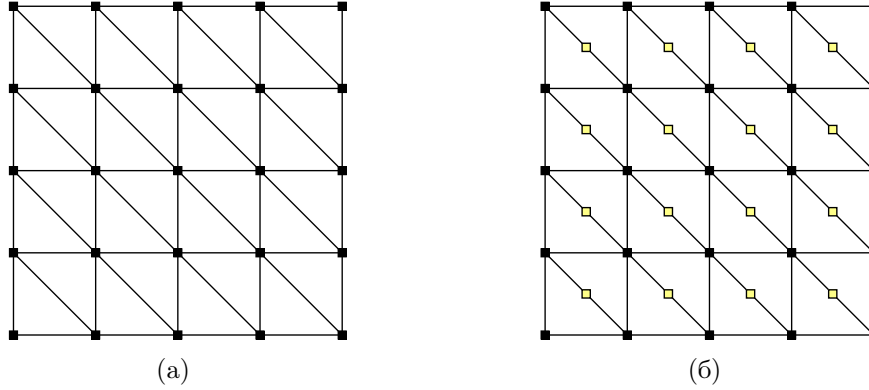
Таблица 3.5: Минимален коефициент на сгъстяване ( $\varrho_{min}$ ) и минимална степен на стабилизация полином ( $\nu_{min}$ ) за удовлетворяване на условията (1.3.90).

Type of element	$\varrho_{min}$	$\nu_{min}$
$Q_1$	4	3
$Q_2$	5	3
$Q_3$	4	3

решаване на силно анизотропни елиптични крайноелементни системи, базирани на конформни квадратични елементи, и изброява някои от предимствата на предложенния иновативен подход.

Раздел 4.2 представя рекурсивната конструкция на многонивови методи, базира-

ни на апроксимация на допълнението на Шур върху редица от вложени разширени мрежи, като първо се аргументира този избор на мрежи в Раздел 4.2.1.



Фигура 4.2: Стандартна (а) и разширена (б) груби мрежи

**Забележка 4.2.1.** Класическите AMG методи, виж [69], са първоначално създадени за  $M$ -матрици. Ако матрицата на коравина не е  $M$ -матрица, е възможно да се използва спомагателна апроксимация, която е  $M$ -матрица, виж [34] и [55]. Такъв подход обаче е неприложим при крайноелементни дискретизации от по-висок ред на силно анизотропни задачи. Причината е, че съответните апроксимации с  $M$ -матрици не са робастни.

**Забележка 4.2.2.** В [52] е представено робастно двунивово разделяне на пространството от конформни на части квадратични функции за ортотропната елиптическа задача. Числените резултати в [35] показват, че за неортотропни задачи с "лека" анизотропия могат да се построят равномерни многонивови преобусловители на базата на йерархична декомпозиция. Това определя нашия интерес към по-детайлното изследване на крайноелементни матрици, произлизащи от силно анизотропни неортотропни задачи.

Преди да представим алгоритъма за построяването на приближенията  $Q^{(k)}$  на точните допълнения на Шур за  $k = 0, 1, 2, \dots, \ell$ , в Раздел 4.2.2 въведем някои означения, [50]. Нека  $H_A = (V_A, E_A)$  е неориентираният граф, който се асоциира със симетричната матрица  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , където  $V_A := \{v_i : 1 \leq i \leq N\}$  означава множеството от върхове на графа (които в настоящия контекст са еквивалентни с възли) и  $E_A := \{e_{ij} : 1 \leq i < j \leq N \text{ и } a_{ij} \neq 0\}$  е множеството от дъги на графа.

**Дефиниция 4.2.1.** Всеки подграф  $F$  на  $H_A$  ще наричаме структура. С  $\mathcal{F}$  ще означаваме множеството от структури, чиито съответни (локални) структурни матрици  $A_F$  удовлетворяват свойството

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} R_F^T A_F R_F = A. \quad (4.2.9)$$

Операторът на рестрикцията  $R_F$  (или  $R_G$  по-долу) ограничава глобален вектор (дефиниран върху  $H_A$ ) върху дадена структура  $F$  (или макроструктура  $G$ ).

**Дефиниция 4.2.2.** Макроструктура  $G$  е обединение от структури  $F \in \mathcal{F}$ . Множеството от макроструктури се задава от  $\mathcal{G} := \{G = G_i : i = 1, 2, \dots, n_G\}$ . Ще считаме, че всяко подмножество от асоциирани макроструктурни матрици  $\mathcal{A}_G = \{A_G : G \in \mathcal{G}\}$  има асемблиращото свойство

$$\sum_{G \in \mathcal{G}} R_G^T A_G R_G = A. \quad (4.2.10)$$

Предполагаме, че структурите и макроструктурите са вложени. Това означава, че за всяка структура  $F \in \mathcal{F}$  съществува макроструктура  $G \in \mathcal{G}$ , такава че  $F \subset G$ . Следователно, от (4.2.9) и (4.2.10) следва, че  $A_G$  може да се запише във вида

$$A_G = \sum_{F \subset G} \sigma_{F,G} R_{G \rightarrow F}^T A_F R_{G \rightarrow F} \quad (4.2.11)$$

където  $\sigma_{F,G}$  са скалиращи коефициенти, такива че

$$\sum_{G \supset F} \sigma_{F,G} = 1 \quad \forall F \in \mathcal{F}. \quad (4.2.12)$$

**Забележка 4.2.3.** Един прост избор на множество от скалиращи коефициенти, които удовлетворяват условието (4.2.12), използван по-късно при численото тестване е да изберем  $\sigma_{F,G} = \sigma_{F,G'}$  винаги, когато  $F \subset G$  и  $F \subset G'$ , и да определим  $\sigma_{F,G}$  според формулата

$$\sigma_{F,G} = \frac{1}{\sum_{G \supset F} 1}. \quad (4.2.13)$$

Тъй като тогава  $\sigma_{F,G}$  зависи само от броя на макроструктурите, които съдържат  $F$ , но не и от конкретното  $G$ , теглата на структурите също ще бъдат означавани с  $\sigma_F$  в този случай.

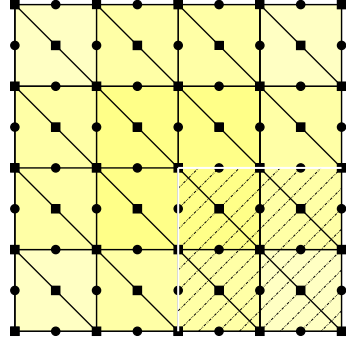
**Дефиниция 4.2.3.** Ако сечението на две различни структури (или макроструктури) е празно, т.е.,  $F_i \cap F_j = \emptyset$  (или  $G_i \cap G_j = \emptyset$ ) за всички  $i \neq j$ , ще наричаме множеството  $\mathcal{F}$  (или  $\mathcal{G}$ ) непрепокриващо се покритие; в противен случай ще наричаме  $\mathcal{F}$  (или  $\mathcal{G}$ ) препокриващо се покритие.

## Алгоритъм

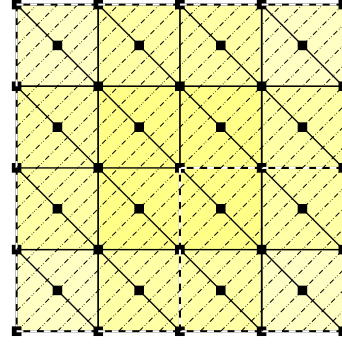
След като сме въвели съответните означения, ще представим описание на алгоритъма за пресмятането на  $Q^{(k)}$ ,  $0 \leq k \leq \ell$ .

### I. Апроксимация на $Q^{(0)}$ :

Да разгледаме множество от структури  $\mathcal{F}^{(0)} = \{F\}$ , осигуряващо препокриващо се покритие на началния граф  $H^{(0)} = H_A$ . Всяка структура  $F$  е подграф на  $H^{(0)}$ , т.е., подграфът, състоящ се от 8 квадратични конформни елемента  $e$ , образуващи квадрат, виж Фиг. 4.8(а). Тук ние ще препокриваме структурите с половината от тяхната ширина или дължина. Сега вече можем да приложим следния алгоритъм:



(а) Девет прекриващи се структури, използвани в пресмятането на  $Q^{(0)}$



(б) Една макроструктура  $G_i$ , използвана в пресмятането на  $Q^{(k)}$ ,  $k \geq 1$ ;  $G_i$  е съставена от 9 прекриващи се структури

Фигура 4.8: Покрития на оригиналната (а) и разширената (груба) мрежа (б).

1. За всяка  $F \in \mathcal{F}^{(0)}$  асемблираме структурните матрици  $A_F$  и разделяме техните степени на свобода на две групи в съответствие с двунивовото разделяне на неизвестните в глобалната система.
2. Поради въведеното разделяне на възлите за  $\forall F \in \mathcal{F}^{(0)}$  пресмятаме

$$S_F = A_{F:22} - A_{F:21} A_{F:11}^{-1} A_{F:12}. \quad (4.2.14)$$

3. Глобална апроксимация  $Q^{(0)}$  на точното допълнение на Шур  $S^{(0)}$  върху първата разширена (груба) мрежа се асемблира от матриците  $S_F$

$$Q^{(0)} := S_{\mathcal{F}^{(0)}} := \sum_{F \in \mathcal{F}^{(0)}} R_{F:2}^T S_F R_{F:2}. \quad (4.2.15)$$

## II. Апроксимация на $Q^{(k)}$ , $k = 1, 2, \dots, \ell$ :

Нека  $H^{(k)}$  е графът на апроксимацията  $Q^{(k-1)}$  и нека  $\mathcal{F}^{(k)}$  и  $\mathcal{G}^{(k)}$  са прекриващи се покрития на  $H^{(k)}$  от структури и макроструктури съответно. Да разгледаме по-конкретно примера, в който всяка макроструктура  $G \in \mathcal{G}^{(k)}$  се състои от девет 13-възлови структури  $F \in \mathcal{F}^{(k)}$ , които се прекриват с половината от тяхната ширина или дължина, както е показано на Фиг. 4.8(б). Тогава прилагаме следния алгоритъм:

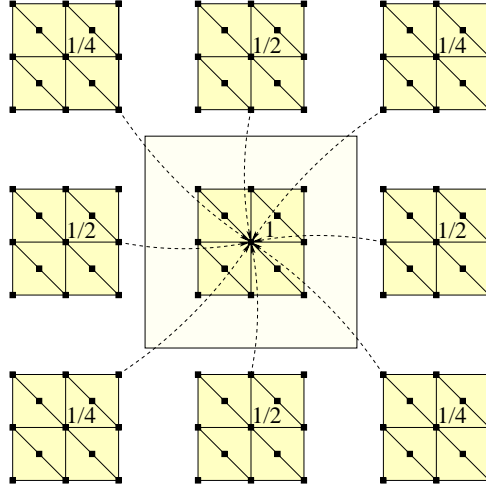
1. За всички  $G \in \mathcal{G}^{(k)}$  асемблираме макроструктурните матрици  $A_G$  според (4.2.11), използвайки теглата (4.2.13), така че (4.2.12) да бъде удовлетворено, виж Фиг. .
2. За всяка  $A_G$  прилагаме пермутация на редовете и стълбовете в съответствие с глобалното двунивово разделяне на степените на свобода и пресмятаме допълнението на Шур

$$S_G = A_{G:22} - A_{G:21} A_{G:11}^{-1} A_{G:12}. \quad (4.2.16)$$



3. Асемблираме разредена апроксимация  $Q^{(k)} := S_{G^{(k)}}$  на точното глобално допълнение на Шур  $S^{(k)} = A_{22}^{(k)} - A_{21}^{(k)}(A_{11}^{(k)})^{-1}A_{12}^{(k)}$  от локалните макроструктурни допълнения на Шур, т.е.,

$$Q^{(k)} := S_{G^{(k)}} = \sum_{G \in \mathcal{G}^{(k)}} R_{G:2}^T S_G R_{G:2}. \quad (4.2.17)$$



Фигура 4.9: Разпределение на теглата за изцяло вътрешна макроструктура, съставена от 9 препокриващи се структури.

Оператор на изглаждане е конструиран и анализиран в Раздел 4.3. Нека разгледаме апроксимацията  $Q = Q^{(0)}$ , където възлите (и съответните степени на свобода) в съответната разширена груба мрежа са подредени лексикографски по хоризонталните линии. Освен това нека  $D$  е матрицата на блочния Якоби оператор на изглаждане, където  $Q = D + L + L^T$ , т.е.,  $D$  и  $L$  означават съответно блочните диагонална и строго долнотриъгълна част на  $Q$ . Всеки от блоковете на  $D$  отговаря на група от възли, лежащи на една от хоризонталните линии в мрежата. В разширената груба мрежа има два типа такива блокове: първият се асоциира с хоризонтални линии, минаващи през възлите в стандартната груба мрежа, илюстрирани с черни квадратчета на Фиг. 4.2(б), а вторият се асоциира с добавените възли от разширената мрежа, виж жълтите квадратчета на Фиг. 4.2(б). Операторът на изглаждане е анализиран за задачата (1.1.1) с елементна коефициентна матрица  $\mathbf{a}_e$ , в която без загуба на общността сме положили  $\mathbf{a}_{e:11} = 1$ ,  $\mathbf{a}_{e:12} = \varsigma$  и  $\mathbf{a}_{e:22} = \zeta$ . Следващата лема е ключова за нашия анализ.

**Лема 4.3.1.** За моделната задача (1.1.1) с гранични условия на Дирихле, дискретизирана на равномерна мрежа със стъпка на мрежата  $h$  съществуват положителни константи  $c_L$  и  $c_D$ , такива че следните оценки са в сила:

- (a)  $\|L + L^T\| \leq c_L(\zeta + |\varsigma|)$
- (b)  $\lambda_{\min}(D) \geq c_D h^2$

**Лема 4.3.2.** Нека  $c < c_D/c_L$  и  $\zeta + |\varsigma| \leq (c_D/c_L - c)h^2$ . Тогава следното неравенство е изпълнено

$$\left(1 + \frac{\zeta + |\varsigma|}{ch^2}\right)(L + L^T) + \frac{\zeta + |\varsigma|}{ch^2}D \geq 0. \quad (4.3.20)$$

**Теорема 4.3.1.** Да разгледаме елиптичната моделна задача с гранични условия на Дирихле, дискретизирана върху равномерна мрежа с размер  $h$ . Нека с  $Q = Q^{(0)} = D + L + L^T$  да е означена съответната адитивна апроксимация на допълнението на Шур, където  $D$  е блочно диагоналната, а  $L$  - долно блочно диагонална част на  $Q$ . Тук всеки блок на  $D$  отговаря на възлите, разположени върху хоризонтална линия в разширената груба мрежа. Тогава итерационната матрица на блочния Якоби метод удовлетворява оценката

$$\|I - D^{-1}Q\|_Q^2 \leq 1 - \frac{1}{1 + c_0} =: 1 - c_1, \quad (4.3.22)$$

където  $c_0 := (\zeta + |\varsigma|)/(ch^2)$  и следователно  $c_1$  е в интервала  $(0, 1)$ .

**Следствие 4.3.2.** В случай, че са изпълнени условията на Теорема 4.3.1, итерационната матрица на блочния Гаус-Зайдел метод удовлетворява оценката

$$\|I - (D + L)^{-1}Q\|_Q^2 \leq 1 - \frac{1}{1 + (\zeta + |\varsigma|)/(\bar{c}h^2)}, \quad (4.3.24)$$

където  $\bar{c}$  е положителна константа, която не зависи от  $\zeta$ ,  $\varsigma$  и  $h$ .

Оценка на грешката от прилагането на двунивовия преобусловител  $\bar{B}_{\text{TL}}$  е дадена в Раздел 4.4, където доказателството е изцяло конструктивно. Показано е, че

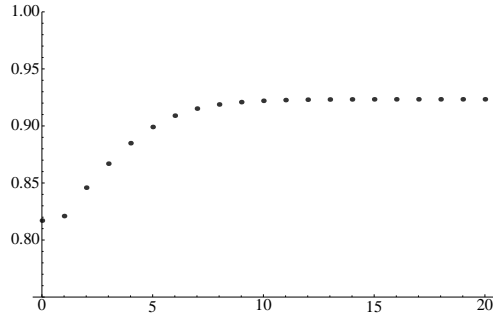
$$\|I - \bar{B}_{\text{TL}}^{-1}A\|_A^2 \leq 1 - \alpha \lambda_{\min}(Q^{-1}S) \leq 1 - \alpha, \quad (4.4.33)$$

където параметърът  $\alpha$  може да се оцени локално.

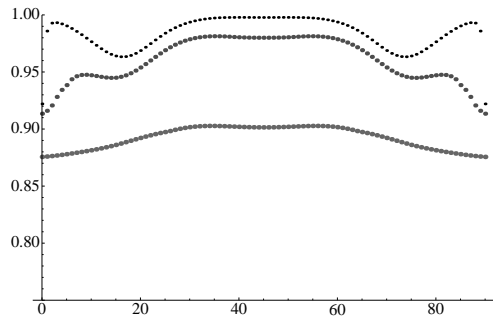
На Фиг. 4.10 е изобразен коефициентът на намаляване на грешката в стационарния итеративен метод с построения двунивов преобусловител за ортотропна елиптична задача. Резултатите показват равномерна сходимост, т.е., робастност по отношение на параметъра  $\zeta$ , който е вариран в интервала от  $2^0$  до  $2^{-20}$ . Както може да се види от Фиг. 4.11, резултатите са по-лоши за задача (1.1.15), но въпреки че сходимостта като цяло се влошава при  $\iota$  клонящо към 0, за (умерена) фиксирана стойност на  $\iota$  тя е също равномерна по отношение на  $\theta$ . Както числените резултати в следващата секция показват, оценките, получени от този локален анализ, са много песимистични.

Представените числени експерименти в Раздел 4.5 илюстрират поведението на нелинейния АМЛИ метод, базиран на рекурсивно прилагане на оператор на изглаждане  $M$  и двунивов преобусловител  $B_{\text{TL}}$  за няколко представителни тестови задачи.

Нелинейният АМЛИ метод е тестван върху равномерна мрежа, състояща се от  $2 \times n \times n$  квадратични елемента (триъгълника), където  $n = 2^{\ell+2}$ , т.е.,  $n = 8, 16, \dots, 256$ . За удобство, гранични условия на Дирихле са наложени върху цялата граница  $\Gamma = \partial\Omega$ , т.е.,  $\Gamma_D = \Gamma$  в (1a). Нека отбележим, че числените резултати при други гранични условия са много сходни.



Фигура 4.10: Ортоотропна задача,  $\zeta = 2^{-t}$ ,  $t \in \{0, 1, \dots, 20\}$ : Пресметнат коефициент на сходимост с помощта на (4.4.33), изобразен като функция на  $t$ .



Фигура 4.11: Задача със завъртаща се посока на доминираща анизотропия,  $\iota \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$ ,  $\theta \in \{0^\circ, 1^\circ, \dots, 90^\circ\}$ : Пресметнат коефициент на сходимост с помощта на (4.4.33), изобразен като функция на  $\theta$ .

Най-грубата разширена мрежа ( $\ell = 0$ ) се състои от 41 възела, което отговаря на равномерна мрежа с  $2 \times 2^2 \times 2^2 = 32$  елемента, както е показано на Фиг. 4.2(б). Най-фината мрежа е получена при  $\ell = 1, 2, \dots, 6$  стъпки на равномерно сгъстяване. За  $\ell = 6$  най-фината мрежа се състои от  $2 \times 256 \times 256$  квадратични елемента и има  $(512 + 1) \times (512 + 1)$  възела.

Представено е сравнение между три различни имплементации на нелинейния АМЛІ  $W$  метод, които се отличават по избора на оператор на изглаждане, както следва: (а): без изглаждане; (б): поточково изглаждане на Гаус-Зайдел (G-S); (с): блочно изглаждане на Гаус-Зайдел (G-S).  $W$  методът изпълнява 2 вътрешни итерации на GCG метода на всяко грубо ниво освен най-грубото, на което задачата се решава точно (чрез използването на пълна факторизация). За дясна част на (1.1.11) сме избрали нулевия вектор и сме инициализирали външната GCG итерация на преобуславяне с произволен вектор.

В първата група от експерименти разглеждаме елиптическата моделна задача с коефициенти  $\mathbf{a}_{e:11} = 1$ ,  $\mathbf{a}_{e:12} = \delta(1 - 10^{-a_1})10^{-a_2/2}$  и  $\mathbf{a}_{e:22} = 10^{-a_2}$  с  $\delta = \pm 1$  и  $a_1 \in \{0, 2, 4, 6\}$ ,  $a_2 \in \{0, 2, 4, 6\}$ . Таблици 4.1–4.7 показват, че скоростта на сходимост се влошава с увеличаването на неортоотропната анизотропия и размера на дискретната задача, когато не прилагаме глобален оператор на изглаждане. Това е резултат от растящия брой външни GCG итерации, които са необходими за достигане на зададената точност  $10^8$ . Въвеждането на поточково изглаждане по метода на Гаус-Зайдел подобрява значи-

телно скоростта на сходимост на предложения алгоритъм. Включването на глобален блочен оператор на изглаждане по метода на Гаус-Зайдел води до (почти) равномерна сходимост на итеративния метод. За пълнота на изложението числени резултати са представени и за глобалния блочен Якоби оператор на изглаждане в Таблица 4.8. За разглежданата силно анизотропна задача (1.1.14), нелинейните AMLI методи, използващи глобални блочни матрици за изглаждане по метода на Гаус-Зайдел и по метода на Якоби, показват много сходни скорости на сходимост.

Нелинеен AMLI W метод:  $a_1 = 0$

		Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$\ell$	$a_2$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0		7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
2		10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	9	9
4		8	8	9	9	9	8	8	9	9	9	7	7	8	8	8
6		7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	7

Таблица 4.1: Брой итерации за достигане на относителна грешка  $10^{-8}$

Нелинеен AMLI W метод:  $a_1 = 2, \delta = 1$

		Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$\ell$	$a_2$	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
0		12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
2		11	13	16	17	17	10	11	12	12	13	10	10	10	11	11
4		12	22	27	31	*	11	16	19	21	119	8	8	9	9	8
6		12	23	28	34	*	11	18	21	27	206	6	6	6	6	7

Таблица 4.2: Брой итерации за достигане на относителна грешка  $10^{-8}$

Нелинеен AMLI W метод:  $a_1 = 2, \delta = -1$

		Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$\ell$	$a_2$	10	11	12	12	12	10	11	12	12	12	10	11	12	12	12
0		10	11	12	12	12	10	11	12	12	12	10	11	12	12	12
2		11	14	17	18	18	11	12	12	13	14	10	10	10	11	11
4		12	22	27	31	32	11	16	19	22	22	8	8	9	9	9
6		12	23	28	32	*	11	17	21	25	233	6	6	6	6	7

Таблица 4.3: Брой итерации за достигане на относителна грешка  $10^{-8}$

Във втория набор от експерименти елементната коефициентна матрица е както в (1.1.15). В Таблицы 4.9–4.10 ъгълът  $\theta_e = \theta$  е константен върху цялата област, докато

Нелинеен AMLI W метод:  $a_1 = 4, \delta = 1$

$\ell$ $a_2$	Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
0	12	13	13	13	14	12	12	12	12	12	12	12	12	12	13
2	11	19	38	52	59	11	12	13	14	15	10	10	11	11	12
4	13	*	*	*	*	11	29	48	59	119	8	8	9	9	8
6	13	198	*	*	*	12	29	56	126	267	6	6	6	6	7

Таблица 4.4: Брой итерации за достигане на относителна грешка  $10^{-8}$

Нелинеен AMLI W метод:  $a_1 = 4, \delta = -1$

$\ell$ $a_2$	Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
0	5	5	8	10	11	4	5	8	9	10	4	5	8	9	10
2	12	20	38	55	60	11	13	14	14	16	10	11	11	12	13
4	13	527	*	*	*	12	27	48	59	60	8	8	9	9	9
6	13	197	*	*	*	12	29	60	129	241	6	6	6	6	7

Таблица 4.5: Брой итерации за достигане на относителна грешка  $10^{-8}$

Нелинеен AMLI W метод:  $a_1 = 6, \delta = 1$

$\ell$ $a_2$	Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
0	12	13	13	13	14	12	12	12	12	13	12	12	12	12	13
2	11	19	42	101	417	11	12	13	14	16	10	10	11	11	12
4	13	*	*	*	*	11	27	56	91	126	8	8	9	9	8
6	13	*	*	*	*	12	30	59	117	232	6	6	6	6	7

Таблица 4.6: Брой итерации за достигане на относителна грешка  $10^{-8}$

Нелинеен AMLI W метод:  $a_1 = 6, \delta = -1$

$\ell$ $a_2$	Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
0	3	3	3	4	5	2	3	3	3	4	2	3	3	3	4
2	12	20	42	99	336	11	13	14	15	18	10	11	11	12	13
4	13	*	*	*	*	12	28	56	96	148	8	8	9	9	9
6	13	*	*	*	*	12	30	59	121	209	6	6	6	6	7

Таблица 4.7: Брой итерации за достигане на относителна грешка  $10^{-8}$

Нелинеен AMLI W метод:  $a_1 = 6, \delta = -1$

		Блочно Якоби Изгл.					
		1	2	3	4	5	6
$\ell$	$a_2$						
	0	3	3	3	3	4	5
	2	10	10	12	12	15	18
	4	8	8	8	9	10	10
	6	6	6	6	6	6	7

Таблица 4.8: Брой итерации за достигане на относителна грешка  $10^{-8}$

Таблица 4.11 представя резултатите, които са получени, когато  $\theta$  се изменя плавно от лявата до дясната граница на областта  $\Omega = (0, 1)^2$  според функцията

$$\theta = -\frac{\pi(1 - |2x - 1|)}{12} \quad \text{за } x \in (0, 1). \quad (4.5.44)$$

Символът  $\varpi$ , първоначално дефиниран в последната таблица, означава броя на стъпките при блочен Гаус-Зайдел оператор на изглаждане за една GCG итерация на всяка груба мрежа (освен най-грубата). Това означава че,  $\varpi = 0$  съответства на случая, в който не е приложено глобално изглаждане.

Получените резултати потвърждават още веднъж важността от въвеждането на блочен оператор на изглаждане в AMLI алгоритъма за построяването на робастен многонивов метод с (почти) константен брой (външни) итерации.

Нелинеен AMLI W метод:  $\iota = 10^{-6}$

		Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
		2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$\theta$	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	7
	$\pi/180$	13	42	119	*	*	11	19	27	54	81	8	9	9	10	10
	$\pi/36$	11	21	49	86	226	11	13	14	15	19	10	10	11	11	12
	$\pi/18$	11	13	18	25	35	11	11	11	12	12	10	10	10	11	11
	$\pi/6$	12	12	13	17	24	12	12	12	12	13	12	12	12	12	13
	$\pi/4$	12	13	13	13	14	12	12	12	12	13	12	12	12	12	13

Таблица 4.9: Брой итерации за достигане на относителна грешка  $10^{-8}$

Числените експерименти, представени в Таблицы 4.1–4.11, потвърждават големия потенциал на предложения нов подход за решаването на крайноеlementни системи, възникнали при дискретизацията на елиптични задачи с конформни квадратични елементи, в случая когато посоката на анизотропия на коефициентната матрица не е съгласувана с направленията на страните на елементите от въведената триангулация. Също така, проведените експерименти демонстрират, че някои теоретични оценки са потенциално песимистични.

Представени са числени експерименти, които показват добри възможности за прилагане на предложените методи за задачи, които са извън обхвата на разработената

Нелинеен AMLI W метод:  $\theta = \pi/36$

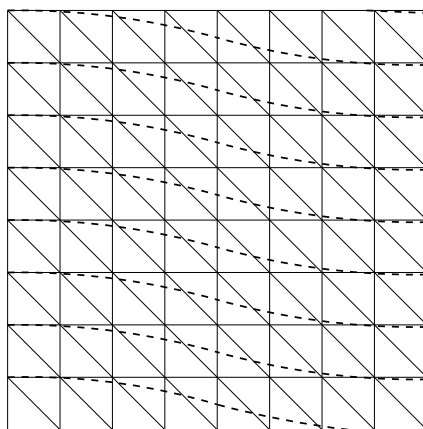
$\ell \backslash \iota$	Без Допъл. Изгл.					Поточково G-S Изгл.					Блочно G-S Изгл.				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$10^0$	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$10^{-2}$	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
$10^{-4}$	11	15	19	20	22	11	12	13	13	13	10	10	11	11	11
$10^{-6}$	11	21	49	86	226	11	13	14	15	19	10	10	11	11	12
$10^{-8}$	11	21	55	246	*	11	13	14	16	25	10	10	11	11	12

Таблица 4.10: Брой итерации за достигане на относителна грешка  $10^{-8}$

Нелинеен AMLI W метод:  $\theta = -\pi(1 - |2x - 1|)/12$

$\ell \backslash \varpi$	Поточково G-S Изгл.						Блочно G-S Изгл.					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
0	11	11	15	28	63	179	11	11	15	28	63	179
1	11	11	12	14	19	34	10	11	11	12	15	22
2	11	11	11	13	17	29	10	11	11	11	13	17
5	10	11	11	12	15	23	10	10	10	11	11	14
10	10	11	11	11	13	19	10	10	10	10	11	12
20	10	10	10	11	12	17	10	10	10	10	10	11

Таблица 4.11: Брой итерации за достигане на относителна грешка  $10^{-8}$



Фигура 4.12: Посока на доминираща анизотропия в  $\Omega = (0, 1)^2$  според (2).

теория. В този контекст си струва да отбележим, че блочният Гаус-Зайдел оператор на изглаждане, съответстващ на фиксирана посока (съгласувана с мрежата) остава ефективен и в случая на променлива посока на доминираща анизотропия, когато тя е относително близка до посоката на оператора на изглаждане, виж Фиг. 4.11–4.12.

За да дадем оценка на изчислителната сложност на метода, сме анализирали броя на работните единици за изпълнение на една външна итерация на нелинейния AMLI W метод. Тук под работна единица се разбира времето за едно умножение на мат-

рица по вектор на нивото на най-фината мрежа. Така за изчислителната сложност получаваме 26 и 28, съответно за изглаждащ оператор по метода на Гаус-Зайдел и по блочния метод на Гаус-Зайдел.

Накрая в Таблица 4.12 мрежовата сложност  $\sigma_\Omega$  и операторната сложност  $\sigma_A$  са представени за различни нива на сгъстяване на мрежата. Те се дефинират чрез

Сложност на нелинейния AMLI W метод							
$\ell$	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma_\Omega$	1.64	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67
$\sigma_A$	2.21	2.48	2.64	2.73	2.77	2.80	2.81

Таблица 4.12: Мрежова сложност  $\sigma_\Omega$  и операторна сложност  $\sigma_A$

отношенията

$$\sigma_A := \frac{\sum_{k=0}^{\ell} \text{ненулеви\_елементи}(A^{(k)})}{\text{ненулеви\_елементи}(A^{(\ell)}), \quad \sigma_\Omega := \frac{\sum_{k=0}^{\ell} |\Omega^{(k)}|}{|\Omega^{(\ell)}|} \quad (4.6.45)$$

и са показател за нарастването на необходимата компютърна памет в процеса на сгъстяване на мрежата.

## Авторска справка

*Основните научни приноси* на настоящата дисертация са:

- (1) Изследвани са критериите за оптималност на многонивов метод за елиптични гранични задачи от втори ред, дискретизирани с квадратични конформни елементи. За случая на ортотропна коэффициентна матрица е получена равномерна оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ за йерархично разделяне на матрицата на коравина. Построен е преобусловител за водещия диагонален блок и е доказана неговата оптималност. Получените резултати изпълняват условията за оптималност на AMLI методите, откъдето следва оптималността на предложения многонивов преобусловител за ортотропни елиптични крайно-елементни задачи.
- (2) Изследвани са методи от тип SC AMLI за преобуславяне на ортотропни елиптични задачи, дискретизирани с биквадратични и бикубични елементи. И в двата случая са разгледани два варианта за рафиниране на мрежата: стандартен и балансиран. Доказани са равномерни оценки на съответните константи в усилените неравенства на КБШ. Показано е, че при подходяща номерация на неизвестните, водещите диагонални блокове имат лентова структура с равномерно ограничена ширина на полулентата. По този начин са получени многонивови преобусловители с оптимална изчислителна сложност. Доказаните оценки са равномерни по отношение на броя на нивата на сгъстяване (броя на неизвестните), скоковете на коефициентите, както и мрежова и/или коэффициентна ортотропия на задачата.



- (3) Предложен е и е изследван нов клас оптимални многоъгълни методи от тип АМІ за преобулавяне на системи, получени при дискретизация на силно анизотропни елиптични задачи с квадратични конформни крайни елементи. Изследваните методи не изискват йерархична декомпозиция на крайноелементното пространство. В основата на предложения подход е локална адитивна апроксимация на допълнението на Шур. Изследвани са свойствата на оператор на изглаждане от тип блочен метод на Якоби. Доказани са равномерни оценки, от които следва оптимална изчислителна сложност на метода за преобулавяне. Изследвани са задачи, при които направлението на доминираща анизотропия не е съгласувано със страните на триъгълниците от мрежата.
- (4) Изследваните методи и алгоритми са реализирани програмно. Представените числени експерименти потвърждават тяхната оптималност, както и асимптотичната точност на доказаните равномерни оценки на константите в усиленото неравенство на КБШ.

## Благодарности

Поднасям своята най-дълбока благодарност на научния си ръководител проф. д-р Светозар Маргенов за ефективното ръководство и ползотворното съдействие в успешната съвместна работа по задачите от дисертацията.

Най-сърдечно благодаря на научния си консултант доц. Йоханес Краус за ценните напътствия, дискусии и морална подкрепа при провеждането на настоящето изследване. Благодаря също на колегите от Йохан Радон Института по Изчислителна и Приложна Математика, Австрийска Академия на Науките, Линц, за проявеното гостоприемство и отзивчивост и полезни дискусии по време на посещенията ми там.

Изключително задължена съм и на д-р Райна Георгиева за оказаната техническа помощ, както и на всички колеги от ИИКТ БАН за съветите, подкрепата и стимулиращата творческа атмосфера. Благодарна съм за оказаната подкрепа в рамките на цитираните научни проекти към фонд "Научни Изследвания".

Посвещавам дисертацията на цялото си семейство, които проявиха безпрекословна подкрепа, търпение и разбиране.

# Библиография

- [1] Б. Боянов. *Лекции по числени методи*. Дарба, 1995.
- [2] Св. Маргенов. *Числени методи за системи с разредени матрици*, Българска Академия на Науките, София, 2007.
- [3] Бл. Сендов, В Попов. *Числени методи I, II*. Наука и изкуство, София, 1978.
- [4] P. Arbenz, S. Margenov, and Y. Vutov. Parallel MIC(0) preconditioning of 3D elliptic problems discretized by Rannacher-Turek finite elements, *Comput. and Math. with Appl.*, 55(10):2197–2211, 2008.
- [5] O. Axelsson. A generalized Conjugate Gradient, Least Square Method, *Numer. Math.*, 51:209–227, 1987.
- [6] O. Axelsson. *Iterative Solution Methods*. Cambridge University Press, 1994.
- [8] O. Axelsson and V. Barker. *Finite element solution of boundary value problems: Theory and computations*, Academic Press, 1983.
- [9] O. Axelsson and R. Blaheta. Two simple derivations of universal bounds for the C.B.S. inequality constant. *Appl. Math.*, 49(1):57–72, 2004.
- [11] O. Axelsson and I. Gustafsson. Preconditioning and two-level multigrid methods of arbitrary degree of approximations. *Math. Comp.*, 40:219–242, 1983.
- [12] O. Axelsson and S. Margenov. On multilevel preconditioners which are optimal with respect to both problem and discretization parameters. *Comp. Meth. in Appl. Math.*, 3(1):6–22, 2003.
- [14] O. Axelsson and P. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods I. *Numer. Math.*, 56:157–177, 1989.
- [15] O. Axelsson and P. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27:1569–1590, 1990.
- [16] O. Axelsson and P. Vassilevski. A black box generalized conjugate gradient solver with inner iterations and variable-step preconditioning. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, (12):625–644, 1991.
- [17] O. Axelsson and P. Vassilevski. Variable-step multilevel preconditioning methods. *Num. Lin. Alg. Appl.*, (1):75–101, 1994.

- [18] R. Bank and T. Dupont. An optimal order process for solving finite element equations. *Math. Comp.*, 36:427–458, 1981.
- [20] G. Bencheva and S. Margenov. Parallel incomplete factorization preconditioning of rotated linear FEM systems. *J. Comput. Appl. Mech.*, 4(2):105–117, 2003.
- [22] D. Braess. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge University Press, second edition, 2001.
- [23] J. Bramble. *Multigrid methods*, Longman Scientific & Technical, 1993.
- [24] S. Brenner and L. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer-Verlag, 1994.
- [30] V. Eijkhout and P. Vassilevski. The role of the strengthened Cauchy-Bunyakowski-Schwarz inequality in multilevel methods. *SIAM Review*, 33:405–419, 1991.
- [32] R. Fedorenko. On a relaxation method for solving discrete elliptic equations. *J. Comp. Math. and Math. Phys.*, 1–5:922–927, 1961.
- [34] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov and J. Schicho. Locally optimized MIC(0) preconditioning of Rannacher-Turek FEM systems. *Appl. Numer. Math.*, 59:2402–2415, 2009.
- [35] I. Georgiev, M. Lyubery and S. Margenov. Analysis of the CBS constant for quadratic finite elements. volume 6046 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 412–419, Heidelberg 2010. Springer.
- [37] C. Grossmann, H.-G. Roos, and M. Stynes. *Numerical treatment of partial differential equations*. Springer, 2007.
- [38] J. L. Guermond and P. Minev. A new class of massively parallel direction splitting for the incompressible Navier-Stokes equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 200:2083–2093, 2011.
- [39] I. Gustafsson. On modified incomplete factorization methods. In *Numerical Integration of Differential Equations and Large Linear Systems*, pages 334–351. Springer Berlin Heidelberg, 1982.
- [40] W. Hackbusch. *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer-Verlag, 1985.
- [43] S.C. Jardin. Review of implicit methods for the magnetohydrodynamic description of magnetically confined plasmas. *J. Comp. Phys.*, 231(3):822–838, 2011.
- [46] N. Kosturski and S. Margenov. MIC(0) preconditioning of 3D FEM problems on unstructured grids: conforming and non-conforming elements. *J. of Comput. and Appl. Math.*, 226:288–297, 2009.
- [47] J. Kraus. An algebraic preconditioning method for  $M$ -matrices: linear versus non-linear multilevel iteration. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 9:599–618, 2002.

- [48] J. Kraus. Algebraic multilevel preconditioning of finite element matrices using local Schur complements. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 13:49–70, 2006.
- [50] J. Kraus. Additive Schur complement approximation and application to multilevel preconditioning. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34:A2872–A2895, 2012.
- [51] J. Kraus. Additive Schur complement approximation for elliptic problems with oscillatory coefficients. volume 7116 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 52–59, Heidelberg, 2012. Springer.
- [52] J. Kraus, M. Lybery, and S. Margenov. On the robustness of two-level preconditioners for quadratic FE orthotropic elliptic problems. volume 7116 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 582–589, Heidelberg, 2012. Springer.
- [53] J. Kraus and S. Margenov. *Robust Algebraic Multilevel Methods and Algorithms*. Radon Series on Computational and Applied Mathematics. De Gruyter, Germany, 2009.
- [55] U. Langer, S. Reitzinger, and J. Schicho. Symbolic methods for the element preconditioning technique. , volume 2630 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 293–308, Heidelberg. Springer.
- [56] R. Lazarov, P. S. Vassilevski, and S. Margenov. Solving elliptic problems by the domain decomposition method using precondition matrices derived by multilevel splitting of finite element matrix. *Proceedings of the 1st Int. Conf. on Supercomputing (Greece)*, pages 826–835, 1987.
- [57] I. Lirkov, S. Margenov, and L. Zikatanov. Circulant block-factorization preconditioning of anisotropic elliptic problems. *Computing*, 58(3):245–258, 1997.
- [60] J.F. Maitre and S. Musy. The Contraction Number of a Class of Two-level Methods; An Exact Evaluation for Some Finite Element Subspaces and Model Problems. *Lect. Notes Math.*, 960:535-544, 1982.
- [61] A. El maliki, A. Guénette, and M. Fortin. An efficient hierarchical preconditioner for quadratic discretizations of finite element problems. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 18:789–803, 2011.
- [67] Y. Notay. Flexible conjugate gradients. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22:1444–1460, 2000.
- [69] J.W. Ruge and K. Stüben. Algebraic multigrid. In *Multigrid Methods*, volume 3, pages 73–130. SIAM, Philadelphia, 1987.
- [71] G. Strang and J. Fix. *An analysis of the finite element method*. Prentice Hall, 1973.
- [73] P. Vassilevski. *Multilevel Block Factorization Preconditioners: Matrix-based Analysis and Algorithms for Solving Finite Element Equations*. Springer, New York, 2008.
- [74] P.S. Vassilevski. Hybrid V-cycle algebraic multilevel preconditioners. *Math. Comp.*, 58:489–512, 1992.