БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО ИНФОРМАЦИОННИ И
КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ

Милена Радославова Рачева

НОВИ ПОДХОДИ В КРАЙНОЕЛЕМЕНТНИЯ АНАЛИЗ ЗА ЕЛИПТИЧНИ ЗАДАЧИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
на дисертация за придобиване на
научна степен "доктор на науките"
в професионално направление 4.5 "Математика"
(01.01.09 "Изчислителна математика")

София, 2012 г.

Дисертацията е обсъдена и допусната до защита на разширено заседание на секция "Научни пресмятания"на ИИКТ-БАН, състояло се на 17. 04. 2012 г.

Дисертацията съдържа 300 стр., 38 фигури, 18 таблици и 15 стр. литература, включваща 149 заглавия.

Защитата на дисертацията ще се състои на .... г. от .... часа в зала 218 на ИИКТ – ул. "Акад. Г. Бончев", бл. 25А.

Материалите за защитата са на разположение на интересуващите се в канцеларията на ИИКТ – ул. "Акад. Г. Бончев", бл. 25А, ст. 215.

Автор: Милена Радославова Рачева
Заглавие: Нови подходи в крайноелементния анализ за елиптични задачи

Актуалност и мотивировка на темата

Математическите модели и техните компютърни реализации са в основата на прогреса в световните научни изследвания и преди всичко в разнообразните инженерни практики. Едни от най-прилаганите методи в споменатите компютърни реализации са числените методи от вариационен тип. Техен най-сполучлив и популярен представител е *методът на крайните елементи* (МКЕ). Развитието му е пряко свързано с неговата математическа теория, която активно използва средствата на приложния функционален анализ [11, 15].

Дисертацията е посветена на важни въпроси от съвременния числов анализ. Нека най-напред да припомним двете основни цели на изчислителната математика:

- Да се създават и анализират методи и въз основа на тях да се предлагат алгоритми с възможно *по-голяма точност*. Това означава, че числовата реализация на математическия модел ще се изпълни с по-голяма скорост и по-сигурно ще възпроизведе съответния физически модел.
- Да се изучават и предлагат числени методи, които са възможно *по-лесни за осмисляне и прилагане при конкретни пресмятания*. Като цяло, за тях е необходима относително по-проста алгоритмизация и по-малко изчислителен ресурс.

Веднага се вижда взаимната противоречивост на поставените по-горе две изисквания. Обикновено за получаване на процедури с висок ред на сходимост се налага усложняване на алгоритъма и използване на по-прецизен и дълбок математически апарат. Затова историята на развитието на числените методи е един непрекъснат стремеж към намиране на разумен и прецизен компромис между добра точност и проста реализация.

А сега да разгледаме как стои този въпрос при различните видове и модификации на методите на крайните елементи. Като основен числен метод от вариационен тип, МКЕ решава редица приложни задачи с голям обем изчисления (large scale computations). Освен това резултиращите алгебрични системи имат матрици с разредена структура (sparce matrices). Поне теоретично е пределно ясно, че с увеличаване степента на апроксимиращите полиноми се увеличава и точността на метода, но очевидно решаването на съответната алгебрична система се усложнява [11, 28]. В процеса на преценка за избор на подход при реализиране на конкретна задача важна роля играе изискването за гладкост на функциите от крайноелементното пространство [5, 15]. В този избор се включва и факторът "масов потребител", който се проявява чрез комерсиални софтуери, каквито са разнообразните CAD/CAM системи. Поне от инженерна гледна точка, предпочитанията клонят по-скоро към удовлетворяването на второто изискване – за простота при реализацията на МКЕ.

В последните години една от най-важните стъпки за хармонизиране на точност и практическа приложимост на МКЕ е развитието на ефективни апостериорни процедури за ускоряване на сходимостта на приближеното към точното решение [1, 5]. Основната идея, а именно първоначално да използваме възможно по-прости крайни елементи, а след това да преработим полученото приближено решение, има решаваща роля.

И все пак на дневен ред стоят редица предизвикателства, пред които МКЕ е изправен. Тези предизвикателства се изразяват преди всичко в утвърждаване и доразвиване на достигнатите позиции в неговата математическа теория. Ето защо мотивите за разработването на настоящия дисертационен труд са повече от сериозни и основателни. Те могат да бъдат резюмирани по следния начин:

- Все още недооценена е ролята на математическия модел при решаване на задачи от практиката. Вариационните методи допускат нееднозначност в изводите и тълкуването на интегралните тъждества (различните билинейни форми);

- Интерес за практиката представляват някои елиптични задачи с нестандартни гранични условия. Тези условия се появяват върху вътрешни граници и/или имат нелокален (разпределен) характер. МКЕ се оказва благоприятен за тяхното изследване;

- В последните години е засилен интересът към използване на неконформни крайни елементи. Остават за изследване редица въпроси за сходимост и приложимост на неконформния МКЕ.

Актуалността на въпросите, застъпени в дисертацията, се потвърждава от големия брой публикации в специализирани научни списания от последните години по сходни проблеми.

Основни въпроси и цел на дисертационния труд

Дисертацията засяга разнообразни подходи, които са свързани или с елиптични диференциални уравнения от втори и четвърти ред, или с динамични задачи, чийто анализ е пряко свързан със спектъра на основния елиптичен оператор. Стремежът е там, където е възможно, да се даде общ подход на изследване за различни гранични задачи.

В представения дисертационен труд е даден акцент върху приближаването на спектъра на елиптични оператори от втори и четвърти ред. Този факт не е случаен. Новите тенденции в математическата теория на МКЕ, както вече отбелязахме, се отнасят към решаване на по-сложни и нестандартни гранични задачи, както и към намиране на ефективни апостериорни процедури. Това от своя страна е свързано и с предлагане и изучаване на нови (конформни и неконформни) крайни елементи. Известно е също, че динамичните гранични задачи от втори и четвърти ред могат да бъдат по-адекватно интерпретирани посредством спектъра на основния елиптичен оператор.

Наред с казаното дотук се налага да изкажем и основната философия при излагане на новите подходи при анализ на граничните задачи по МКЕ. Тя е, че е по-добре методите да бъдат прилагани чрез елементи от по-ниска степен, а ефектът да се търси алгоритмично чрез съчетаване на нови елементи и подходящи апостериорни процедури!

В дисертацията се разглеждат няколко различни подхода в МКЕ, които ще изброим по-долу. Някои от идеите са приложими за произволен числен метод от вариационен тип.

Основните въпроси, разглеждани в дисертацията, са:

- Изследване на елиптични спектрални задачи от четвърти ред. Доказване свойства на смесената едномерна и многомерна вариационна задача, както и възможността за ускоряване на сходимостта в МКЕ за бихармоничната спектрална задача.

- Изучаване на интегро-диференциални уравнения в теорията на вискоеластичността с цел вариационното им представяне в смесена формулировка и получаване оценки за устойчивост.

- Представяне и анализиране на нови подходи в МКЕ за елиптични задачи с "нестандартни" гранични условия. Такива са преходните и нелокални условия върху граници, които могат да бъдат и вътрешни за областта. Този въпрос се пренася и върху елиптична задача, чиито области се припокриват.

- Развитие на неконформния МКЕ чрез доказване влиянието на интегралните степени на свобода върху сходимостта и приложимостта на метода.

- Математически модели и вариационни аспекти в теорията на тънките греди.

Наред с изброените основни въпроси се засягат и някои съпътстващи, но важни за вариационните числени методи проблеми. Такива са например изчислителните аспекти за конкретен тип задачи и изучаване структурата на съответните матрици. Също така, тук могат да бъдат споменати и някои сравнителни характеристики между различните конформни и неконформни подходи.

Целите на дисертацията са:

1. Да се докажат нови резултати, свързани с използване на интегрални степени на свобода (§ 2.2, § 2.4, § 2.5, § 3.2, § 3.3, § 3.6, § 3.7, § 3.8, § 3.9, § 3.10).
2. Да се доразвият идеите и получат нови резултати в теорията на суперсходящия апостериорен анализ (§ 1.4, § 1.5, § 2.3, § 3.4, § 3.5, § 3.7).
3. Да се получи една възможно по-пълна картина на смесени вариационни задачи от четвърти ред (§ 1.2, § 1.3, § 4.5).
4. Да се изследват конкретни инженерни задачи от теорията на еластичността (§ 1.6, § 4.2, § 4.3, § 4.4).

Методика на изследване

Изследванията, представени в дисертацията, се основават предимно на следните методи:

- Анализ на гранични задачи за диференциални и интегродиференциални уравнения;

- Методите на приложния функционален анализ;
- Анализ в МКЕ в неговата $h-$версия и $p-$версия;
- Основни теореми, като: Теорема на Брамбъл-Хилберт, Теорема на Стренг, Теорема за оценки на функционали;
- Техника за получаване на интерполационни полиноми и тяхното приложение за точността на МКЕ;
- Прилагане формулите на Грийн и минимаксния принцип.

Представяне на резултатите

Повечето от резултатите в дисертационния труд са представени на специализираните международни конференции:

- *Large Scale Scientific Computations* Sozopol, Bulgaria 2003; 2005; 2007; 2009; 2011 г.;
- *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences* Sozopol, Bulgaria 2010 г.;
- *Numerical Analysis and its Applications* Ruse, Bulgaria 2004; Lozenetz, Bulgaria 2008 г.;
- *European Finite Element Fair* Pavia, Italy 2005; Warwick, UK 2010; Paris, France 2011 г.,

а също и на международните технически конференции:

- *Research and Development in Mechanical Industry* Užice, Serbia 2008 г.;

- *International Conference UNITECH* - Gabrovo, Bulgaria 2009; 2010; 2011 г.

Резултатите са докладвани и на:

- Семинар по изчислителна математика към ИИКТ-БАН;
- Семинар по изчислителни методи в Технически университет - Габрово;
- Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM 2008; 2009; 2010 г.;
- Семинар на Finite Element Center - Chalmers University of Technology, Sweden 2007; 2008 г.

Работата по дисертацията бе частично подпомогната от следните проекти от НФНИ:

- **ВУ-МИ 202/2006** *"Адаптивни и йерархични алгоритми в метода на крайните елементи"*;
- **ДО 02-147/2008** *"Методи, алгоритми и софтуерни средства за задачи с голяма размерност и йерархични компютърни методи"*,

както и от проектите, финансирани от ТУ - Габрово:

- **5.2/2002** *"Числов анализ за гранични задачи от ред $2m$ с приложения в механиката"*;
- **Е822/2008;2009** *"Числени методи за задачи от електротехниката"*;
- **С1001/2010; 2011** *"Компютърни пресмятания с приложения в обучението и научните изследвания"*.

Публикации

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в 29 статии, от които 5 са самостоятелни, 17 са с един съавтор, 6 – с двама и една – с трима съавтори. 22 от статиите са в списания с импакт-фактор или са в специализирани международни издания по Изчислителна математика; всички публикации са в реферирани издания.

Цитирания

Забелязани са над 50 цитирания на чужди автори.

Структура и обем на дисертационния труд

Дисертацията се състои от увод и четири глави. Тя съдържа 300 страници, от които 16 страници литература, включваща 149 заглавия; 18 таблици и 38 фигури.

Съдържание на дисертацията

Във всяка от четирите глави са представени различни подходи за анализ и приложения на елиптични гранични задачи от втори и/или четвърти ред. Върху тази основа се предлагат методи и/или алгоритми, които са подкрепени с числови експерименти. Някои от идеите са приложими за произволен метод от вариационен тип, а част от числовите примери са реални задачи от инженерната практика.

Ще дадем кратко описание на основните резултати.

В **Глава 1** се изследва и прилага смесеният МКЕ за елиптични спектрални задачи от четвърти ред. Друга задача, която се решава в тази глава, е апроксимацията на интегро-диференциалното уравнение на вискоеластичността от втори ред, представено в смесена формулировка.

Свойствата на билинейните форми и тяхната възможност за симетризация са важна част от прилагането на числените методи от вариационен тип. Това особено важи за различните спектрални задачи [4]. Доказани са две теореми, които дават достатъчни условия за симетризуемост и от там – реалност на спектъра за едномерни и многомерни задачи от четвърти ред. Смесената форма дава много по-голяма вариативност в слабата формулировка.

Целта е да се получат резултати от възможно по-общ характер. Така например в едномерния случай се дискутират шест различни гранични условия, които моделират непринудени колебания на греда в различни реални ситуации.

В последно време се утвърди тенденцията за получаване на ефективни апостериорни процедури, които подобряват значително алгоритъма и качеството на изчислителния процес [1, 5]. В дисертацията е даден задълбочен анализ на една оригинална апостериорна техника за ускоряване на сходимостта за бихармоничната спектрална задача при прилагане на смесения МКЕ.

Известно е [12], че ако $n \geq 2$ (n е степента на апроксимиращите полиноми) и собствената функция u е от пространството $H^{n+1}(\Omega)$, то

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^{2n-2}\|u\|_{n+1,\Omega}.$$

За напреженията на собствените функции имаме

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{n-1}\|u\|_{n+1,\Omega},$$

като в горните оценки, а и по-нататък долен индекс h означава приближено решение по МКЕ.

Предлага се метод (Алгоритъм 1.1), който позволява да се подобри точността. Това става за сметка на решаване на допълнителна (и по-лесна) задача по МКЕ върху по-фина мрежа, или с повишение на степента на апроксимиращите полиноми с една единица.

Тогава

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq Ch^{2n}\|u\|_{n+1,\Omega},$$

$$\|\sigma - \widetilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{n}\|u\|_{n+1,\Omega},$$

където $\widetilde{\lambda}_h$ и $\widetilde{\sigma}_h$ са новите приближения след прилагане на апостериорната техника.

Смесеният МКЕ за задачи от четвърти ред е приложим дори когато елементите са линейни. За разглежданата бихармонична задача и $n = 1$, при оценка от оптимален порядък [23, 24]

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^{1/2}\|u\|_{2,\Omega},$$

след прилагане на апостериорната процедура се доказва, че

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \leq Ch\|u\|_{2,\Omega}.$$

В главата се прави анализ на едно интегро- диференциално хиперболично уравнение от втори ред със слабо сингулярно интегрално ядро, което моделира динамика на вискоеластични материали и демфиращи устройства. В този клас от моделни задачи участват и диференциални оператори от дробен ред $\alpha \in (0, 1)$ [6, 7].

Доказват се оценки за устойчивост чрез трансформиране на основното уравнение в смесена формулировка от две уравнения от първи ред спрямо времевата променлива, на която е намерено симетрично представяне. Така при дискретизация по пространствената променлива x се използва стандартен МКЕ, а по времевата променлива t – прекъснат метод на Гальоркин. Накрая (Теорема 1.9) се дава оценка на грешката след дискретизация.

Глава 2 е посветена на апроксимацията по МКЕ на спектрални интерфейсни задачи [14]. Този тип задачи се характеризира с това, че дефиниционната област Ω е съставена от няколко подобласти, като между всеки две съседни подобласти се определя преходно условие, т.е. образува се вътрешна граница. Това е едно модерно и бързо развиващо се направление в теорията на диференциалните уравнения и, съответно, в числовия анализ за приближаване на такива задачи. Голямото разнообразие на модели е обединено от понятието *нелокално условие*. Това означава, че върху обща част на две области решенията, определени върху съответните области, съвпадат глобално, т.е. техните интеграли върху общата част имат една и съща стойност.

В главата са разгледани четири типа спектрални задачи от втори ред с нелокални условия:

- Интерфейсни задачи с преходни гранични условия (transition condi- tions);
- Задачи със застъпващи се области (overlapping domains);
- Задачи с нелокални условия върху част от границата;
- Контактни задачи.

Намерен е общ подход за изследване и числово реализиране на широк клас от споменатите по-горе задачи. Доказва се как при използването на интегрални степени на свобода може да се получи оптимален ред на сходимост. В цялата втора глава се подчертава, че този подход е много по-естествен в МКЕ за апроксимиране на спектрални гранични задачи с нелокални гранични условия. Изследванията в тази глава доразвиват резултатите на Ван Кеер и Де Шепер (виж [18, 19, 20, 21, 22, 31]).

Най-напред за задача, определена върху многокомпонентна област Ω в равнината се използват квадратични триъгълни или биквадратични Сирендипови елементи, чиито степени на свобода са стойностите във върховете, а също така и стойностите на интегралите върху страните. За всеки две съседни подобласти върху общата им граница се дефинират нелокални условия на Дирихле

$$\int_{\Gamma_{i,k}} [u_i(s) - u_k(s)]\, ds = 0, \quad i, k \in \{1, 2, \ldots, M\},$$

където M е броят на подобластите.

След като дефинираме интерполационния оператор π_h от интегрален тип, оценките за съответната спектрална задача следват от следната оценка: ако $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_M)$, $v_i \in \Omega_i,\ i = 1, 2, \dots, M$, то

$$\|v - \pi_h v\|_{m,\Omega} \leq C h^{3-m} \|v\|_{3,\Omega}, \quad m = 0, 1,$$

където

$$\|v\|_{k,\Omega} = \sum_{i=1}^{M} \|v_i\|_{k,\Omega_i} \ \text{ за } k \geq 0.$$

При тази, както и при останалите задачи с нелокални условия, техниката се основава на сравняване на интерполанта със стандартния Лагранжев интерполант.

Показано е, че използваният подход дава и още едно предимство. Елементите могат да се обединят така, че въздействайки върху вече намереното крайноелементно решение да се получи приближение с много по-висока точност. Тази идея беше развита след работите на Зенкевич и Жу (виж [33]). За обединението на четириъгълни крайни елементи по четворки в макроелемент (patch) се доказва повишен ред на сходимост. За собствените функции той е с един, а за собствените стойности – с два порядъка по-висок, ако точното решение u е с по-висока гладкост, а именно е от $H^5(\Omega)$.

Задачата за определяне на спектъра на елиптичен оператор, когато дефиниционните области се застъпват, намира широко приложение в теорията на топло- и масообмена [17]. Подходът с подходящи крайни елементи е представен, когато имаме две области, т.е. $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq 0$. Разгледани са случаите, когато Ω_1 и Ω_2 са два припокриващи се интервала (a_1, b_1) и (b_2, a_2), като $a_1 < b_2 < b_1 < a_2$ или Ω е двукомпонентна област от два застъпващи се правоъгълника Ω_1 и Ω_2 съответно с граници $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. За спектралната задача от втори ред е поставено и нелокално свързващо условие

$$\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} [u_1(x) - u_2(x)]\, dx = 0,$$

където u_1 и u_2 са собствени функции, определени съответно върху Ω_1 и Ω_2.

При доказване на оптимален ред на сходимост с квадратични/ биквадратични крайни елементи трябва да се преодолеят редица технически трудности. Така Теорема 2.6 извежда основната оценка за близостта на произволна функция от $H^3(\Omega)$ и съответния ѝ интерполант както за едномерния, така и за двумерния случай.

Следващите изследвания в Глава 2 са свързани с така наречените контактни задачи, при които общите им части имат размерност с единица по-малка и там е зададено свързващо условие от интегрален тип [16]. Изучена е крайноелементната апроксимация на векторна спектрална задача между две едномерни тела. Доказва се оптимален ред на точност и се дискутират изчислителни аспекти на компютърната реализация при дискретизация по МКЕ.

Резултатът в дисертацията за контактната задача съществено доразвива теорията на аналогичния проблем, разгледан от Де Шепер и Ван Кеер [22]. Тук се използва различен подход, както и елементи от по-висока степен (квадратични вместо линейни), като целта е отново да се използват интегрални степени на свобода.

Най-голямата по обем глава в дисертацията е **Глава 3**, която изследва различни по характер въпроси при използване на неконформни МКЕ. Интересът към такива методи датира от много години [26, 27], но в последното десетилетие те станаха обект на интензивни изследвания. Това стана факт във връзка с някои благоприятни и дори неочаквани възможности, които предоставиха неконформните крайни елементи. Оказва се, че те дават много по-добра матрична структура за редица важни компютърни пресмятания [25, 32], а също така по-лесно се осъществяват някои съвременни апостериорни процедури [1, 13]. Нека не забравяме, че неконформните методи са (засега) единствената възможност за числено получаване на долни граници на собствените стойности [3].

Всичко казано дотук е достатъчно предизвикателство авторът да има амбицията и да се пострае да изследва (с оглед нейните възможности) всичките изброени по-горе проблеми. И действително: доказани са свойства, характерни само за (определени) неконформни елементи; предложени са апостериорни техники за доказване на суперсходимост; изучен е модифициран и популярен елемент за решаване на задачи от четвърти ред; най-сетне, отделено е подобаващо място на доказване и пресмятане на долни граници за елиптични оператори от втори и четвърти ред.

Най-напред, като спазим духа на предходната глава, класическият и най-елементарен неконформен елемент на Крузе-Равиар (C-R) се замества с неговия аналог, при който интеграли по страните на триъгълника се вземат за степени на свобода. По-нататък този елемент допуска разширение (Extended C-R) с още една базисна функция, за да се превърне в непълен квадратичен елемент. Техните два четириъгълни аналога - билинеен и неговото разширение, т.е. Q_1^{rot} и EQ_1^{rot}, допълват картината за следния резултат (свойство): Ако билинейната форма $a_h(\cdot,\cdot)$ е породена от Лапласиана и функцията v_h е от крайноелементното пространство V_h, то за всяко $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ за споменатите четири неконформни елемента е валидно равенството

$$a_h(v - i_h v, v_h) = 0,$$

където $i_h v$ е съответният интерполант.

За малко по-общ елиптичен оператор горното неравенство се превръща в оценка за суперблизост, по-точно в $\mathcal{O}(h^2)$.

Въпреки, че този резултат не изчерпва всички възможни неконформни методи с това свойство, то той, заедно с интегралните степени на свобода, има пряко приложение. То касае конструиране на ускоряваща сходимостта апостериорна техника чрез интерполирани крайни елементи (patch-recovery technique). Доказват се оценки от тип суперсходимост и се дават практически (алгоритмични) правила за използване на процедурата.

Теорема 3.6 и Алгоритъм 3.1 показват как и при какви условия може да се повиши точността при спектрални задачи от втори ред посредством решаване на допълнителна и по-проста задача. Първоначално използваме неконформни елементи от възможно по-ниска степен на приближаващите полиноми, а след това използваме конформни елементи, които включват степените на свобода на вече използваните неконформни елементи.

В Глава 3 се прави и задълбочен анализ на един нов вариант на триъгълник на Зенкевич [8] (Z-елемент), който е неконформен елемент за задачите от четвърти ред. Доказват се теореми за определяне скоростта на сходимост към точното решение както за бихармоничната гранична задача, така и за съответната спектрална задача. Показано е и как чрез Z-елементи може да се получи по-добро приближение на спектъра на бихармоничния оператор.

Най-голямо място е отделено на апроксимиране отдолу на собствените стойности за оператори от втори и четвърти ред. Известно е [4], че всеки конформен МКЕ приближава тези стойности отгоре.

Направен е един възможно най-пълен обзор за получените досега резултати в това направление от учени, работещи в областта на апроксимиране на спектрални задачи посредством МКЕ. Доказва се, че C-R елементът с интегрални степени на свобода апроксимира отдолу собствените стойности на Лапласиана.

Особено ценни са резултатите за намиране на долни граници на собствените стойности за елиптичните оператори от четвърти ред. Дискутира се това свойство за елемента на Адини, елемента на Морли и за правоъгълния елемент на Морли. Не е известно в световната литература да са извършвани такива числови експерименти с правоъгълен неконформен елемент на Морли. Това е направено в дисертацията с няколко стойности на отношението на Поасон. Забелязва се, че приближената стойност λ_h апроксимира точната стойност λ отдолу.

Накрая се доказва оригинален резултат за получаване на двустранна оценка на собственото число. Ако чрез някой неконформен метод получим приближение на λ, така че $\lambda_h < \lambda$, то чрез подходяща апостериорна процедура и използване на конформен елемент може да се получи друго приближение $\widetilde{\lambda}_h$, за което

$$\lambda_h < \lambda < \widetilde{\lambda}_h.$$

Този резултат е отразен в Алгоритъм 3.2.

Глава 4 има принос в математическото моделиране на тънки греди, които са подложени на динамични натоварвания. Последващото числово моделиране има предвид използването на МКЕ, но може да бъде отнесено към произволен числен метод от вариационен тип. Споменатите задачи имат широко приложение в инженерната практика. Достатъчно е да споменем за оразмеряване на режещи инструменти в машиностроенето, или за различни гредови конструкции в строителната механика, върху които въздействат променливи сили.

Една от основните цели в тази глава е да се направи прецизен извод на математическите модели, в които участва едномерна пространствена променлива x, а уравненията са от четвърти ред и от хиперболичен вид [30]. Разглежданията в тази глава следват стратегия, която – по убеждение на автора – е една от важните предпоставки за развитие на съвременните математически методи и за разширяване на тяхната роля и приложение в механиката, а именно: при получаване на комплициран и труден за теоретичен анализ и числово решаване модел да не се преминава към опростенчески допускания, а да се използват разнообразните възможности и средства, които математическата теория предоставя.

Първата задача, която е изследвана, е за греда върху еластична основа, като по-точно, тя е опряна на три пружини. Върху нея въздейства променлива аксиална сила $\mathcal{P}$. Основната ни задача е да изведем математически модел, който да е адекватен и удобен за прилагане на числен метод. Целта е да се пресмятат динамичните напрежения на гредата. Като използваме слаба формулировка, могат да бъдат пресметнати по МКЕ и собствените стойности и функции на елиптичния оператор от четвърти ред. Този резултат е полезен и за диагонализиране на матриците на маса и коравина. Това свойство следва от ортогоналността на собствените вектори. Методът е познат като *метод на нормалните форми* [29, 30].

Важен случай от теорията на еластичността е, когато гредата (или част от нея) е върху основа от Винклеров тип. Нов момент в моделирането на такива обекти е, че Винклеровата основа е разгледана като суперпозиция от много на брой еластични опори (амортисьорни пружини). При това положение е получен математическия модел и съответната му вариационна формулировка.

Типичен пример за модел на греда върху Винклерова основа е моделът на свредло, закрепено в тричелюстник. За пример е взето винтово свредло с цилиндрична опашка. Тази задача има особеност, която е следната: неизвестната функция на преместването се налага да бъде разделена на две компоненти – една, която отговаря на свободната част на свредлото и друга, която е еластично закрепена. Представена е изглаждаща процедура между двете части с цел получаване на по-адекватен модел.

Получаването на вариационните модели за трите разгледани задачи съдържа сериозни аналитични преобразования. Освен това всяка от тях е подкрепена с числова реализация, като конкретните примери са с реални параметри, заимствани от инженерната практика (Пример 4.1, Пример 4.2 и Пример 4.3).

Последната – четвърта разглеждана в Глава 4 задача е посветена на някои вариационни аспекти на модел на ветрогенераторна перка [9, 10]. Изведено е смесено вариационно интегрално тъждество на перката, която е разгледана като тънка еластична греда. Участващите билинейни форми са симетрични.

Преобладаващият характер на дисертацията е теоретичен. Тя е посветена на различни въпроси от теорията и приложенията на МКЕ. Получени са оценки, математически модели и алгоритми, които са свързани с елиптични оператори от втори и четвърти ред.

Изказвам искрена благодарност на моя научен ръководител и дългогодишен учител, съавтор и съмишленик проф. дмн Андрей Андреев за интересната и актуална научна тематика, в която той ме въведе; за вещите и стимулиращи напътствия; за ползотворните дискусии; за своевременната помощ и подкрепа.

Библиография

[1] M. Ainsworth and J.T. Oden, A-posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis, Wiley, New York (2000).

[2] A. Andreev, M. Racheva, Properties and estimates of an integral type nonconforming finite element, Springer LNCS 7116, 523-530, 2012.

[3] M.G. Armentano, R.G. Duràn, Asymptotic lower bounds for eigenvalues by nonconforming finite element methods, Electron. Trans. Numer. Anal. **17** (2004) 93-101.

[4] I. Babuška, J. Osborn, Eigenvalue Problems, In Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, (Eds. P. G. Lions and Ciarlet P.G.), Finite Element Methods (Part 1) North-Holland, Amsterdam, 641-787, 1991.

[5] I. Babuška, T. Strouboulis, The Finite Element Method and its Reliability, Oxford Science Publications, 2001.

[6] R. L. Bagley and P. J. Torvik, A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity, Journal of Rheology, Vol. 27, No 3 (1983), 201-210.

[7] R. L. Bagley and P. J. Torvik, Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, AIAA Journal **21** (1983), 741-748.

[8] G.P. Bazaley, Y.K. Cheung, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz, Triangular elements in plate bending - conforming and non-conforming solutions, In: Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, 1965, 547-576.

[9] A. Baumgart, A mathematical model for wind turbine blade, Journal of Sound and Vibration, Vol. 251, 2002, 1-12.

[10] A. Bramwell, Helicopter Dynamic, Edward Arnold, New York, 1989.

[11] S. Brenner, L.R. Scott, The Mathematical Theory for Finite Element Methods, Springer-Verlag, New York, 1994.

[12] C. Canuto, Eigenvalue approximations by mixed methods, RAIRO, Anal. Numer. R3 **12** (1978), 27-50.

[13] C. Carstensen, S. Bartels and S. Jansche, A posteriori error estimates for nonconforming finite element methods, Numer. Math. **92**(2), 2002, 233-256.

[14] Z. Chen and J. Zou, Finite element methods and their convergence for elliptic and parabolic interface problems, Numer. Math. **79** (1998), 175-202.

[15] P.G. Ciarlet, Basic error estimates for elliptic problems, in: P.G. Ciarlet, J.L. Lions (Eds.), Finite Element

Methods (Part 1), in: Handbook of Numerical Analysis, vol. 2, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1991, 21-343.

[16] M.I.M. Copetti, D.A. French, Numerical approximation error control for a termoelastic contact problem, Appl. Numer. Math. **55**(4) (2005), 439-457.

[17] A.K. Datta, Biological and Bioinvironmental Heat and Mass Transfer, Marcel Dekker, Ney York, 2002.

[18] H. De Shepper, Finite element analysis of a coupling eigenvalue problem on overlapping domains. J. Comput. Appl. Math., **132** (2001), 141-153.

[19] H. De Shepper, R. Van Keer, On a finite element method for second order elliptic eigenvalue problems with nonlocal Dirichlet boundary conditions, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., **18**(384), 283-295 (1997).

[20] H. De Shepper, R. Van Keer, On a variational approximation method for 2nd order eigenvalue problems in a multi-component domain with nonlocal Dirichlet transition conditions, Numer. Func. Anal. Optim. **19**(9&10), 971-994 (1998).

[21] H. De Shepper, R. Van Keer, A finite element method for elliptic eigenvalue problems in a multi-component domain in 2D with non-local Dirichlet transition conditions, J. Comput. Appl. Math. **111**, 253-265 (1999).

[22] H. De Shepper, R. Van Keer, Finite element approximation of a contact vector eigenvalue problem,

Applications of Mathematics, Vol. 48, No 6, 559-571 (2003).

[23] K. Ishihara, A mixed finite element method for the biharmonic eigenvalue problem of plate bending, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto University, **14** (1978), 399-414.

[24] K. Ishihara, On the mixed finite element approximation for the buckling of plates, Numer. Math., **33** (1979), pp. 195-210.

[25] J. Kraus, S. Margenov and J. Synka, On the multilevel preconditioning of Crouzeix-Raviart elliptic problems, Num Lin. Alg. Appl., **15** (2008), 395-416.

[26] P. Lascaux, P. Lesaint, Some nonconforming finite elements for the plate bending problem, Rev. Française Automat. Informat. Recherche Operationnelle Sér. Rouge Anal. Numer. R-1 (1975), 9-53.

[27] R. Rannacher, Nonconforming finite element method for eigenvalue problems in linear plate theory, Numer. Math., **3**, 23-42, 1979.

[28] G. Strang, G.J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

[29] S.P. Timoshenko, D.H. Goodier, Theory of Elasticity, London: McGraw Hill Intern. Editions, 1982.

[30] S.P. Timoshenko, W. Weaver and D.H. Young, Vibration Problems in Engineering. John Wiley, New York, fifth edition (1990).

[31] R. Van Keer, H. De Shepper, Finite element approximation for second order elliptic eigenvalue problems with nonlocal boundary or transition conditions, Applied Math. and Computation, **82**, 1-16 (1997).

[32] P.S. Vasilevski, Multilevel Block Factorization Preconditioners: Matrix-based Analysis and Algorithms for Solving Finite Element Equations, Springer, 2008.

[33] O.C. Zienkiewich, J.Z. Zhu, The superconvergence patch-recovery and aposteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity, Int. J. Numer. Methods Eng., **33**, 1365-1382 (1992).

Публикации по дисертацията

[M1] M.R. Racheva and A.B. Andreev, Superconvergence postprocessing for eigenvalues, Comp. Methods in Appl. Math., **2** (2002), No 2, 171-185.

[M2] A.B. Andreev, J.T. Maximov and M.R. Racheva, Finite element method for calculation of dynamic stresses in the continuous beam on ellastic supports, Sib. JNM, 6(2), 2003, 113-124.

[M3] A. B. Andreev, J. T. Maximov and M. R. Racheva, Beams and plates with dynamic loads on an elastic foundation of Winckler's type, Journal of TU-Gabrovo, Vol. 30, 151-158, 2004.

[M4] A. Andreev, M. Racheva, Variational aspects of the mixed formulation for fourth-order elliptic eigenvalue problems, Mathematica Balkanica, Vol.18, Fasc. 1-2, 41-51, 2004.

[M5] A. B. Andreev, R. D. Lazarov and M. R. Racheva, Postprocessing and higher order convergence of mixed finite element approximations of biharmonic eigenvalue problems, JCAM, Vol. 182(2), 2005, 333-349.

[M6] A. B. Andreev, J.T. Maximov and M.R. Racheva, Modelling of the elastic line for twist drill with straight shank fixed in three-jaw chuck, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3401, Springer-Verlag, 116-124, 2005.

[M7] M. Racheva, Fourth-order elliptic problems with eigenvalue parameter on the boundary, J. of Tech. Univ. of Gabrovo, Vol. 32, 3-6, 2005.

[M8] A. B. Andreev, J. T. Maximov and M. R. Racheva, Finite element modelling for a beam on the Winckler's type foundation with variable rigidity, Sib. JNM, Vol. 8, No1, 23-30, 2005.

[M9] K. Adolfson, M. Enelund, S. Larsson and M. Racheva, Discretization of integro-differential equations modeling dynamic fractional order viscoelasticity, Lecture Notes in Computer Science, 2006, Volume 3743 (2006), 76-83.

[M10] A.B. Andreev, R.D. Lazarov and M.R. Racheva, Post-processing and improved accuracy of the lowest-order mixed finite element method for biharmonic eigenvalues, Lecture Notes in Computer Science, 2006, Volume 3743 (2006), 613-620.

[M11] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Optimal order finite element method for a coupled eigenvalue problem on overlapping domains, Springer LNCS 4818 (2008), 637-644.

[M12] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Superconvergent finite element postprocessing for eigenvalue problems with nonlocal boundary conditions, Springer LNCS 4818 (2008), 645-653.

[M13] A. Andreev, M. Racheva, Integral type finite elements and its relation to the superconvergence technique, 8th International Conference "Research and Development in Mechanical Industry"RaDMI'08, Užice, Serbia (2008), 673-679.

[M14] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Optimal order FEM for a coupled eigenvalue problem on 2D overlapping domains, Numerical Analysis and Its Applications, Springer LNCS 5434 (2009), 151-158.

[M15] A.B. Andreev, M.R. Racheva, New approach of FEM for eigenvalue problems with non-local transition conditions, Numerical Analysis and Its Applications, Springer LNCS 5434 (2009), 159-167.

[M16] A.B. Andreev, M. R. Racheva, Finite elements with integral degrees of freedom, Gabrovo, International Conference UNITECH'09, 20-21 Nov. 2009, Vol. 3, III-480-III-484.

[M17] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Non-conforming Z-type FE for fourth-order problems: estimates and application, Proceedings of 3rd Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM'08, 7-10, 2009.

[M18] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Zienkiewicz-type finite element applied to fourth-order problems, Springer LNCS 5910 (2010), 687-694.

[M19] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Acceleration of convergence for eigenpairs approximated by means of nonconforming finite element methods, Springer LNCS 5910 (2010), 695-702.

[M20] A. Andreev and M. Racheva, On a property of the elliptic bilinear form by nonconforming finite elements, Gabrovo, International Conference UNITECH 2010, 19-20 Nov. 2010, Vol. 3, III-467-III-470.

[M21] A.B. Andreev, M.R. Racheva, A Zienkiewicz-type finite element applied to fourth-order problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (2010), 348-357.

[M22] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Lower bounds for eigenvalues by nonconforming FEM on convex Domain, AIP Conf. Proc. – November 25, 2010 - Vol. 1301, 361-369.

[M23] M. Racheva, Dynamic loads and stresses acting on wind turbine blades, Journal of TU-Gabrovo, Vol. 42 (2011), 3-6.

[M24] M. Racheva, Stability estimate for fully discrete dynamic model of viscoelastic materials, Gabrovo, International Conference UNITECH 2011, III357-III361, 2011.

[M25] M. Racheva, Mixed variational formulation for some fourth order beam problems, Comp. rend. Acad. bulg. Sci. Tome 64, No 11, 2011, 1525-1532.

[M26] A. Andreev, M. Racheva, Properties and estimates of an integral type nonconforming finite element, Springer LNCS 7116, 523-530, 2012.

[M27] A.B. Andreev, M.R. Racheva, Quadratic finite element approximation of a contact eigenvalue problem, Springer LNCS 7116, 531-538, 2012.

[M28] А.Б. Андреев, М.Р. Рачева, Нижние границы для собственных значений и постобработка неконформным методом конечных элементов (МКЭ) интегрального типа, Сибирский журнал вычислительной математики, Т. 15, No 3, с. 235-249.

[M29] M.R. Racheva, Approximation from below of the exact eigenvalues by means of nonconforming FEMs, Mathematica Balkanica (to appear).

Избрани чужди цитирания на публикации, включени в дисертационния труд

[M5] A. B. Andreev, R. D. Lazarov and M. R. Racheva, Postprocessing and higher order convergence of mixed finite element approximations of biharmonic eigenvalue problems, JCAM, Vol. 182(2), 2005, 333-349.

1. Li Bingjie and Liu Sanyang, On gradient-type optimization method utilizing mixed finite element approximation for optimal boundary control problem governed by biharmonic equation, Applied Mathematics and Computation, Vol.186(2), 2007, pp. 1429-1440.

2. G.I. Tsamasphyros, S. Markolefas, D.A. Tsouvalas, Convergence and performance of the $h-$ and $p-$extensions with mixed finite element C^0-continuity formulations, for tension and buckling of a gradient elastic beam, International Journal of Solids and Structures, 44 (14-15), 2007, pp. 5056-5074.

3. В.В. Вербицкий, А.В. Вербицкий, Повышение скорости сходимости собственных значений конечно элементной апроксимации задачи о колебаниях пологой оболочки, Вiсник Одесък. Нац. Ун-ту. - 2008 - Т. 3, вип. 17. Матем i мех. - С. 34-42.

4. H. Chen, S. Jia and H. Xie, Postprocessing and higher order convergence for the mixed finite element approximations of the Stokes eigenvalue problems, Applications of Mathematics, Springer Netherlands, Vol. 54 (3), 2009, 237-250.

5. N. Nataraj, A mixed finite element method for fourth order eigenvalue problems,Applied Mathematics and Computation, Vol. 213(1), 2009, pp. 60-72.

6. X. Liu, Y. Huang, Z. Deng, The eigenvalue problems of biharmonic equations, ACTA MATHEMATICA SCIENTIA, Vol. 29(1), 2009, 57-69.
7. H. Chen, S. Jia and H. Xie, Postprocessing and higher order convergence for the mixed finite element approximations of the eigenvalue problem, Applied Numerical Mathematics, Vol. 61, Issue 4 (2011), 615-629.

[M9] K. Adolfson, M. Enelund, S. Larsson and M. Racheva, Discretization of integro-differential equations modelling dynamic fractional order viscoelasticity, Lecture Notes in Computer Science, 2006, Volume 3743 (2006), 76-83.
1. M.E. Rognes, R. Winther, Mixed finite element methods for linear viscoelasticity using weak symmetry, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 20, Issue 6(2010), pp. 955-985.
2. F. Saedpanah, A continuous space-time finite element method for an integro-differential equation modeling dynamic fractional order viscoelasticy, Preprint, Department of Mathematical Sciences, Division of Mathematics, Chalmers University of Technology, University of Gothenburg, 1652-9715 ; 2009:17.
3. M.E. Rognes, Mixed finite element methods with applications to viscoelasticity and gels, Series of dissertations submitted to the Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Oslo Nr. 851, 2009, ISSN 1501-7710.
4. M López-Fernández, C Lubich, A Schädle, Adaptive, fast and oblivious convolution in evolution equations with memory, SIAM J. Sci. Comput., 30(2008), pp. 1015-1037.
5. K. Mustapha, W. McLean, Discontinuous Galerkin method

for an evolution equation with a memory term of positive type, Math. Comp. 78 (2009), 1975-1995.

[M21] A.B. Andreev, M.R. Racheva, A Zienkiewicz-type finite element applied to fourth-order problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (2010), 348-357.
1. G.C.P. de Oliveira, Estabilidade hidrodinâmica em células eletroquímicas pelo método de elementos finitos, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2011.

[M1] M.R. Racheva and A.B. Andreev, Superconvergence postprocessing for eigenvalues, Comp. Methods in Appl. Math., **2** (2002), No 2, 171-185.
1. K. Kolman, A Two-level method for nonsymmetric eigenvalue problems, Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series), Springer, Vol. 21 No 1, 1-12, 2005.
2. H. Chen, S. Jia and H. Xie, Postprocessing and higher order convergence for the mixed finite element approximations of the Stokes eigenvalue problems, Applications of Mathematics 54 (2009), No. 3, 237-250.
3. N.B. Kerimov, Z.S. Aliev, Some spectral properties of a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary condition, Doklady Mathematics - Springer, 2006, Vol. 74, No. 3, pp. 883-886.
4. В.В. Вербицкий, А.В. Вербицкий, Повышение скорости сходимости собственных значений конечно элементной апроксимации задачи о колебаниях пологой оболочки, Вiсник Одесък. Нац. Ун-ту. - 2008 - Т. 3, вип. 17. Матем i мех. - С. 34-42.
5. A.G. Demidov, E. Yarevsky, Adaptive finite element method

based on superconvergence, Days on Diffraction (DD) 2009, Proceedings of the International Conference (IEEE), 2010, pp. 197-201.
6. S. Giani, L. Grubisic and J. Ovall, Benchmark results for testing adaptive finite element eigenvalue procedures, Applied Numerical Mathematics,Vol. 62, Issue 2 (2012), pp. 121-140.
7. H. Chen, S. Jia and H. Xie, Postprocessing and higher order convergence for the mixed finite element approximations of the eigenvalue problem, Applied Numerical Mathematics Volume 61, Issue 4 (2011), 615-629.

[M8] A. B. Andreev, J. T. Maximov and M. R. Racheva, Finite element modelling for a beam on the Winckler's type foundation with variable rigidity, Sib. JNM, Vol. 8, No1, 23-30, 2005.
1. Г. Дунчева , А. Анчев, Крайноелементно моделиране на деформациите в системата винтово свредло - самозатягащ патронник, Journal of TU-Gabrovo, Vol. 31, 47 - 55, 2005.
2. Т. Кузманов, Хр. Метев, Г. Дунчева, Анализ на процеса свредловане на отвори в наклонени повърхнини, Journal of TU-Gabrovo, Vol. 31, 72 - 75, 2005.

Авторска справка

Получените в дисертацията резултати могат да се резюмират в следните няколко пункта:

1. Направен е пълен анализ за вариационните аспекти на едномерни и многомерни спектрални задачи от четвърти ред в смесена формулировка. Предложена е нова апостериорна техника за смесената бихармонична спектрална задача.

2. Получени са оценки за устойчивост при смесена формулировка спрямо времевата променлива за задача от вискоеластичността.

3. Представен и анализиран е нов подход в МКЕ чрез елементи с интегрални степени на свобода за широк клас спектрални задачи с "нестандартни" гранични условия.

4. Доказани са свойства на неконформните крайни елементи и са приложени в апостериорните техники. Специално място е отделено на един модифициран вариант на елемент на Зенкевич за елиптични уравнения от четвърти ред.

5. Дисертацията дава принос в получаване на долни граници на собствените стойности за елиптични оператори от втори и четвърти ред. За пръв път, в този аспект, се извършват числови експерименти с вариант на правоъгълен аналог на елемент на Морли. Предложен е и оригинален алгоритъм за получаване на двустранни оценки на собствените стойности.

6. Даден е нов подход при извод на вариационен математически модел на греда върху Винклерова основа.

7. Предложени са алгоритми за ускоряване на сходимостта при смесен и неконформен МКЕ.