

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО ИНФОРМАЦИОННИ И КОМУНИКАЦИОННИ
ТЕХНОЛОГИИ

Петя Тодорова Боянова

ОПТИМАЛНИ МНОГОНИВОВИ МЕТОДИ ЗА
НЕКОНФОРМНИ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ

ДИСЕРТАЦИЯ

за придобиване на

образователната и научна степен „Доктор“
по научна специалност: 01.01.09. „Изчислителна математика“
в професионално направление: 4.5. „Математика“

Научен ръководител:

Проф. дмн Светозар Маргенов

София, 2011 г.

Съдържание

Увод	5
1 Въведение	19
1.1 Метод на крайните елементи	19
1.2 Итерационни методи за решаване на системи с разредени матрици	26
1.2.1 Метод на спрегнатия градиент	26
1.2.2 Метод на спрегнатия градиент с преобуславяне	29
1.2.3 Обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне	32
1.3 Алгебричен многоивов итерационен метод – AMLI	34
1.3.1 Константа в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц; локални оценки	35
1.3.2 Алгебрични двуивови методи	38
1.3.3 Линейни и нелинейни AMLI методи	41
2 Многоивови методи за линейни параболични задачи	47
2.1 Елиптична и параболична задача – постановка и дискретизация	48
2.2 Двуивови разделяния за елиптични задачи, дискретизирани с неконформни крайни елементи	51
2.3 Адитивен преобусловител за водещия диагонален блок	56
2.4 DA разделяне за параболични задачи: оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ	59
2.5 Робастни AMLI преобусловители за параболични задачи	64

2.6 Числени експерименти	69
3 Многонивови методи за граф-лапласиани с тегла	79
3.1 Смесена задача – постановка и дискретизация	80
3.2 Структура на матрицата на задачата за налягането: граф-лапласиан с тегла	83
3.3 Йерархично разделяне, оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ	88
3.4 Преобусловител за водещия диагонален блок	93
3.5 Числени експерименти	97
3.5.1 Изследване свойствата на йерархичния базис	98
3.5.2 Изследване свойствата на преобусловителя за водещия диагонален блок	101
4 Многонивови методи за уравненията на Навие-Стокс	107
4.1 Уравнения на Навие-Стокс: постановка на задачата и проекционен метод	108
4.2 Съставен многонивов метод	110
4.3 Числени експерименти	116
Заключение	123
Литература	127

УВОД

Съвременно състояние и актуалност на темата

Много от най-значимите достижения в съвременната наука и технология се дължат на напредъка в областта на компютърното моделиране. Ефективността на този сложен интердисциплинарен процес при намирането на решение на различни задачи в приложната и научна области на човешкото знание, се основава на работата и успехите в съвкупност от научни направления. Компютърното моделиране включва създаване на: а) математически модел, адекватно описващ съответния реален феномен; б) числени методи за дискретизация на диференциалните и/или интегрални уравнения; в) ефективни методи и алгоритми за решаване на получените след дискретизацията системи от линейни алгебрични уравнения; г) алгоритми за визуализация и анализ на резултатите от проведените числени експерименти; д) високопроизводителни компютърни програми, които в максимална степен използват възможностите и архитектурата на съвременните изчислителни системи. Компютърният модел дава възможност не само за икономии при скъпо струващи лабораторни и практически експерименти. В редица случаи още по-важно е моделирането на характеристиките на нови материали и технологии, както и изследването на процеси, за които измерванията и наблюденията са невъзможни.

Основни средства за дискретизация на диференциални уравнения са методът на крайните елементи и методът на крайните разлики, вж. напр. [36, 38, 4]. След тяхното прилагане, задачата се свежда до система от линейни алгебрични

уравнения [1, 3]. Едно от най-важните свойства на тези системи е, че съответните матрици са разредени. Това означава, че броят на ненулевите елементи във всеки ред или стълб е ограничен от константа, която не зависи от параметъра на дискретизация на съответния метод и следователно не зависи от размерността на дискретната задача, която се увеличава с намаляването на дискретизационния параметър. Известно е, че решаването на задачи на изчислителната линейна алгебра с разредени матрици е определящо за ефективността на доминиращата част от съществуващите програми за компютърно моделиране на процеси, които се описват с диференциални уравнения [10, 3]. Това е особено важно при решаване на сложни задачи с голяма размерност. Понятието голяма размерност се променя с нарастване на производителността на изчислителната техника, но независимо от огромния прогрес в това отношение, определящи за развитието на компютърното моделиране са постиженията в областта на числените методи и алгоритмите за тяхната реализация. Резултатите представени в настоящата дисертация са в тази област.

Методът на крайните елементи (МКЕ) и методът на крайните разлики са представители на така наречените мрежови методи и при определени предположения матриците на получаваните линейни системи са с близки свойства и дори могат да съвпадат. Независимо от това, методът на крайните елементи има определени предимства по отношение на общността и алгоритмите за неговата реализация. Изследванията в дисертацията системно използват терминологията и свойствата на метода на крайните елементи.

Дискретизацията с конформни линейни крайни елементи е най-подробно изучения случай на прилагане на МКЕ, но в редица важни приложения неконформните крайни елементи имат сериозни предимства. Например, при числено моделиране на течения в силно хетерогенни порести среди, методът на крайните обеми и смесеният метод на крайните елементи притежават доказано добра точност и локална консервативност (на масата). При прилагането на смесен МКЕ, непрекъснатостта на скоростта по направление на нормалата към границата между два крайни елемента може да се наложи чрез Лагранжеви множители. В

[5] Arnold и Brezzi показват, че след елиминиране на неизвестните на налягането и скоростта от алгебричната система, задачата за Лагранжевите множители с допълнението на Шур е еквивалентна на дискретизация на елиптична задача чрез метод на Гальоркин с линейни неконформни крайни елементи. По-точно, в [5] е показано, че апроксимация със смесен метод с крайни елементи на Равиар-Тома от най-нисък ред е еквивалентна на апроксимация с неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар, при която крайно-елементното пространство е допълнено с кубични базисни функции, всяка от които има за носител един краен елемент.

Друго приложение на неконформните елементи, в частност, на елементите на Крозе-Равиар, на което искаме да обърнем внимание, е свързано с итерационни методи за решаване на задачи, дискретизирани с прекъснат метод на Гальоркин (Discontinuous Galerkin – DG). В [6], Ayuso de Dios и Зикатанов предлагат равномерно сходящи итерационни методи, които се основават на естествено разделяне на пространството на DG елементите от първи ред на директна сума от крайно-елементното пространство на Крозе-Равиар и подпространство, което съдържа функции, непрекъснати по вътрешни за областта интерфейси между елементите.

Това са някои от причините за специалния интерес към прилагане на неконформните крайни елементи за ефективно числено решаване на диференциални уравнения, което е предмет на настоящата дисертация.

Ако разгледаме елиптична гранична задача в областта $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и за нейното числено решаване приложим мрежков числен метод, то при много общи предположения диференциалната задача се свежда до система от линейни алгебрични уравнения със симетрична и положително определена матрица A с размерност $N \times N$. Основните методи за решаване на такъв клас линейни системи най-общо се разделят на два вида – преки и итерационни. Методът на Холецки е един от най-добре известните преки методи. Предполага се, че той отчита лентовата структура или профила на матрицата при подходяща номерация на неизвестните и при определени предположения има изчислителна сложност $\mathcal{O}(N^2)$. Ме-

тодът на вложените сечения (Nested Dissection), вж. напр. [10], е най-бързият измежду преките методи. В основата на този метод е рекурсивното разделяне на графа, представящ структурата на ненулевите елементи на матрицата A , а изчислителната му сложност е $\mathcal{O}(N^{3/2})$. Един от най-популярните итерационни методи е методът на спрегнатия градиент. Той има сложност, която асимптотично съвпада със сложността на най-добрания пряк метод. По тази причина е прието, че предимствата на итерационните методи за решаване на задачи с достатъчно голяма размерност са безспорни.

Итерационните методи в подпространства на Крилов са в класацията на десетте най-значими постижения в областта на алгоритмите през XX век. Методът на спрегнатия градиент и неговото обобщение, методът на спрегнатия градиент с преобуславяне, са съвременни методи от вариационен тип в подпространства на Крилов, вж. напр. [8, 10, 36]. Ефективността на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне се определя от качествата на преобусловителя. Важна роля в развитието на методите за решаване на линейни системи играят изследванията в областта на конструирането на така наречените оптимални преобусловители, за които изчислителната сложност на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне е $\mathcal{O}(N)$.

В съвременната теория на оптималните итерационни методи, основна роля играят методите построени върху последователност от мрежи (триангулации). Тези методи се разделят на многомрежови (multigrid), [37, 53] и многонивови (multilevel), [15, 19, 20, 59, 66, 78]. По традиция първата група се счита, че използва повече свойствата на диференциалната задача, докато при втората група конструкцията е в значителна степен алгебрична и се реализира в термините на метода на крайните елементи и съответните матрици на коравина. Историята на рекурсивните итерационни методи, използващи последователност от вложени мрежи, води началото си от работата на Р. Федоренко [45], публикувана през 1961 г. През 1987 г. П. Василевски, Р. Лазаров и С. Маргенов [66] конструират почти оптимален алгебричен многонивов метод. Решителна следваща стъпка в тази област е направена в работите на Axelsson и Василевски [19, 20], където са

въведени AMLI методите. Тук за първи път са получени оптимални оценки, за които не се предполага допълнителна регулярност на решението на диференциалното уравнение. Както и в други дялове на математиката, напълно заслужено можем да говорим за българска школа в областта на оптималните алгебрични итерационни многонивови методи. Основни приноси в това направление са публикувани в работите на П. Василевски, Р. Лазаров, С. Маргенов.

Методология на изследването

Понятията изчислителна сложност и скорост на сходимост са основни в методологията на изследване в дисертацията. Получените резултати имат конструктивен характер, като всички предложени и изследвани методи имат ясна алгоритмична структура.

Методът на спрегнатия градиент с преобуславяне е в основата на съвременните итерационни методи. Неговата ефективност се определя от скоростта на сходимост и изчислителната сложност на решаването на система с преобусловителя. Спектралното число на обусловеност $\kappa(C^{-1}A)$ на преобусловената матрица е мярка за скоростта на сходимост на метода. Така например, за оптимални многонивови методи $\kappa(C^{-1}A) = \mathcal{O}(1)$ и броят на итерациите, достатъчни за получаване на решение с предварително зададена точност, е ограничен от константа, която не зависи от размерността на дискретната задача.

В случая на многонивови преобусловители, числото на обусловеност зависи от константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ). В дисертацията са представени нови оптимални многонивови методи. Използваният апарат на изследване включва конструиране на спектрално еквивалентни приближения за специални класове матрици, възникващи в процеса на многонивова факторизация и получаване на нови равномерни оценки на константата в усиленото неравенство на КБШ. Направена е програмна реализация на представените в дисертацията методи и алгоритми, проведени са числени експерименти и са анализирани получените числени резултати.

Цели на дисертационния труд

Основните цели на изследванията в дисертацията са:

- Разработване и изследване на оптимални преобусловители от класа на алгебричните многонивови методи (AMLI) за двумерни параболични задачи, дискретизирани с линейни неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар.
- Разработване и изследване на оптимални многонивови методи за двумерни елиптични задачи в смесена форма, дискретизирани с неконформни крайни елементи.
- Създаване на съставен метод за нестационарните уравнения на Нави-Стокс, основан на оптимални многонивови преобусловители за системите, получени при устойчива локално консервативна дискретизация с неконформни крайни елементи.

Работата по дисертацията има за цел, както теоретично изследване на предложените методи, така и програмна реализация и анализ на резултатите от числени експерименти.

Съдържание на дисертацията

Глава 1. Въведение

Първата глава има въвеждащ характер. В началото накратко представяме метода на крайните елементи и негови основни свойства. Раздел 1.2 е посветен на итерационни методи за решаване на системи линейни уравнения с разредени матрици. Представен е методът на спрегнатия градиент с преобуславяне и оценка за неговата скорост на сходимост с помощта на числото на обусловеност на матрицата на системата. Формулирана е стратегия за конструиране на ефективни преобусловители и условия за оптималност.

В Раздел 1.3 е направено въведение в теорията на оптималните алгебрични многонивови методи. Многонивовите методи представляват рекурсивно обобщение на съответните двунивови методи, които се получават чрез двунивово разделяне на крайно-елементното пространство. Такива методи са конструирани първо за линейни конформни елементи, за които съответните крайно-елементни пространства са вложени. За качеството на едно двунивово разделяне може да се съди от константата γ в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ), която участва в оценката за числото на обусловеност на преобусловената матрица. Интересни са такива разделяния, за които има равномерна оценка за константата γ . Представен е основен подход за анализ на константата в усиленото неравенство на КБШ чрез локални оценки.

Глава 2. Многонивови методи за линейни параболични задачи

В Раздел 2.1 са представени постановка на двумерна елиптична и параболична задачи и дискретизацията им с метод на крайните елементи. В структурата на матрицата на системата на дискретната параболична задача участват матрица на коравина и матрица на масата. Предложените в тази глава многонивови методи за решаване на системи от този вид, получени при дискретизация с крайни елементи на Крозе-Равиар, се основават на така наречените “differences and aggregates” – DA (“разлики и агрегати”) и “first reduce” – FR (“първоначално изключване”) техники за двунивови юерархични разделяния за елиптични задачи. Тези техники, както и оценки за константата в усиленото неравенство на КБШ за разделяне на матрици на коравина, представяме в Раздел 2.2, а в Раздел 2.3 е описан преобусловител за водещия диагонален блок в блочната факторизация на съответната юерархична матрица.

В Раздел 2.4 е изведена оценка за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне на матрицата на масата. Направен е теоретичен анализ на двунивово разделяне за дискретната параболична задача и са предложени два подхода за конструиране на оптимален многонивов преобусловител.

Раздел 2.5 е посветен на обобщение на робастни преобусловители за параболични задачи, дискретизирани с помощта на конформни и неконформни крайни елементи. Направено е сравнение в термините на оценки за константата в усиленото неравенство на КБШ γ . Представени са числени резултати за поведението на стойностите на γ в случая на мрежова (и еквивалентно, коефициентна) анизотропия.

В Раздел 2.6 дефинираме две задачи, чрез които членено изследваме поведението на предложените многонивови преобусловители за параболични задачи. Първата задача цели да илюстрира въздействието на мрежовата анизотропия върху сходимостта на итерационните методи за решаване на разглежданите системи, а втората демонстрира поведението на многонивовите методи при решаване на нестационарна задача с прекъснато начално условие. Проведени са числени експерименти с нелинеен AMLI преобусловител за DA и FR разделяне и няколко случая на степен на стабилизиращия полином.

Глава 3. Многонивови методи за граф-лапласиани с тегла

В Раздел 3.1 е представена постановка на елиптична задача в смесена форма за векторната функция на скоростта и скаларната функция на налягането, както и системата от линейни алгебрични уравнения, получена като резултат от прилагане на МКЕ.

Разглеждаме дискретизация с комбинация от неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар и на части константи. В този случай неизвестните на скоростите могат да бъдат изключени точно и задачата се свежда до задача за решаване на система за налягането. Видът на матрицата на системата е изведен в Раздел 3.2, като тя има структура на граф-лапласиан с тегла.

В Раздел 3.3 предлагаме семейство юерархични разделяния за матрицата на налягането, основани на представянето ѝ като сума от специално въведени локални макроелеметни матрици, асоциирани със страни на елементи от грубата мрежа. Изведените в този раздел оценки за константата в усиленото неравен-

ство на КБШ за случая на триангулация с правоъгълни триъгълни крайни елементи, са равномерни относно размерността на задачата.

Основен аспект в конструирането на оптимални AMLI преобусловител е дефинирането на подходящи апроксимации на водещите диагонални блокове в многонивовата факторизация. В Раздел 3.4 е предложен и изследван преобусловител за тези блокове, основан на полиномиална апроксимация на обратна матрица. Конструкцията запазва линейността в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне.

В Раздел 3.5 е проведен системен числен анализ на предложените техники за многонивово преобуславяне на граф-лапласиани с тегла. Последователно са изследвани свойствата на йерархичното разделяне и полиномиалната апроксимация на водещите диагонални блокове.

Глава 4. Многонивови методи за уравненията на Навие-Стокс

В Глава 4 е разработен алгоритъм за решаване на нестационарните уравнения на Навие-Стокс, основан на оптимални многонивови методи. Приближено решение на задачата за течение на флуид търсим с помощта на проекционен метод, който е описан в Раздел 4.1. Използваната дискретизация с неконформни крайни елементи осигурява устойчивост и локална консервативност.

В Раздел 4.2 разглеждаме подробно структурата на системите, възникващи на конвективно-дифузионната и проекционната стълки в проекционния метод. Приложението на многонивовите преобусловител, разработени в Глава 2 и Глава 3, води до съставен метод за нестационарната задача с оптимална сложност.

Числен анализ на свойствата на предложения съставен алгоритъм е представен в Раздел 4.3. Разглеждаме задачата за течение, предизвикано от движение на безкраен капак по повърхността на контейнер пълен с флуид. Получените резултати за сходимостта на итерационните методи за решаване на системите в предложения алгоритъм потвърждават неговата числена ефективност.

Списък на публикациите по дисертацията

Научни публикации в списания и периодични издания:

- P. Boyanova, S. Margenov, *Multilevel Splitting of Weighted Graph-Laplacian Arising in Non-conforming Mixed FEM Elliptic Problems*, Numerical Analysis and Its Applications, Springer LNCS **5434**, 2009, 216–223.
- P. Boyanova, S. Margenov, *Numerical Study of AMLI Methods for Weighted Graph-Laplacians*, Large-Scale Scientific Computing, Springer LNCS **5910**, 2010, 84–91.
- P. Boyanova, S. Margenov, *On Optimal AMLI Solvers for Incompressible Navier-Stokes Problems*, AIP Conference Proceedings vol. 1301, 2010, 457-467.
- P. Boyanova, S. Margenov, M. Neytcheva, *Robust AMLI Methods for Parabolic Crouzeix-Raviart FEM Systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235(2) (2010), 380–390.
- P. Boyanova, S. Margenov, *On Multilevel Iterative Methods for Navier-Stokes Problems*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 40, Number 1, 2010, 51–60.

Глави в книги:

- P. Boyanova, S. Margenov, *Robust Multilevel Methods for Elliptic and Parabolic Problems*, invited chapter in: O. Axelsson, J. Karatson, Efficient preconditioning methods for elliptic partial differential equations, Bentham Science Publishers, 2011, 3–22.

В процес на рецензиране:

- P. Boyanova, I. Georgiev, S. Margenov, L. Zikatanov, *Multilevel Preconditioning of Graph-Laplacians: Polynomial Approximation of the Pivot Blocks Inverses*.

Една от представените публикации по дисертацията е в списанието “Journal of Computational and Applied Mathematics” с “импакт фактор” 1.029 за 2010 година.

Апробация на резултатите

Съществени части от дисертацията са представени на следните специализирани международни научни конференции:

- 4th Conference on “Numerical Analysis and Applications”, Lozenetz, Bulgaria, 2008
- 7th International Conference on “Large-Scale Scientific Computations”, Sozopol, Bulgaria, 2009
- 4th IMACS Conference on “Mathematical Modelling and Computational Methods in Applied Sciences and Engineering”, Roznov pod Radhostem, Czech Republic, 2009
- 7th Conference on Numerical Methods and Applications – NM&A’10, Borovets, Bulgaria, 2010
- Emerging Topics in Dynamical Systems and Partial Differential Equations – DSPDEs’10, Barcelona, Spain, 2010

Резултати от дисертацията са докладвани и в рамките на:

- Информационни дни по проекта Bulgarian IST Center of Competence in 21 Century (BIS-21++), Боровец, България, 2007
- 3rd Annual meeting of BGSIAM’08, Sofia, Bulgaria, 2008
- Workshop on “Numerical Methods and High Performance Computations”, IPP– BAS, Sofia, Bulgaria, 2009

Участие в научни проекти

- Център за върхови научни постижения “Суперкомпютърни приложения”, фонд “Научни изследвания”, ДО02-115/2008
- Методи, алгоритми и софтуерни средства за задачи с голяма размерност и йерархични компютърни модели, фонд “Научни изследвания”, ДО02-147/2008
- Развитие на методите на механиката на непрекъснати среди чрез численни и аналитични приложения на вариационни принципи ,фонд “Научни изследвания”, ДО02-338/2008
- Адаптивни и йерархични алгоритми в метода на крайните елементи, фонд “Научни изследвания”, VU-MI-202/2006
- Finite element preconditioners for algebraic problems as arising in modelling of multiphase microstructures, 2009/2011, Swedish Research Council (VR)

Благодарности

Поднасям най-сърдечна благодарност на научния си ръководител проф. дмн Светозар Маргенов за постоянното внимание, съдействието, както и ползотворната съвместна работа по разработваните теми.

Дълбоко съм благодарна на доц. Мая Нейчева, д-р Иван Георгиев, д-р Johannes Kraus, проф. Людмил Зикатанов и проф. Петър Минев за оказаната помощ и полезните дискусии на различни етапи от работата по дисертацията. Също така благодаря и на колегите от ИИКТ-БАН за подкрепата и стимулиращата творческа атмосфера.

Благодарна съм за оказаната подкрепа в рамките на цитираните научни проекти ДО02-115/2008, ДО02-147/2008, ДО02-338/2008 и VU-MI-202/2006 към

фонд "Научни изследвания" и Finite element preconditioners for algebraic problems as arising in modelling of multiphase microstructures към Swedish Research Council.

Изказвам специални благодарности на семейството си за постоянната подкрепа. Работата по дисертацията посвещавам на баща си.

Глава 1

Въведение

Настоящата глава има въвеждащ характер. Тук се прави въведение в предметната област на изследванията в дисертацията, обобщават се известни факти, използвани на различни етапи от изложението на представените по-късно резултати. Структурата на въведението следва духа на [60].

Целта на дисертацията е разработването на ефективни итерационни алгоритми за решаване на системи, получени чрез дискретизация по МКЕ с неконформни крайни елементи. В следващите раздели на кратко представяме основни резултати за метода на крайните елементи, въвеждаме понятието неконформни крайни елементи, правим описание на методите на спрегнатия градиент, спрегнатия градиент с преобуславяне и обобщения метод на спрегнатия градиент с преобуславяне. Разработените и представени в настоящия труд оптimalни преобусловители се основават на конструирането на многонивови разделяния. По-долу описваме този подход, както и един основен метод за неговия анализ – извеждането на локални оценки.

1.1 Метод на крайните елементи

Методът на крайните елементи е вариант на класическия метод на Риц, при който крайно-мерното пространство на търсене на екстремума на функционала,

дефиниран чрез вариационната формулировка на задачата, е на части полино-
миално.

MKE възниква в инженерната практика като метод за решаване на задачи
в механика на конструкциите. Скоро става ясно, че методът има много по-общ
характер и днес той е сред основните средства за числено решаване на диферен-
циални уравнения [4, 10, 36, 41], наложило се поради елегантната математичес-
ка формулировка и поради широката употреба за числено решаване на важни
(класове от) задачи с приложения в техническите, медицински, естествени и
други науки.

Нека разгледаме елиптичната гранична задача

$$(1.1.1a) \quad -\nabla \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$(1.1.1b) \quad u = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D,$$

$$(1.1.1c) \quad (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N,$$

за неизвестната скаларна функция $u(\mathbf{x})$ където Ω е многогълна (многостенна)
област в двумерното или тримерното пространство \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, а $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_2(\Omega)$
е дадена функция. Предполагаме, че коефициентната матрица $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ в (1.1.1) е
симетрична, положително определена и равномерно ограничена в Ω , т.е., съ-
ществуват положителни константи c_1 и c_2 , така че,

$$(1.1.2) \quad c_1 \|\mathbf{v}\|^2 \leq \mathbf{v}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \leq c_2 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

С \mathbf{n} е означена външната нормала към границата $\Gamma = \partial\Omega$. Границата е разде-
лена на две непресичащи се части, $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, върху които има наложени
съответно гранични условия на Дирихле и Нойман.

Вариационната формулировка на задача (1.1.1) се записва във вида: За да-
дена дясна част $f \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ търсим $u \in \mathcal{V}$, така че

$$(1.1.3a) \quad \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

$$(1.1.3b) \quad \mathcal{A}(u, v) := \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$(1.1.3c) \quad \mathcal{F}(v) := \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$(1.1.3d) \quad \mathcal{V} := \mathcal{H}_D^1(\Omega) \equiv \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega) : v = 0 \text{ върху } \Gamma_D\}.$$

Приближено решение на вариационната задача (1.1.3) търсим в подходящо крайно-мерно подпространство на \mathcal{V} . Методът на крайните елементи е техника за избор на такива подпространства. Нека Ω е многоъгълна област, разделена на краен брой подобласти, наречени крайни елементи. Елементите са на това разделяне (триангуляция) \mathcal{T}_h , наричано още крайно-елементна мрежа, обикновено имат приставка \mathcal{T}_h , например триъгълници или четириъгълници в двумерния случай. Мрежа, за която всички елементи са (геометрично) еднакви, наричаме равномерна. Числото $h := \max_{e \in \mathcal{T}_h} h_e$, където h_e е характерният размер на елемента e , се нарича характерен размер на мрежата (или мрежов параметър).

Най-често използваните в МКЕ подпространства \mathcal{V}_h съдържат на части полиноми. Нека с $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ е означено пространството от непрекъснати функции, дефинирани върху $\overline{\Omega}$. Тогава, при предположение, че

$$\mathcal{V}_h := \{v : v|_e \in \mathcal{P}_r(e) \quad \forall e \in \mathcal{T}_h\},$$

$$P_r(e) := \{w : w \text{ е полином от степен най-много } r \text{ върху } e\} \quad \forall e \in \mathcal{T}_h,$$

следното условие на непрекъснатост е в сила, вж. напр. [56]:

$$(1.1.4) \quad \mathcal{V}_h \subset \mathcal{H}^1(\Omega) \text{ тогава и само тогава, когато } \mathcal{V}_h \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}).$$

Идеята в МКЕ е да заменим безкрайно-мерното пространство \mathcal{V} в (1.1.3) с \mathcal{V}_h , т.e., да разгледаме задачата: Да се намери $u_h \in \mathcal{V}_h$ така че

$$(1.1.5) \quad \mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h,$$

където в случая на скаларна елиптична задача, $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$ и $\mathcal{F}_h(\cdot)$ се дефинират

като

$$(1.1.6a) \quad \mathcal{A}_h(u_h, v_h) \equiv \mathcal{A}(u_h, v_h) := \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$(1.1.6b) \quad \mathcal{F}_h(v_h) \equiv \mathcal{F}(v_h) := \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Всеки МКЕ с на части полиноми, които принадлежат на Соболевото пространство за което е дефинирана вариационната задача, т.e., $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, се нарича *конформен* метод, [36]. Когато тестовите функции v_h са от същото пространство \mathcal{V}_h в което се търси (приближеното) решение u_h , МКЕ се нарича стандартен метод на *Галъоркин*.

При предположение, че $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, разликата между (1.1.5) и (1.1.3a) дава равенството

$$(1.1.7) \quad \mathcal{A}(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h,$$

което често се нарича *ортогоналност на Галъоркин*. То показва, че крайно-елементното решение u_h е проекция на точното решение u върху \mathcal{V}_h относно скаларното произведение $\langle v, w \rangle_{\mathcal{A}} := \mathcal{A}(v, w)$ (дефинирано в \mathcal{V}). С други думи, u_h е елементът на най-добро приближение на u в \mathcal{V}_h в нормата, дефинирана от скаларното произведение $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$, т.e.,

$$(1.1.8) \quad \|u - u_h\|_{\mathcal{A}} \leq \|u - v_h\|_{\mathcal{A}} \quad \text{за всяко } v_h \in \mathcal{V}_h.$$

Пример за конформни крайни елементи са така наречените крайни елементи на Курант, или още *конформни \mathcal{P}_1 елементи*, където

$$(1.1.9) \quad \mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^C := \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v|_e \in \mathcal{P}_1(e) \quad \forall e \in \mathcal{T}_h, v(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D\}.$$

Когато пространството \mathcal{V}_h , което използваме за приближено решаване на вариационната задача, не се съдържа в \mathcal{V} , МКЕ се нарича *неконформен* метод, т.e., дискретизация с неконформни крайни елементи.

Да разгледаме задачата в слаба форма (1.1.5) за случая на крайно-елементно пространство \mathcal{V}_h , чиито елементи v_h са на части непрекъснати, но не удовлет-

всякото условие за непрекъснатост в цялата област, т.e. $\mathcal{V}_h \not\subset C^0(\bar{\Omega})$. За елиптичната моделна задача билинейната форма $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$ може да се дефинира като

$$(1.1.10) \quad \mathcal{A}_h(u_h, v_h) := \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \int_e \mathbf{a}(e) \nabla u_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

В този случай $\mathbf{a}(e)$ е на части константна, симетрична, положително определена матрица, дефинирана чрез интегрално усреднени стойности на $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ върху всеки елемент e от мрежата \mathcal{T}_h , т.e.,

$$(1.1.11) \quad \mathbf{a}(e) = \frac{1}{|e|} \int_e \mathbf{a}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall e \in \mathcal{T}_h.$$

Тази формулировка допуска (големи) скокове на коефициентите по границата между съседни крайни елементи от \mathcal{T}_h .

Забележка 1.1.1 Твой като $\mathbf{w}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{w} > 0$ за всеки вектор $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ за всяка точка $\mathbf{x} \in e$, то $\mathbf{w}^T \mathbf{a}(e) \mathbf{w} = \frac{1}{|e|} \mathbf{w}^T \left(\int_e \mathbf{a}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \mathbf{w} = \frac{1}{|e|} \int_e \mathbf{w}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{w} d\mathbf{x} > 0$, т.e. $\mathbf{a}(e)$ е положително определена.

Освен грешката от дискретизация, в случая на неконформни крайни елементи се появява и втори източник на грешка в численото решение. Той се дължи на факта, че равенството

$$\mathcal{A}_h(u, v_h) = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h$$

не е непременно в сила.

Пример за неконформни елементи, използвани за дискретизация на елиптични гранични задачи от втори ред, са крайните елементи на Крозе-Равиар, наричани още *неконформни P₁ елементи*, вж. напр., [36]. Крайно-елементното пространство на Крозе-Равиар се дефинира като

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^{CR} := \{v \in \mathcal{L}_2(\Omega) : v|_e \in \mathcal{P}_1 \quad \forall e \in \mathcal{T}_h, \\ v \text{ е непрекъсната в средите на страните на } \forall e \in \mathcal{T}_h, \\ v \text{ е равна на нула в средите на страни по границата } \Gamma_D\}, \end{aligned}$$

Известно е, че за елиптични задачи, грешката при дискретизация с неконформни елементи на Крозе-Равиар е от същия порядък като грешката при дискретизация с конформни елементи на Курант, вж. напр. [50].

Независимо от избраното крайно-мерно пространство, намирането на приближение на решението на гранични задачи като (1.1.1) чрез МКЕ се свежда до решаване на система линейни алгебрични уравнения с голяма размерност, получени по следния начин:

Нека разгледаме базис на крайно-елементното пространство \mathcal{V}_h , означен с $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$. Тогава всяка функция v_h в \mathcal{V}_h има единствено представяне

$$v_h = \sum_{i=1}^N v_i \phi_i$$

където v_i са реални коефициенти. Записваме решението u_h на (1.1.5) във вида $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$. Тогава, задачата (1.1.5) е еквивалентна на

$$(1.1.12) \quad \sum_{i=1}^N \mathcal{A}_h(\phi_i, \phi_j) u_i = \mathcal{F}_h(\phi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

което в матрична форма се записва като

$$(1.1.13) \quad A\mathbf{u} = \mathbf{b}.$$

Тук $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ е неизвестният вектор, а дясната част $\mathbf{b} = \{b_j\}_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$ се дефинира като

$$(1.1.14) \quad b_j = \mathcal{F}_h(\phi_j) \quad 1 \leq j \leq N.$$

Базисните функции $\phi_i \in \Phi$ имат локален носител и по конструкция във всеки ред от *матрицата на коравина* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ има само не голям брой елементи

$$(1.1.15) \quad a_{ij} = \mathcal{A}_h(\phi_i, \phi_j) \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

различни от нула. Матрици, които имат не повече от $\mathcal{O}(1)$ ненулеви елемента на ред, се наричат *разредени* матрици.

В случая на елиптична билинейна форма $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$ е в сила следното важно свойство

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T A \mathbf{v} &= \sum_{i,j=1}^N v_i \mathcal{A}_h(\phi_i, \phi_j) v_j = \mathcal{A}_h\left(\sum_{i=1}^N v_i \phi_i, \sum_{j=1}^N v_j \phi_j\right) \\ (1.1.16) \quad &= \mathcal{A}_h(v_h, v_h) > 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Освен това, от симетричността на $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$ очевидно следва че A е симетрична, което заедно с (1.1.16) показва, че A е симетрична и положително определена.

Нека h е характерният размер на квази-регулярената мрежа T_h . Тогава следната оценка е в сила за спектралното число на обусловеност на матрицата на коравина за елиптична задача от втори ред:

$$(1.1.17) \quad \kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} = \mathcal{O}(h^{-2}).$$

Забележка 1.1.2 Условието за квази-регулярност може да се дефинира, например, като изискване за ограниченност на отношението на опишаната и вписаната окръжности за краен елемент, вж. напр. [40]. По същество, това условие регулира допустимите ъгли на елементите от триангулацията.

Забележка 1.1.3 В дисертацията предполагаме, че мрежите са съставени от триъгълни крайни елементи.

Забележка 1.1.4 На различни места в текста използваме понятието “равномерно” съсствяване на мрежата. При него всеки краен елемент от дадена група мрежа се разделя на четири нови геометрично еднакви триъгълника, чрез свързване на средите на страните му.

1.2 Итерационни методи за решаване на системи с разредени матрици

1.2.1 Метод на спрегнатия градиент

Нека матрицата A е симетрична и положително определена. Тогава задачата за намиране на решението на линейната система

$$(1.2.18) \quad Ax = b$$

е еквивалентна на задачата за намиране минимума на функционала ψ , дефиниран като

$$(1.2.19) \quad \psi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b.$$

В този случай $\psi(x)$ има единствен минимум $-\frac{1}{2}b^T A^{-1}b$, който се достига за $x = A^{-1}b$.

Възможна е следната проста итерационна процедура за минимизиране на квадратичния функционал ψ : За дадено текущо приближение $x_{(n-1)}$, пресмятаме резидуала

$$(1.2.20) \quad r_{(n-1)} = b - Ax_{(n-1)} = -\nabla\psi(x_{(n-1)})$$

и търсим следващо приближение във вида

$$(1.2.21) \quad x_{(n)} = x_{(n-1)} + \alpha_n r_{(n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

където α_n минимизира $\psi(x_{(n-1)} + \alpha_n r_{(n-1)})$. По този начин получаваме

$$(1.2.22) \quad \alpha_n = \frac{r_{(n-1)}^T r_{(n-1)}}{r_{(n-1)}^T A r_{(n-1)}}.$$

Тъй като $r_{(n-1)}$ е отрицателният градиент на ψ в $x_{(n-1)}$, итерационният процес (1.2.21)–(1.2.22) е известен като *метод на най-бързото спускане*. Глобалната

му сходимост следва от следната оценка за грешката на n -тото приближение $\mathbf{x}_{(n)}$ (вж. напр. [60]):

$$(1.2.23) \quad \|\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}\|_A^2 \leq \|\mathbf{x}_{(n-1)} - \mathbf{x}\|_A^2 \left(1 - \frac{4}{2 + \kappa(A) + 1/\kappa(A)}\right),$$

където $\|\cdot\|_A$ е нормата, породена от *енергетичното скаларно произведение* $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$, т.e., $\|\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}\|_A^2 = \langle (\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}), (\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}) \rangle_A = (\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x})^T A (\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x})$. За съжаление методът на най-бързото спускане често се схожда бавно, особено когато градиентите в (1.2.21) имат много близки посоки. Тази трудност може да бъде преодоляна, ако наложим условието направленията на търсене да са взаимно ортогонални по отношение на енергетичното скаларно произведение, т.e.,

$$(1.2.24) \quad \langle \mathbf{p}_{(i)}, \mathbf{p}_{(j)} \rangle_A = \langle \mathbf{p}_{(i)}, A \mathbf{p}_{(j)} \rangle = \mathbf{p}_{(i)}^T A \mathbf{p}_{(j)} = 0 \quad \text{за } i \neq j.$$

Методът на спрегнатия градиент, който представяме по-долу, има това свойство.

Алгоритъм 1.2.1 [Метод на спрегнатия градиент] (вж. напр. [49])

$$n = 0; \quad \mathbf{r}_{(0)} = \mathbf{b} - A \mathbf{x}_{(0)};$$

while (*не е изпълнено условието за спиране на итерационния процес*) **do**

$$n = n + 1$$

if ($n = 1$) **then**

$$(1.2.25) \quad \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{r}_{(0)}$$

else

$$(1.2.26) \quad \beta_n = -\frac{\langle \mathbf{r}_{(n-1)}, \mathbf{p}_{(n-1)} \rangle_A}{\langle \mathbf{p}_{(n-1)}, \mathbf{p}_{(n-1)} \rangle_A}$$

$$(1.2.27) \quad \mathbf{p}_{(n)} = \mathbf{r}_{(n-1)} + \beta_n \mathbf{p}_{(n-1)}$$

end

$$(1.2.28) \quad \alpha_n = \frac{\langle \mathbf{r}_{(n-1)}, \mathbf{r}_{(n-1)} \rangle}{\langle \mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{p}_{(n)} \rangle_A}$$

$$(1.2.29) \quad \mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{(n-1)} + \alpha_n \mathbf{p}_{(n)}$$

$$(1.2.30) \quad \mathbf{r}_{(n)} = \mathbf{b} - A \mathbf{x}_{(n)}$$

end

Следната фундаментална лема е в сила за метода на спрегнатия градиент:

Лема 1.2.1 *След изпълнението на n итерации в метода на спрегнатия градиент е в сила:*

$$(1.2.31) \quad \text{span}\{\mathbf{p}_{(1)}, \mathbf{p}_{(2)}, \dots, \mathbf{p}_{(n)}\} = \text{span}\{\mathbf{r}_{(0)}, \mathbf{r}_{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{(n-1)}\}$$

$$= \text{span}\{\mathbf{r}_{(0)}, A\mathbf{r}_{(0)}, \dots, A^{n-1}\mathbf{r}_{(0)}\}$$

$$(1.2.32) \quad \langle \mathbf{r}_{(i)}, \mathbf{r}_{(j)} \rangle = 0 \quad \text{за } i \neq j, \quad 0 \leq i, j \leq n-1,$$

$$(1.2.33) \quad \langle \mathbf{p}_{(i)}, \mathbf{p}_{(j)} \rangle_A = 0 \quad \text{за } i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Доказателство. Доказателството се извършва по индукция, вж. напр. [60]. ■

С помощта на Лема 1.2.1 могат да се докажат следните две теореми (вж. напр. [8, 60, 2])

Теорема 1.2.1 *Разглеждаме Алгоритъм 1.2.1 с условие за спиране на итерационния процес $\mathbf{r}_{(n)} = \mathbf{0}$. Тогава, (в точна аритметика) $A\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{b}$ се достига за някое $n \leq N$, където N е размерността на системата.*

Доказателство. Теоремата следва от Лема 1.2.1, понеже съществуват най-много N взаимно ортогонални ненулеви вектора $\mathbf{r}_{(n)}$, $n \geq 0$. ■

Теорема 1.2.1 показва, че в точна аритметика методът на спрегнатия градиент достига точното решение на (1.2.18) след не повече от N итерации. Когато методът на спрегнатия градиент се прилага към системи уравнения с голяма размерност, този резултат е само с теоретична стойност. По-точна оценка за скоростта на сходимост на Алгоритъм 1.2.1 се дава от следната теорема:

Теорема 1.2.2 *В сила е неравенството*

$$(1.2.34) \quad it(\epsilon) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\kappa(A)} \ln(2/\epsilon) + 1,$$

където с $it(\epsilon)$ е означено най-малкото цяло положително число n , за което n -тото приближение $\mathbf{x}_{(n)}$, пресметнато чрез метода на спрегнатия градиент

(Алгоритъм 1.2.1), удовлетворява условието

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(n)}\|_A \leq \epsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(0)}\|_A, \quad \forall \mathbf{x}_{(0)} \in \mathbb{R}^N.$$

1.2.2 Метод на спрегнатия градиент с преобуславяне

Според Теорема (1.2.2), броят итерации в метода на спрегнатия градиент, необходими за достигане на желана относителна точност, зависи от спектралното число на обусловеност на матрицата на системата. В частност, оценката (1.1.17) предполага, че броят итерации за елиптични задачи от втори ред, ще расте пропорционално на $\mathcal{O}(\sqrt{h^{-2}}) = \mathcal{O}(\sqrt{N})$.

С цел подобряване на сходимостта в случая на решаване на лошо обусловени системи, се прилага така наречената техника на преобуславяне. Методът на спрегнатия градиент с преобуславяне се е наложил като предпочитан итерационен метод за решаване на системи линейни алгебрични уравнения с разредени симетрични и положително определени матрици. Той се извежда, като Алгоритъм 1.2.1 се приложи за трансформираната (преобусловена) система¹

$$(1.2.35) \quad \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}},$$

където $\tilde{A} = C^{-\frac{1}{2}}AC^{-\frac{1}{2}}$, $\tilde{\mathbf{x}} = C^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}$, а $\tilde{\mathbf{b}} = C^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b}$. В алгоритъма не е необходимо явно да се използва представянето $C = C^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}$ на преобусловителя (вж. напр., [49]), така че на практика се работи директно със самата матрица C .

¹ Ако C е симетрична и положително определена, то и преобусловената матрица \tilde{A} също е такава.

Алгоритъм 1.2.2 [Метод на спрегнатия градиент с преобуславяне] (вжс. напр. [24])

$n = 0; \quad \mathbf{r}_{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_{(0)};$
while (*не е изпълнено условието за спиране на итерационния процес*) **do**
 (1.2.36) *решава се* $C\mathbf{z}_{(n)} = \mathbf{r}_{(n)}$
 $n = n + 1$
 $\gamma_{n-1} = \langle \mathbf{r}_{(n-1)}, \mathbf{z}_{(n-1)} \rangle$
if ($n = 1$) **then**
 (1.2.37) $\mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{z}_{(0)}$
else
 (1.2.38) $\beta_n = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}}$
 (1.2.39) $\mathbf{p}_{(n)} = \mathbf{z}_{(n-1)} + \beta_n \mathbf{p}_{(n-1)}$
end
 (1.2.40) $\mathbf{q}_{(n)} = A\mathbf{p}_{(n)}$
 (1.2.41) $\alpha_n = \frac{\gamma_{n-1}}{\langle \mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{q}_{(n)} \rangle}$
 (1.2.42) $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{(n-1)} + \alpha_n \mathbf{p}_{(n)}$
 (1.2.43) $\mathbf{r}_{(n)} = \mathbf{r}_{(n-1)} - \alpha_n \mathbf{q}_{(n)}$
end

Алгоритъм 1.2.2 използва псевдо-резидуалите $\mathbf{z}_{(n)} = C^{-1}\mathbf{r}_{(n)}$ вместо $\mathbf{r}_{(n)}$, ето защо в този случай квадратичният функционал, който се минимизира, е

$$(1.2.44) \quad \psi(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{A} \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{b}},$$

а вместо $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ се решава системата $C^{-\frac{1}{2}}A\mathbf{x} = C^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b}$. Приближеното решение, получено чрез метода на спрегнатият градиент с преобуславяне, се схожда към точното решение на оригиналната система (1.2.18). Теорема 1.2.2 може да се приложи за определяне на скоростта на сходимост и на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне, като този път в оценката (1.2.34) участва спектралното число на обусловеност на преобусловената матрица, $\kappa = \kappa(C^{-1}A)$.

Методът на спрегнатия градиент с преобуславяне притежава няколко важни свойства, а именно:

- Скоростта на сходимост може да се подобри чрез подходящ избор на преобуславяне.
- Алгоритъмът не е обвързан с параметри, които трябва да се оценяват.
- Изискванията за използваната памет са малки: в реализацията на Алгоритъм 1.2.2 е необходимо да се съхраняват само пет вектора, разредената матрица A и (факторизирано) представяне на оператора C^{-1} .
- Броят на аритметичните операции за една итерация е малък: Алгоритъм 1.2.2 включва едно умножение на матрица по вектор, три векторни операции и две скаларни умножения. Основната тежест на изчисленията пада върху решаването на системи с преобусловителя.

От оценката на скоростта на сходимост и конструкцията на метода следва следната обща стратегия за конструиране на ефективни преобусловители (вж. напр. [8, 73]). Целта е матрицата C в Алгоритъм 1.2.2 да удовлетворява следните две условия:

- Да съществува ефективен алгоритъм за решаване на системи с преобусловителя C , с изчислителна сложност много по-малка от сложността на решаване на системи с оригиналната матрица, т.e. $\mathcal{N}(C^{-1}\mathbf{x}) \ll \mathcal{N}(A^{-1}\mathbf{x})$.
- Относителното число на обусловеност на преобусловената матрица да е съществено по-малко от това на изходната матрица, т.e., $\kappa(C^{-1}A) \ll \kappa(A)$.

Дефиниция 1.2.1 Казваме, че преобусловителят C е оптимален, когато $\mathcal{N}(C^{-1}\mathbf{x}) = \mathcal{O}(N)$ и $\kappa(C^{-1}A) = \mathcal{O}(1)$, където с N е означена размерността на системата.

1.2.3 Обобщен метод на спрегнатия градиент с преобусляване

Така нареченият обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне позволява използването на различни (променящи се) преобусловители на различни итерации, вж. напр. [7, 12, 21, 22, 71]. В този случай преобусловителят не се представя като линеен оператор (симетрична положително определена матрица), а може да се дефинира чрез самия итерационен процес.

Основната разлика по отношение на стандартния метод на спрегнатия градиент е, че поради по-общия вид на преобусловителя, ортогоналността на направленията на търсене $\mathbf{P}_{(n)}$ не е гарантирана и трябва да се наложи експлицитно. Нека $C[\cdot]$ е преобусловител, т.е. изображение от \mathbb{R}^N в \mathbb{R}^N , който може да е и нелинеен, а стъпка (1.2.36) в Алгоритъм 1.2.2 е заменена с $\mathbf{z}_{(n)} = C^{-1}[\mathbf{r}_{(n)}]$. Тогава, при предположение, че A е симетрична и положително определена, направлението на търсене с номер n се ортонормализира спрямо m_n предходни направления на търсене по отношение на енергетичното скаларно произведение, дефинирано от A , т.е.,

$$(1.2.45) \quad \mathbf{p}_{(n)} = \mathbf{z}_{(n-1)} - \sum_{j=n-m_n}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{z}_{(n-1)}, A\mathbf{p}_{(j)} \rangle}{\langle \mathbf{p}_{(j)}, A\mathbf{p}_{(j)} \rangle} \mathbf{p}_{(j)}$$

където $\{m_n\}_{n=1,2,\dots}$ са параметри.

Забележка 1.2.1 Поради необходимостта да се пазят повече вектори и допълнителните изчисления, обобщеният метод на спрегнатия градиент с преобуславяне е по-скъп от стандартния метод на спрегнатия градиент с преобуславяне.

Алгоритъм 1.2.3 [Обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне] (вж. напр. [22, 71])

$$n = 0; \quad \mathbf{r}_{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_{(0)};$$

while (не е изпълнено условието за спиране на итерационния процес) **do**

$$(1.2.46) \quad \mathbf{z}_{(n)} = C^{-1}[\mathbf{r}_{(n)}]$$

$$n = n + 1$$

$$\mathbf{P}_{(n)} = \mathbf{z}_{(n-1)}$$

$$(1.2.47) \quad \mathbf{q}_{(n)} = A\mathbf{p}_{(n)}$$

$$(1.2.48) \quad \text{for } j = n - m_n \text{ to } n - 1$$

$$\beta = \frac{\langle \mathbf{q}_{(n)}, \mathbf{p}_{(j)} \rangle}{\gamma_j}$$

$$\mathbf{p}_{(n)} = \mathbf{p}_{(n)} - \beta \mathbf{p}_{(j)}$$

$$\mathbf{q}_{(n)} = \mathbf{q}_{(n)} - \beta \mathbf{q}_{(j)}$$

end

$$\gamma_n = \langle \mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{q}_{(n)} \rangle$$

$$\alpha_n = \frac{\langle \mathbf{r}_{(n)}, \mathbf{p}_{(n)} \rangle}{\gamma_n}$$

$$\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{(n-1)} + \alpha_n \mathbf{p}_{(n)}$$

$$\mathbf{r}_{(n)} = \mathbf{r}_{(n-1)} - \alpha_n \mathbf{q}_{(n)}$$

end

Операциите от тип умножение на матрица по вектор, необходими за (1.2.45) са скрити в стъпка (1.2.47) и не се изпълняват явно в цикъла (1.2.48), т.e., изпълнението на стъпка (1.2.47) преди (1.2.48) гарантира A -ортогонални направления на търсene. Записан по този начин, за фиксиран линеен оператор $C^{-1}[\cdot] = C^{-1}$ (за симетричен и положително определен преобусловител C), описаният алгоритъм при $m_n = n - 1$ се свежда до стандартния метод на спрегнатия градиент с преобуславяне.

Общ резултат за сходимостта на обобщения метод на спрегнатия градиент с преобуславяне е представен в [7]. В [71] е изведена следната оценка за случая на нелинейен преобусловител, близък до линеен оператор:

Теорема 1.2.3 ([71]) Нека A и C са $N \times N$ симетрични положително определени матрици, а $C^{-1}[\cdot]$ е изображение от \mathbb{R}^N в \mathbb{R}^N . Нека също така \mathbf{b} и $\mathbf{x}_{(0)}$ са вектори от \mathbb{R}^N , а $\mathbf{r}_{(n)}$, $\mathbf{x}_{(n)}$ са резидуалите и приближенията решения, получени за последователност от итерации на Алгоритъм 1.2.3 с преобусловител $C[\cdot]$ за линейната система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ако за някое n ,

$$\frac{\|C^{-1}[\mathbf{r}_{(n)}] - C^{-1}\mathbf{r}_{(n)}\|_C}{\|C^{-1}\mathbf{r}_{(n)}\|_C} \leq \epsilon_n < 1$$

то тогава

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(n+1)}\|_A}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(n)}\|_A} \leq \sqrt{1 - \frac{4\kappa(1 - \epsilon_n)^2}{(\kappa + \epsilon_n^2(\kappa - 1) + (1 - \epsilon_n)^2)^2}}$$

където $\kappa = \kappa(C^{-1}A)$.

1.3 Алгебричен многонивов итерационен метод – AMLI

Алгебричният многонивов преобусловител (от английски: Algebraic MultiLevel Iteration method – AMLI) е оптимален преобусловител, предложен за първи път в [19, 20] за случая на елиптична задача, дискретизирана с конформни линейни крайни елементи. По-късно методът е обобщен за неконформни дискретизации, прекъснат метод на Гальоркин, предложени са и нелинейни алгоритми (вж. напр. [26, 27, 28, 46, 57, 60, 63, 64, 65, 69] и цитиранията, представени там).

Нека A е симетрична положително полуопределенна матрица със следното блочно две на две представяне:

$$(1.3.49) \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

където блокът A_{11} е неособен. В сила е следната точна факторизация:

$$(1.3.50) \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & \\ A_{21} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I_2 \end{bmatrix},$$

където S , $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, е дополнението на Шур.

Лема 1.3.1 Нека A е симетрична положително определена матрица, а $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$ е вектор с компоненти \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , съгласувани по размерност с блочното разделяне (1.3.49) на A , като \mathbf{x}_2 е фиксирано. В сила е следното екстремално свойство на допълнението на Шур:

$$(1.3.51) \quad \mathbf{x}_2^T S \mathbf{x}_2 = \min_{\mathbf{x}_1} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}.$$

От Лема (1.3.1) следва, че допълнението на Шур S на симетрична положително определена матрица A също е симетрична положително определена матрица.

Различни техники на преобуславяне се основават на апроксимиране на (някои от) блоковете в (1.3.50). Важно е да се отбележи, че допълнението на Шур на разредена матрица в общия случай не е разредена матрица. При конструирането на ефективни преобусловителни, този факт води до необходимостта да се избере подходяща апроксимация на S , която да е разредена матрица. Един алтернативен на описания по-долу и използван в дисертацията избор на подобна апроксимация, е разгледан напр. в [13, 58, 70].

Ефективността на преобусловителите, основани на блочна факторизация, силно зависи от свойствата на разделянето (1.3.49), което се характеризира с константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ).

1.3.1 Константа в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц: локални оценки

Нека $W = V_1 \times V_2$ е разделяне на векторното пространство, съгласувано по размерност с блочното представяне (1.3.49) на положително полуопределената матрица A с неособен блок A_{11} . Нека също така $\mathbf{v}_i \in V_i$, $i = 1, 2$ и $W_1 = \{\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{0}^T]^T\}$, $W_2 = \{\mathbf{v} = [\mathbf{0}^T, \mathbf{v}_2^T]^T\}$.

Константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц се дефинира като минималната положителна константа γ , удовлетворяваща за всеки

ненулеви $\mathbf{v}_i \in V_i$, $i = 1, 2$, неравенството

$$(1.3.52) \quad |\mathbf{v}_1^T A_{12} \mathbf{v}_2| \leq \gamma \left\{ \mathbf{v}_1^T A_{11} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2 \right\}^{1/2}.$$

Така дефинирана, γ характеризира блочното разделяне на матрицата. Константата в усиленото неравенство на КБШ е индикатор за относителната тежест (влияние) на извън-диагоналните блокове $A_{12} = A_{21}^T$ и геометрично се интерпретира като косинуса на абстрактния ъгъл между пространствата W_1 и W_2 .

Следните три леми (вж. напр. [8, 44]) са основата за извеждане на теоретични оценки на константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц.

Лема 1.3.2 *Нека A е симетрична положително полуопределенна матрица, A_{11} е положително определена, а γ е най-малката константа, за която е изпълнено (1.3.52). Тогава:*

(a) $\gamma \leq 1$.

(б) $\gamma = 1$ ако съществува $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \in \ker(A)$ за което $\mathbf{v}_2 \notin \ker(A_{22})$.

(в) $\gamma < 1$ ако за всяко $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \in \ker(A)$ е изпълнено $\mathbf{v}_2 \in \ker(A_{22})$.

(г) При предположенията във (в),

$$\gamma = \sup_{\mathbf{v}_i \in V_i \setminus \ker(A_{ii}), i=1,2} \frac{\mathbf{v}_1^T A_{12} \mathbf{v}_2}{(\mathbf{v}_1^T A_{11} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2)^{1/2}}.$$

Лема 1.3.3 *Нека A е симетрична положително полуопределенна матрица, изпълняваща условието (в) от Лема 1.3.2. Тогава*

(a)

$$(1.3.53) \quad \gamma^2 = \sup_{\mathbf{v}_2 \in V_2 \setminus \ker(A_{22})} \frac{\mathbf{v}_2^T A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2}.$$

(6) за всяко $\mathbf{v}_2 \in V_2 \setminus \ker(A_{22})$

$$(1.3.54) \quad 1 - \gamma^2 \leq \frac{\mathbf{v}_2^T S \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2} < 1,$$

където лявото неравенство е точно, а дясното е точно, ако $\ker(A_{12}) \neq \{0\}$.

Следният важен резултат за локален анализ на константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц, може да се покаже с помощта на горните две леми (вж. също [65]). Нека предположим, че матрицата на системата може да се представи като

$$(1.3.55) \quad A = \sum_{E \in \mathcal{E}} A_E, \quad \mathbf{v} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mathbf{v}_E,$$

където A_E са симетрични положително полуопределени локални матрици, \mathcal{E} е множество от индекси, а сумирането е в смисъл на асемблиране. По естествен начин глобалното разделяне на векторното пространство определя две на две блочно представяне на локалните матрици A_E и съответните вектори \mathbf{v}_E ,

$$(1.3.56) \quad A_E = \begin{bmatrix} A_{E:11} & A_{E:12} \\ A_{E:21} & A_{E:22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E:1} \\ \mathbf{v}_{E:2} \end{bmatrix}.$$

Лема 1.3.4 Нека локалните матрици A_E , $E \in \mathcal{E}$, удовлетворяват условие (в) на Лема 1.3.2. Нека също така $V_{E:i}$, $i = 1, 2$ е естествената рестрикция на V_i , породена от локалната матрица A_E . Тогава

$$(1.3.57) \quad \gamma \leq \max_{E \in \mathcal{E}} \gamma_E < 1$$

където с γ_E сме означили локалната константа в усиленото неравенство на КБШ, отговаряща на A_E , т.е.,

$$(1.3.58) \quad \gamma_E^2 = \sup_{\mathbf{v}_{E:2} \in V_{E:2} \setminus \ker(A_{E:22})} \frac{\mathbf{v}_{E:2}^T A_{E:21} A_{E:11}^{-1} A_{E:12} \mathbf{v}_{E:2}}{\mathbf{v}_{E:2}^T A_{E:22} \mathbf{v}_{E:2}}.$$

Забележка 1.3.1 Условие (в) на Лема 1.3.2 гарантира, че е в сила неравенството $\gamma_E < 1$.

1.3.2 Алгебрични двуникови методи

Разглеждаме адитивен (C_A) и мултипликативен (C_F) двуникови преобусловители в следната алгебрична форма:

$$(1.3.59) \quad C_A = \begin{bmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$(1.3.60) \quad C_F = \begin{bmatrix} A_{11} & \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I \end{bmatrix}.$$

За адитивния преобусловител C_A се използва блочно-диагоналната част на оригиналната матрица, а мултипликативният C_F се получава като допълнението на Шур S се замести с блока A_{22} в точната факторизация (1.3.50).

Относителните числа на обусловеност на горе дефинираните два двуникови метода могат да бъдат оценени с помощта на константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц, като (вж. напр. [2, 60]):

$$(1.3.61) \quad \kappa(C_A^{-1}A) \leq \frac{1+\gamma}{1-\gamma},$$

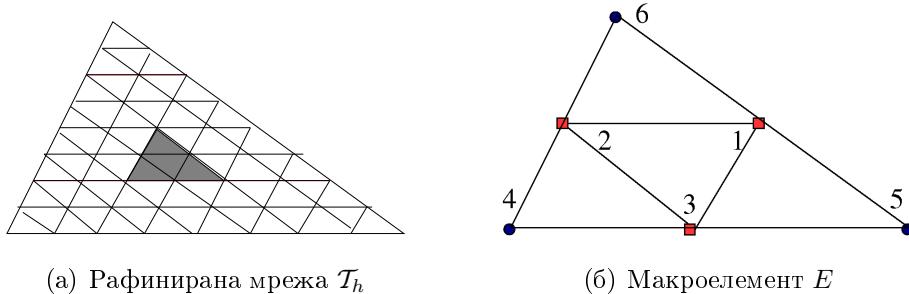
$$(1.3.62) \quad \kappa(C_F^{-1}A) \leq \frac{1}{1-\gamma^2}.$$

В по-обща постановка двуниковите методи могат да бъдат дефинирани и във вида

$$(1.3.63) \quad C_A = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix},$$

$$(1.3.64) \quad C_F = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ A_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & C_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_2 \end{bmatrix},$$

като в този случай относителните числа на обусловеност зависят от апроксимационните свойства на блоковете C_{11} и C_{22} относно A_{11}, A_{22}, S . Повече подробности за тези оценки, както и за други формулировки на C_A и C_F могат да бъдат намерени, например, в [8] и [14].



Фигура 1.1: Разделяне на възлите при построяване на двунивови преобусловители за конформни линейни крайни елементи: (а) Мрежата \mathcal{T}_h е получена чрез равномерно сгъстяване на \mathcal{T}_H ; (б) Възлите на мрежата разделяме на две групи: първата съдържа възлите от \mathcal{T}_H (с номера 4, 5 и 6), а втората – възлите, добавени при рафинирането (с номера 1, 2 и 3)

Класическата теория на оптималните двунивови методи за задачи, дискретизирани с МКЕ, за първи път е представена в [14, 23], вж. също [9]. Основната задача в конструирането на двунивови преобусловители, е да се избере подходящо разделяне на матрицата на коравина, така че константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц да е далеч от единица.

Общият подход за получаване на блочно две-на-две представяне на матрицата на системата се базира на дефинирането на две вложени крайно-елементни пространства $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}_h$, съответстващи на последователни равномерни сгъстявания на мрежата. Тази техника е първоначално предложена за преобуславяне на елиптични задачи, дискретизирани с конформни линейни крайни елементи, което е и най-добре изучения случай.

Нека \mathcal{T}_H и \mathcal{T}_h са две последователни триангулации на областта Ω , където \mathcal{T}_h е получена чрез равномерно сгъстяване на \mathcal{T}_H , а \mathcal{V}_H и \mathcal{V}_h са съответните крайно-елементни пространства. С $\{\phi_H^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N_H\}$ и $\{\phi_h^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N_h\}$ означаваме стандартните базисни възлови функции на \mathcal{V}_H и \mathcal{V}_h . Разделяме възлите \mathbf{N}_h на мрежата \mathcal{T}_h на две групи: първата съдържа възлите \mathbf{N}_H от \mathcal{T}_H , а втората – останалите, добавени при рафинирането, възли $\mathbf{N}_{h \setminus H}$ от $\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H$, вж.

Фигура 1.1. Така наречените *йерархични базисни функции* се дефинират като

$$(1.3.65) \quad \{\tilde{\phi}_h^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N_h\} = \{\phi_H^{(l)} \text{ върху } \mathcal{T}_H\} \cup \{\phi_h^{(m)} \text{ върху } \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H\},$$

а матрицата \tilde{A}_h , съответстваща на базиса (1.3.65) наричаме *йерархична матрицата на коравина*. Разделянето (1.3.65) дефинира блочна две на две структура и за двете матрици, A_h и \tilde{A}_h ,

$$(1.3.66) \quad A_h = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}N_{h \setminus H} \\ \}N_H \end{array},$$

$$(1.3.67) \quad \tilde{A}_h = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & A_H \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}N_{h \setminus H} \\ \}N_H \end{array}.$$

Известно е, че за разглеждания случай на линейни конформни крайни елементи, матрицата, трансформираща векторите от стандартен в йерархичен базис, има вида

$$(1.3.68) \quad J_h = \begin{bmatrix} I & 0 \\ J_{21} & I \end{bmatrix}.$$

Трансформацията на стандартната матрица на коравина A_h в йерархичната матрица $\tilde{A}_h = J_h A_h J_h^T$ не променя допълнението на Шур, т.e.,

$$(1.3.69) \quad S = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} = \tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} = \tilde{S}.$$

В случая на конформни линейни крайни елементи, йерархичното двунивово разделяне (1.3.67) изпълнява условията на Лема 1.3.4. Индексите \mathcal{E} обхождат множеството от макроелементи $E \in \mathcal{T}_h$, където макроелементът $E \in \mathcal{T}_h$ е съвкупността от триъгълните крайни елементи получени при равномерно разфиниране на краен елемент от грубата мрежа (вж. Фигура 1.1 (б)), а A_E са макроелементните матрици на коравина. Тогава, според Лема 1.3.3, локалните константи в усиленото неравенство на КБШ могат да бъдат пресметнати по следния начин:

$$(1.3.70) \quad \gamma_E^2 = 1 - \mu_1,$$

където μ_1 е минималното собствено число на обобщената спектрална задача

$$(1.3.71) \quad \tilde{S}_E \mathbf{v}_{E:2} = \mu A_e \mathbf{v}_{E:2}, \quad \mathbf{v}_{E:2} \neq \mathbf{c},$$

а $\mathbf{c}^T = (c, c, \dots, c)$ е произволен реален константен вектор.

Локалният анализ е приложим и за неконформни крайни елементи, като в този случай основен проблем е да се дефинира по подходящ начин йерархичен базис (вж. напр. [27, 46, 69]). По-специфични техники се прилагат и за прекъснат метод на Гальоркин, например в [64, 65]. Общата постановка на Лема 1.3.4 е приложима в различни конкретни случаи и е в основата на част от резултатите в дисертацията.

1.3.3 Линейни и нелинейни AMIL методи

Нека $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell$ са триангулации, получени чрез последователно равномерно сгъстяване на дадена начална мрежа \mathcal{T}_0 , с брой на възлите съответно $N_0 < N_1 < \dots < N_\ell$. Ще използваме следните означения: $C^{(k)}$ е преобусловител на крайно-елементна матрица $A^{(k)}$, съответстваща на мрежата \mathcal{T}_k , получена след k рафинирания на \mathcal{T}_0 , ($0 \leq k \leq \ell$). Матриците $\tilde{A}^{(k)}$ са йерархични матрици на ниво k , получени с помощта на двунивови йерархични трансформации дефинирани от разредени матрици $J^{(k)}$, т.e.,

$$(1.3.72) \quad \tilde{A}^{(k)} = J^{(k)} A^{(k)} (J^{(k)})^T.$$

Многонивовите методи се базират на двунивови методи. Директното рекурсивно обобщение води до клас йерархични методи, за които числото на обусловеност в общия случай расте (експоненциално) с увеличаване на броя на нивата ℓ . Ето защо, за да се построят многонивови преобусловители с оптимално число на обусловеност, т.e.,

$$\kappa(C^{(\ell)^{-1}} A^{(\ell)}) = O(1),$$

и оптимална изчислителна сложност (пропорционална на броя на неизвестните N_ℓ на най-фината мрежа), йерархичните преобусловители се комбинират с различни стабилизационни техники.

Така нареченият алгебричен многонивов итерационен метод (AMLI) е един конкретен подход за алгебрична стабилизация на някои (или всички) нива $k = 1, \dots, \ell$ чрез специално построен матричен полином P_{β_k} от степен β_k .

Целта е да се построи преобусловител $C^{(\ell)}$ за матрицата $A^{(\ell)} := A_h$ на най-фината мрежа.

Конструкцията е рекурсивна, като се започва от ниво 0, асоциирано с първоначалната (най-груба) триангулация:

$$(1.3.73) \quad C^{(0)} := A^{(0)}.$$

Нека AMLI преобусловителят на ниво $k - 1$ е $C^{(k-1)}$, тогава $C^{(k)}$ на ниво k се дефинира като

$$(1.3.74) \quad C^{(k)} := (J^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & 0 \\ \tilde{A}_{21}^{(k)} & Z^{(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(k)} & (C_{11}^{(k)})^{-1} \tilde{A}_{12}^{(k)} \\ 0 & I_2^{(k)} \end{bmatrix} (J^{(k)})^{-T}.$$

При линейният AMLI метод допълнението на Шур $\tilde{S}^{(k)}$ се апроксимира чрез

$$(1.3.75) \quad Z^{(k-1)} := A^{(k-1)} \left(I - P_{\beta_k}(C^{(k-1)-1} A^{(k-1)}) \right)^{-1},$$

където P_{β_k} е полином от степен β_k със свойството

$$P_{\beta_k}(0) = 1.$$

Може да се покаже, че (1.3.75) е еквивалентно на

$$(1.3.76) \quad Z^{(k-1)-1} = C^{(k-1)-1} Q_{\beta_{k-1}}(A^{(k-1)} C^{(k-1)-1})$$

където полиномът $Q_{\beta_{k-1}}$ от степен $k - 1$ има следния вид:

$$(1.3.77) \quad Q_{\beta_{k-1}}(t) = \frac{1 - P_{\beta_k}(t)}{t}.$$

На стъпка (1.2.36) в Алгоритъм 1.2.2 в метода на спрегнатия градиент трябва да се реши система с преобусловителя $C^{(\ell)}$. Действието на $C^{(\ell)-1}$ се реализира чрез определен AMLI цикъл. Формално различните варианти на AMLI цикли

могат да бъдат описани с помощта на вектор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)^T$, дефиниращ степените β_k на стабилизиращия полином по нива $k = 1, 2, \dots, \ell$. Случаят, в който на всяко ниво полиномът P_{β_k} е от първа степен, $\beta_k = 1, 1 \leq k < \ell$, е известен в литературата като AMLI V-цикъл. Когато стабилизацията на всяко ниво се реализира с полином от степен, $\beta_k = \beta, \beta > 1, 1 \leq k < \ell$, методът се нарича AMLI W-цикъл от степен β .

Нека константите γ_k в усиленото неравенство на КБШ, съответстващи на нивата на сгъстяване на мрежата $1 \leq k < \ell$, са равномерно ограничени от числото $\gamma < 1$, т.e. $\gamma_k \leq \gamma$. Следното достатъчно условие за оптималност на линейния AMLI метод е в сила за степента $\beta_k = \beta$ на стабилизиращия полином (вж. напр. [20, 21], както и [60]):

$$(1.3.78) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} < \beta < \rho,$$

където $\rho = \min_k \frac{N_k}{N_{k-1}}$. Ако неравенствата (1.3.78) са изпълнени, то съществува полином P_β , така че съответният линеен AMLI метод има оптимална скорост на сходимост и оптимална изчислителна сложност.

Нека за симетричните положително определени матрици $C_{11}^{(k)}$ е изпълнено условието

$$(1.3.79) \quad \mathbf{v}^T \tilde{A}_{11}^{(k)} \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^T C_{11}^{(k)} \mathbf{v} \leq (1 + \xi) \mathbf{v}^T \tilde{A}_{11}^{(k)} \mathbf{v}, \text{ за всяко } \mathbf{v}.$$

Тогава, за случая $\beta = 2$, коефициентите q_0 и q_1 на полинома $Q_1(y) = q_0 + q_1 y$ с оптимални стабилизиращи свойства в AMLI W-цикъла, могат да се пресметнат по следните формули (вж. напр. [20, 47]):

$$(1.3.80) \quad q_0 = \frac{2}{\omega}, \quad q_1 = \frac{-1}{1 - \gamma^2 + \xi(1 - 2\omega)}, \quad \text{където } \omega = \sqrt{1 + \xi + \xi^2 - \gamma^2} - \xi.$$

При конструиране на AMLI методи важна роля играят следните два аспекта:

- (a) Равномерна оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ $\gamma < 1$, която определя качеството на двунивовите разделяния по нива и е необходима за конструиране на стабилизиращия полином;

- (6) Избор на подходящи преобусловители $C_{11}^{(k)}$ за водещите диагонални блокове $\tilde{A}_{11}^{(k)}$, който влияе както на относителното число на обусловеност, така и на общата изчислителна сложност.

В [20] е показано, че относителното число на обусловеност на AMLI метода удовлетворява оценката:

$$(1.3.81) \quad \kappa(C^{(l)^{-1}} A^{(l)}) \approx (1 + \xi)/(1 - \gamma^2).$$

Свойствата на AMLI W-цикъла са силно зависими от избора на подходящ стабилизиращ полином, дефиниращ матрицата $Z^{(k-1)}$. На практика това води до необходимостта от висока точност на оценките на спектъра на преобусловената матрица $C^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)}$, които в някои случаи може да изискват тежки изчисления. Освен с помощта на матричен полином, стабилизация може да бъде постигната и чрез прилагане на определен брой вътрешни итерации. За разлика от стандартния линеен AMLI, полученият по този начин метод не включва необходимостта от определяне на параметри, но води до нелинеен алгоритъм с променливо преобуславяне. Разглежданият в дисертацията нелинеен AMLI алгоритъм (вж. също [22, 18, 77]), известен като NLAMLI, е представен, например, в [60, 57].

Обикновено нелинейният AMLI метод дефинира преобусловител, който е близък до линейно изображение, и това свойство може да се използва при извеждане на теоретични оценки за скоростта му на сходимост.

Нелинейният многонивов AMLI преобусловител $C^{(k)}[\cdot]$ на ниво k , $1 \leq k \leq \ell$, в общия случай е нелинейно изображение от \mathbb{R}^{N_k} в \mathbb{R}^{N_k} . Той се получава, като вместо матричния полином (1.3.75), за апроксимация на допълнението на Шур в (1.3.74) използваме нелинейното изображение $Z^{(k-1)}[\cdot]$, дефинирано по следния начин:

$$(1.3.82) \quad \begin{aligned} Z^{(0)}[\cdot] &= A^{(0)} \\ Z^{(k-1)}[\cdot] &:= C^{(k-1)}[\cdot] \quad \text{когато } \beta_k = 1 \text{ и } k-1 > 0 \\ Z^{(k-1)}[\cdot] &:= C_{\beta_k}^{(k-1)}[\cdot] \quad \text{когато } \beta_k > 1 \text{ и } k-1 > 0 \end{aligned}$$

Тук с $C_{\beta_k}^{(k-1)^{-1}}[\mathbf{b}] := \mathbf{x}_{(\beta_k)}$ е означено приближеното решение, получено след β_k на брой итерации с обобщения метод на спрегнатия градиент с преобуславяне (Алгоритъм 1.2.3), приложен към линейната система $A^{(k-1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с преобусловител $C^{(k-1)}[\cdot]$ и начално приближение $\mathbf{x}_{(0)} = \mathbf{0}$.

В най-обща постановка, броят на вътрешните итерации в нелинейния AMLI преобусловител може да е различен по различните нива $1 \leq k \leq \ell$. В дисертацията прилагаме случая, когато този брой е един и и същ за всяко k . Алгоритъмът, съответстващ на еднакъв брой, $\beta_k = \beta = 1, 1 \leq k \leq \ell$, вътрешни итерации, наричаме нелинеен AMLI V-цикъл, а този при $\beta_k = \beta > 1, 1 \leq k \leq \ell$ – нелинеен AMLI W-цикъл от степен β .

Глава 2

Многонивови методи за линейни параболични задачи

Тази глава е посветена на конструирането на оптимални робастни многонивови преобусловители за параболични задачи, дискретизирани с неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар.

Особено внимание при анализа на различни техники за намиране на приближени решения на частни диференциални уравнения се отделя на случая на решаване на елиптични задачи. Системите, получени при неявни дискретизации по времето на параболични уравнения, се различават от дискретни елиптични системи по добавения член от нулев порядък, съответстващ на елемента на реакция във физичния процес. В термините на дискретизации с метода на крайните елементи, този член е матрица на масата, която е положително определена. Интуитивно е очакването, че в този случай методи с преобуславяне, които имат добро поведение за елиптични задачи, ще имат дори по-добри характеристики при решаване на параболични задачи. В общия случай, това не винаги е изпълнено. В работата, включена в настоящата глава, за първи път е направен теоретичен и числен анализ на техники за преобуславяне на параболични задачи, които обобщават методи за оптимално многонивово преобуславяне на елиптични задачи. Получена е характеризация на двунивови разделяния

на матриците на системите в случая на параболични задачи, дискретизирани с крайни елементи на Крозе-Равиар. Тук представяме и сравнение на двунивови разделяния при конформни и неконформни дискретизации, което показва предимствата на неконформните крайни елементи при силно изразена мрежова (а следователно и коефициентна) анизотропия.

Основните резултати, включени в тази глава, са публикувани в:

- P. Boyanova, S. Margenov, M. Neytcheva, *Robust AMLI Methods for Parabolic Crouzeix-Raviart FEM Systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **235(2)** (2010), 380–390.
- P. Boyanova, S. Margenov, *Robust Multilevel Methods for Elliptic and Parabolic Problems*, invited chapter in: O. Axelsson, J. Karatson, Efficient preconditioning methods for elliptic partial differential equations, Bentham Science Publishers, 2011, 3–22.

2.1 Елиптична и параболична задача – постановка и дискретизация

Нека разгледаме елиптичната задача от втори ред

$$(2.1.1) \quad \begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) &= f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

и параболичната задача

$$(2.1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t)) &= f(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

където Ω е многоъгълна област в \mathbb{R}^2 , $f \in L^2(\Omega)$ е дадена функция, \mathbf{n} е външната нормала към границата $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \{a_{ij}(\mathbf{x})\}_{i,j \in \{1,2\}}$ е ограничена, симетрична положително определена матрица с на части гладки функции $a_{ij}(\mathbf{x})$ върху $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

В слаба форма горните задачи имат следния вид. За елиптичната задача (2.1.1): да се намери $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ върху } \Gamma_D\}$, така че за всяко $v(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$,

$$(2.1.3) \quad \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

а за параболичната задача (2.1.2): да се намери $u(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{V} \times H^1[0, T]$, $u(\mathbf{x}, 0) = u_0$, така че

$$(2.1.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

за всяко $v(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$.

Нека \mathcal{T}_ℓ е триангуляция на областта Ω , получена чрез ℓ последователни равномерни сгъстявания на дадена най-груба мрежа \mathcal{T}_0 . Нека освен това \mathcal{T}_0 е построена така, че скокове на коефициентите $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ има само по страните на елементите $e \in \mathcal{T}_0$, а върху всеки елемент $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(e)$ е константна функция. Не поставяме ограничения за максимална големина на скоковете по границите между елементи на \mathcal{T}_0 .

Забележка 2.1.1 В по-общия случай, когато $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ са гладки функции върху всеки краен елемент от мрежата \mathcal{T}_0 , въвеждаме помощна задача с интегрални усреднени стойности на $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, т.e. във вида (1.1.11). Тогава съответстващата на тази задача крайно-елементна матрица може да се използва при преобуславянето.

В елиптичната задача във вариационна форма (2.1.3) заместваме пространството от непрекъснати функции \mathcal{V} с крайно-мерното пространство (1.1.12) $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^{CR}$ на Крозе-Равиар. Тогава крайно-елементната формулировка на зада-

чата е: да се намери $u_h(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}_h$, за което

$$(2.1.5) \quad \sum_{e \in T_h} \int_e \mathbf{a}(e) \nabla u_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{e \in T_h} \int_e f(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall v_h(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}_h.$$

След дискретизация по пространството получаваме елиптичната система

$$(2.1.6) \quad K\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

където K е матрицата на коравина.

При параболичната задача (2.1.4) търсим приближение $u_h(\mathbf{x}, t) \in V_h$, което изпълнява

$$(2.1.7) \quad \begin{aligned} \sum_{e \in T} \frac{\partial}{\partial t} \int_e u_h(\mathbf{x}, t) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &+ \sum_{e \in T} \int_e \mathbf{a}(e) \nabla u_h(\mathbf{x}, t) \nabla v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{e \in T} \int_e f(\mathbf{x}, t) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

За дискретизация по времето използваме класическия θ -метод. Нека $t_n \in [0, T]$, $n = 0, 1, \dots, n_T$, е последователност от времеви моменти, $t_0 = 0, t_n = t_{n-1} + \Delta t$, където Δt е стъпката по времето. Тогава дискретизираната параболична задача (2.1.2) гласи: Да се намерят решенията $\mathbf{u}^n = u(\mathbf{x}, t_n)$, $n = 1, 2, \dots, n_T$ на системите

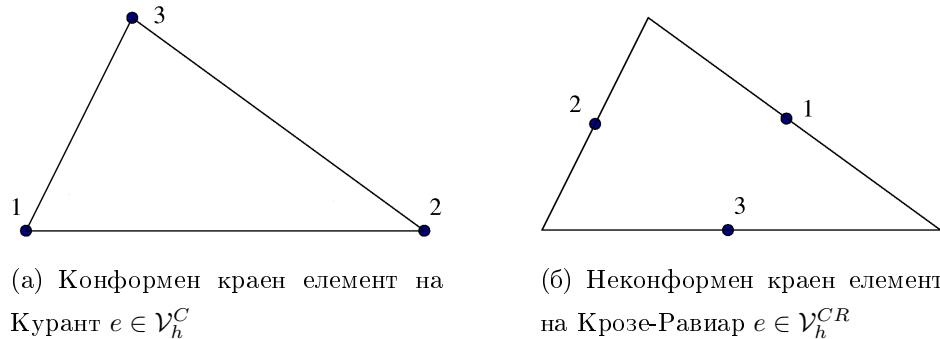
$$(2.1.8) \quad M \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} + (1 - \theta)K\mathbf{u}^n + \theta K\mathbf{u}^{n-1} = (1 - \theta)\mathbf{f}^n + \theta\mathbf{f}^{n-1},$$

където $0 \leq \theta \leq 1$, M и K са съответно крайно-елементни матрици на масата и коравината, началното условие удовлетворява $\mathbf{u}^0 = u_0(\mathbf{x})$, а $\mathbf{f}^n = f(\mathbf{x}, t_n)$.

По този начин на всяка стъпка по времето трябва да се реши линейна система във вида

$$(2.1.9) \quad (M + \Delta t(1 - \theta)K) \mathbf{u}^n = \mathbf{g}^n,$$

където дясната част $\mathbf{g}^n = (M + \Delta t\theta K)\mathbf{u}^{n-1} + \Delta t[(1 - \theta)\mathbf{f}^n + \theta\mathbf{f}^{n-1}]$ зависи от приближеното решение \mathbf{u}^{n-1} , пресметнато на предходна стъпка по времето.



Фигура 2.1: Степени на свобода при конформни и неконформни крайни елементи: (а) В случая на конформни крайни елементи на Курант степените на свобода се асоциират с върховете на триъгълните крайни елементи; (б) В случая на крайни елементи на Крозе-Равиар степените на свобода се асоциират със средите на страните на триъгълниците.

2.2 Двунивови разделяния за елиптични задачи, дискретизирани с неконформни крайни елементи

Както вече беше споменато, техниките за преобуславяне на параболични задачи, предложени в дисертацията, са обобщение на многонивови методи за елиптични уравнения. В този раздел представяме конструкцията на две юерархични двунивови разделяния за неконформни дискретизации, както и техни основни свойства, които използваме на по-късен етап в изложението.

Нека $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell$ са последователни вложени триангулации с характеристичен размер h_k , $k = 0, \dots, \ell$, получени чрез равномерно сгъстяване на дадена начална мрежа \mathcal{T}_0 . При неконформните крайни елементи на Крозе-Равиар (1.1.12), степените на свобода се асоциират със средите на страните на крайните елементи, вж. Фигура 2.1. По построение, съответните крайно-елементни пространства $\mathcal{V}_h^0, \mathcal{V}_h^1, \dots, \mathcal{V}_h^\ell$ не са вложени. Ето защо не съществува естественото

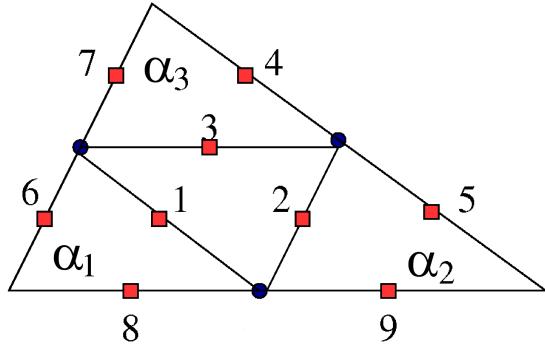
йерархично разделяне на “стари” и “нови” възли, а възможните трансформации с помощта на които да използваме общата конструкция на AMLI метода не са нито очевидни, нито единствени. За да се приложи общийят подход на AMLI преобусловителите при решаване на задачи, дискретизирани с неконформни крайни елементи, първо трябва да се дефинират подходящи йерархични трансформационни матрици $J^{(k)}$, $1 \leq k \leq \ell$. И в този случай това може да бъде направено на макроелементно ниво. Подобно на случая на конформни крайни елементи, макроелементът се дефинира като съвкупността от триъгълните крайни елементи, получени при равномерно рафиниране на елемент от грубата мрежка.

В [27] и [28] за първи път са представени, а по-късно в [61] са доразвити, два подхода за построяване на AMLI преобусловители за елптични задачи, дискретизирани с неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар. Те се базират на така наречените “*differences and aggregates*” – DA (“разлики и агрегати”) и “*first reduce*” – FR (“първоначално изключване”) двунивови разделяния.

DA разделяне: За даден макроелемент $E \in \mathcal{T}_k$ с номерация на възлите от рафинираната мрежа от 1 до 9, както е показано на Фигура 2.2, локалната (макроелементна) DA трансформационна матрица $J_{DA;E}^{(k)}$ се дефинира като:

$$(2.2.10) \quad J_{DA;E}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & & 1 & & \\ & & 1 & & & 1 & \\ & & & 1 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Действието на DA трансформацията върху крайно-елементното пространство \mathcal{V}_h^k е подробно описано в [27]. Нека означим вектора от стандартни възло-



Фигура 2.2: Макроелемент E в случая на дискретизация с неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар, E е съвкупността от четирите еднакви елемента $\{e_i^{(k)}\}_{i=1}^4$, получени при равномерно рафиниране на елемент $e^{(k-1)} \equiv E$ от грубата мрежа

ви базисни функции с $\varphi^{(k)} = \{\phi^{(k)}\}_{i=1}^{N_k}$. Глобалната DA матрица $J_{DA}^{(k)}$ го трансформира до йерархичен базис $\tilde{\varphi}_{DA}^{(k)} = \{\tilde{\phi}_{DA}^{(k)}\}_{i=1}^{N_k} = J_{DA}^{(k)} \varphi^{(k)}$, където $\tilde{\varphi}_{DA}^{(k)} = \tilde{\varphi}_{DA;1}^{(k)} \cup \tilde{\varphi}_{DA;2}^{(k)}$. Тук $\tilde{\varphi}_{DA;1}^{(k)} = \{\tilde{\phi}_{DA}^{(k)}\}_{i=1}^{N_k - N_{k-1}}$ се състои от два вида функции. Първите са възлови базисни функции, съответстващи на добавените чрез рафиниране степени на свобода във вътрешността на крайния елемент от грубата мрежа, а вторите са получени от разликата на базисни функции на два нови възела върху една и съща страна на елемент от грубата мрежа. Третата част на йерархичния базис, $\tilde{\varphi}_{DA;2}^{(k)} = \{\tilde{\phi}_{DA}^{(k)}\}_{i=1}^{N_{k-1}}$, е съставена от агрегати на базисни функции, като сумирането е асоциирано с тройки нови степени на свобода – двата възела върху страна от триъгълник от грубата мрежа и възела в средата на срещуположната добавена при рафинирането страна от фината мрежа.

Под действието на глобалната DA трансформация, от матрицата на коравина $K^{(k)}$ в стандартен възлов базис получаваме матрицата на коравина $\tilde{K}_{DA}^{(k)}$ в йерархичен вид

$$\tilde{K}_{DA}^{(k)} = J_{DA}^{(k)} K^{(k)} (J_{DA}^{(k)})^T = \sum_{E \in T_k} J_{DA;E}^{(k)} K_E^{(k)} (J_{DA;E}^{(k)})^T.$$

След подходяща пермутация на редове и стълбове, $\tilde{K}_{DA}^{(k)}$ приема следното три

на три блочно представяне:

$$(2.2.11) \quad \tilde{K}_{DA}^{(k)} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{DA;11}^{(k)} & \tilde{K}_{DA;12}^{(k)} & \tilde{K}_{DA;13}^{(k)} \\ \tilde{K}_{DA;21}^{(k)} & \tilde{K}_{DA;22}^{(k)} & \tilde{K}_{DA;23}^{(k)} \\ \tilde{K}_{DA;31}^{(k)} & \tilde{K}_{DA;32}^{(k)} & \tilde{K}_{DA;33}^{(k)} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \{\tilde{\varphi}_{DA;1}^{(k)} \\ \{\tilde{\varphi}_{DA;2}^{(k)} \end{array} \right\},$$

където блоковете отговарят на трите вида йерархични базови функции, описани по-горе.

В [27] е показано, че

$$(2.2.12) \quad \tilde{K}_{DA;33}^{(k)} = 4K^{(k-1)},$$

и допълнението на Шур

$$\tilde{S}_{DA;K}^{(k)} = \tilde{K}_{DA;33}^{(k)} - \begin{bmatrix} \tilde{K}_{DA;31}^{(k)} & \tilde{K}_{DA;32}^{(k)} \end{bmatrix} (\tilde{K}_{DA;11}^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{K}_{DA;13}^{(k)} \\ \tilde{K}_{DA;23}^{(k)} \end{bmatrix}$$

има свойството

$$(2.2.13) \quad (1 - \gamma_{DA;K}^2) \tilde{K}_{DA;33}^{(k)} \leq \tilde{S}_{DA;K}^{(k)} \leq \tilde{K}_{DA;33}^{(k)},$$

където

$$(2.2.14) \quad \gamma_{DA;K}^2 \leq \frac{3}{4}$$

е константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделянето. Този резултат не зависи от коефициентна и мрежова анизотропия, характеристичния размер на мрежата h и скокове на коефициентите, съгласувани с грубата мрежа. От (2.2.12) и (2.2.13) следват неравенствата

$$(2.2.15) \quad (1 - \gamma_K^2) 4K^{(k-1)} \leq \tilde{S}_{DA;K}^{(k)} \leq 4K^{(k-1)}.$$

Забележка 2.2.1 Релацията на неравенство между симетрични матрици $A \leq B$ е в смисъл, че матрицата $B - A$ е положително полуопределена, т.e. за всеки вектор \mathbf{v} е изпълнено $\mathbf{v}^T(B - A)\mathbf{v} \geq 0$.

FR разделяне: Така нареченото FR разделяне се получава за юерархично представяне, резултат от комбинация от трансформация на стандартния възлов базис $J_{FR_1}^{(k)}$ и стъпка на елиминация $J_{FR_2}^{(k)}$. Трансформацията $J_{FR_1}^{(k)}$ се дефинира на макроелементно ниво, както следва:

$$(2.2.16) \quad J_{FR_1;E}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & -1 \\ & & & & & & 1 & -1 \\ & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Действието ѝ върху крайно-елементното пространство може да бъде описано подобно на случая на DA разделяне. Да разгледаме матрицата $\tilde{K}_{FR_1}^{(k)}$,

$$\tilde{K}_{FR_1}^{(k)} = J_{FR_1}^{(k)} K^{(k)} (J_{FR_1}^{(k)})^T = \sum_{E \in \mathcal{T}_k} J_{FR_1;E}^{(k)} K_E^{(k)} (J_{FR_1;E}^{(k)}).$$

Аналогично на (2.2.11), в сила е блочното представяне:

$$(2.2.17) \quad \tilde{K}_{FR_1}^{(k)} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{FR_1;11}^{(k)} & \tilde{K}_{FR_1;12}^{(k)} & \tilde{K}_{FR_1;13}^{(k)} \\ \tilde{K}_{FR_1;21}^{(k)} & \tilde{K}_{FR_1;22}^{(k)} & \tilde{K}_{FR_1;23}^{(k)} \\ \tilde{K}_{FR_1;31}^{(k)} & \tilde{K}_{FR_1;32}^{(k)} & \tilde{K}_{FR_1;33}^{(k)} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} \quad \tilde{\varphi}_{FR_1;1}^{(k)} \\ \} \quad \tilde{\varphi}_{FR_1;2}^{(k)} \end{array} \right..$$

На стъпката на елиминация изключваме локално степените на свобода, съответстващи на вътрешните за макроелемента възли, т.e., на блока $\tilde{K}_{FR_1;11}^{(k)}$. Това е възможно, тъй като вътрешните за един макроелемент възли не са свързани с вътрешни за друг елемент възли. По този начин системата с $\tilde{K}_{FR_1}^{(k)}$ се редуцира до система с матрицата

$$(2.2.18) \quad B = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{FR_1;22}^{(k)} & \tilde{K}_{FR_1;23}^{(k)} \\ \tilde{K}_{FR_1;32}^{(k)} & \tilde{K}_{FR_1;33}^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{K}_{FR_1;21}^{(k)} \\ \tilde{K}_{FR_1;31}^{(k)} \end{bmatrix} (\tilde{K}_{FR_1;11}^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{K}_{FR_1;12}^{(k)} & \tilde{K}_{FR_1;13}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

В следствие на симетричността на $\tilde{K}_{FR_1}^{(k)}$ и факта, че трансформацията $J_{FR_1}^{(k)}$ не променя водещия блок, т.e. $\tilde{K}_{FR_1;11}^{(k)} = K_{11}$, изключването може да се запише в мултипликативна форма по следния начин

$$J_{FR_2}^{(k)} \tilde{K}_{FR_1}^{(k)} (J_{FR_2}^{(k)})^T = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

където

$$(2.2.19) \quad J_{FR_2}^{(k)} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -\tilde{K}_{FR_1;12}^{(k)} K_{11}^{-1} & I & 0 \\ -\tilde{K}_{FR_1;13}^{(k)} K_{11}^{-1} & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Трансформационната матрица на FR разделянето се дефинира във вида

$$(2.2.20) \quad J_{FR}^{(k)} := J_{FR_2}^{(k)} J_{FR_1}^{(k)},$$

а йерархичната FR матрица се получава като

$$(2.2.21) \quad \tilde{K}_{FR}^{(k)} = J_{FR}^{(k)} K^{(k)} (J_{FR}^{(k)})^T = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{FR;22}^{(k)} & \tilde{K}_{FR;23}^{(k)} \\ 0 & \tilde{K}_{FR;32}^{(k)} & \tilde{K}_{FR;33}^{(k)} \end{bmatrix},$$

където блокът $\tilde{K}_{FR;33}^{(k)}$ се асоциира с неизвестните от по-грубата мрежа.

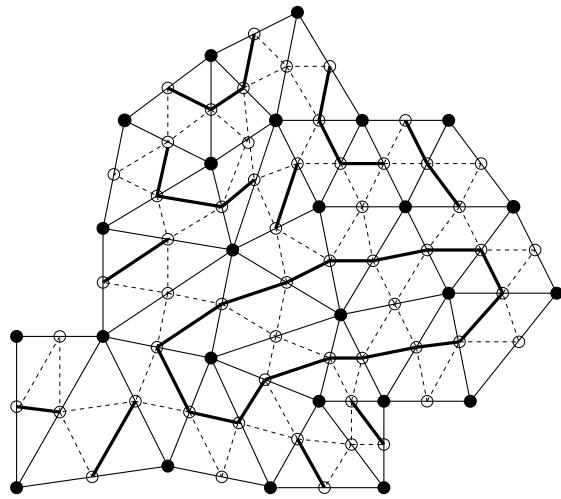
В [61] (вж. също така [60]) се показва, че за елиптични задачи константата γ_{FR} в усиленото неравенство на КБШ за FR разделянето е минимална за клас йерархични разделяния, включващ и DA метода, т.e.

$$(2.2.22) \quad \gamma_{FR;K}^2 \leq \gamma_{DA;K}^2 \leq \frac{3}{4}.$$

2.3 Адитивен преобусловител за водещия диагонален блок

Робастни преобусловители за водещия диагонален блок в йерархичното разделяне са известни за случаите, когато DA и FR методите се прилагат за елип-

тични задачи. Тук правим кратко представяне на една такава конструкция, предложена първоначално в [28].



Фигура 2.3: Типове свързаност на възлите в адитивния преобусловител.

При DA разделянето водещият диагонален блок има вида

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{DA;11}^{(k)} & \tilde{K}_{DA;12}^{(k)} \\ \tilde{K}_{DA;21}^{(k)} & \tilde{K}_{DA;22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

и след (локална) елиминация на блока $\tilde{K}_{DA;11}^{(k)}$ остава да се решават системи с допълнение на Шур, което има вида

$$\tilde{K}_{DA;22}^{(k)} - \tilde{K}_{DA;21}^{(k)} (\tilde{K}_{DA;11}^{(k)})^{-1} \tilde{K}_{DA;12}^{(k)} = \tilde{K}_{FR;22}^{(k)}.$$

Последното равенство с водещия диагонален блок в случая на FR разделяне може да се покаже директно, вж. напр. [28, 74].

Така нареченият адитивен преобусловител $C_{\tilde{K}_{22}}^{(k)}$ за блока $\tilde{K}_{FR;22}^{(k)}$ се основава на запазването само на онези връзки между крайно-елементни възли, които са по направление на доминираща анизотропия.

Забележка 2.3.1 В дисертацията, “връзка” между крайно-елементни възли с номера i и j , наричаме извъндиагоналния елемент $a_{ij} \neq 0, i \neq j$ в матрицата на системата A .

Конструкцията на адитивния преобусловител се реализира на макроелементно ниво. Най-напред се елиминират локално възлите, вътрешни по отношение на макроелементите. След това най-малките извън-диагонални елементи в така получената локална макроелементна матрица се анулират, като по този начин се запазват само онези връзки между степени на свобода, които са ориентирани по направление на доминираща анизотропия. Адитивният преобусловител се получава чрез асемблирането на съответните блокове на модифицираните по този начин локални матрици. В [28] е показано, че неравенствата,

$$(1 - \sqrt{\frac{7}{15}})\tilde{K}_{FR;22}^{(k)} \leq C_{\tilde{K}_{22}}^{(k)} \leq (1 + \sqrt{\frac{7}{15}})\tilde{K}_{FR;22}^{(k)},$$

са изпълнени за произволни коефициентна и мрежова анизотропия и характеристичен размер на мрежата. Изчислителната сложност за решаване на система с адитивния преобусловител е оптимална, поради специалния тип на свързаност на графа на матрицата $C_{\tilde{K}_{22}}^{(k)}$. Както е илюстрирано на Фигура 2.3, свързаните възли формират точка, начупена линия или полигон и преобусловителят има обобщена тридиагонална структура.

Тази конструкция се използва във включените в тази глава експерименти, като резултатите числено потвърждават предположението, че адитивният преобусловител за водещия диагонален блок е подходящ и в случая на йерархични разделяния за параболични задачи.

2.4 DA разделяне за параболични задачи: оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ

В този раздел обобщаваме ѹерархични разделяния, представени в Глава 2.2, за случая на многонивово преобуславяне на параболични задачи. Обобщението е теоретично обосновано чрез направения анализ на константата в усиленото неравенство на КБШ в случая на DA разделяне за задачите (2.1.9).

На всяка стъпка по времето $t_n, n = 0, 1, \dots, n_T$ търсим решение на дискретната задача

$$\left(M^{(\ell)} + \Delta t (1 - \theta) K^{(\ell)} \right) \mathbf{u}^n = \mathbf{g}^n$$

върху най-фината мрежа T_ℓ .

Нека с $\{M_E^{(k)}\}_{E \in T_k}$ и $\{K_E^{(k)}\}_{E \in T_k}$ означим макроелементните матрици на маса и коравина, съответстващи на дискретизация на задачата върху мрежата T_k на ниво на сгъстяване k , а глобалните матрици се асемблират като

$$M^{(k)} = \sum_{E \in \mathcal{T}_k} M_E^{(k)}, \quad K^{(k)} = \sum_{E \in \mathcal{T}_k} K_E^{(k)}.$$

Матрицата $A^{(k)}$ на ниво $0 \leq k \leq \ell$ дефинираме във вида

$$(2.4.23) \quad A^{(k)} = M^{(k)} + \Delta t(1 - \theta)K^{(k)}.$$

Като първа стъпка, нека разгледаме действието на DA трансформацията върху $M^{(k)}$. Йерархичната матрица на масата в този случай има вида

$$\widetilde{M}^{(k)} = J_{DA}^{(k)} M^{(k)} (J_{DA}^{(k)})^T = \sum_{E \in \mathcal{T}_k} J_{DA;E}^{(k)} M_E^{(k)} (J_{DA;E}^{(k)})^T.$$

В сила е следното блочно представяне

$$(2.4.24) \quad \widetilde{M}^{(k)} = \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{11}^{(k)} & \widetilde{M}_{12}^{(k)} & \widetilde{M}_{13}^{(k)} \\ \widetilde{M}_{21}^{(k)} & \widetilde{M}_{22}^{(k)} & \widetilde{M}_{23}^{(k)} \\ \widetilde{M}_{31}^{(k)} & \widetilde{M}_{32}^{(k)} & \widetilde{M}_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{c} \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \widetilde{\varphi}_{DA;1}^{(k)} \\ \widetilde{\varphi}_{DA;2}^{(k)} \end{array},$$

където $\widetilde{M}_{33}^{(k)}$ се асоциира с неизвестните от по-грубата мрежа, а съответното допълнение на Шур е

$$\widetilde{S}_M^{(k)} = \widetilde{M}_{33}^{(k)} - \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{31}^{(k)} & \widetilde{M}_{32}^{(k)} \end{bmatrix} (\widetilde{M}_{11}^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{13}^{(k)} \\ \widetilde{M}_{23}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

За да изведем оценка за константата γ_M в усиленото неравенство на КБШ за разделянето (2.4.24), използваме локален анализ. След директно пресмятане се вижда, че елементната матрица на масата за елементи на Крозе-Равиар $M_e^{(k)}, e \in \mathcal{T}_k$ има вида

$$M_e^{(k)} = \frac{|e^{(k)}|}{3} I,$$

където $|e^{(k)}|$ е лицето на елемента e , а I е единичната 3×3 матрица. Това следва, например, от факта, че квадратурната формула върху триъгълник с възли в средите на страните, е точна за полиноми до втора степен. Тогава, при номерирането от Фигура 2.2, макроелементната матрица на масата в стандартен възлов базис, $M_E^{(k)}$, има вида

$$M_E^{(k)} = \frac{|e^{(k)}|}{3} \begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

В сила са следните равенства за йерархичното двунивово разделяне на макро-

елементна матрица на масата $\widetilde{M}_E^{(k)} = J_E^{(k)} M_E^{(k)} (J_E^{(k)})^T$:

$$\widetilde{M}_E^{(k)} = \frac{|e^{(k)}|}{3} \begin{bmatrix} 2 & & 2 \\ & 2 & \\ & & 2 \\ 2 & & & 2 \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \\ 2 & & 4 & \\ & 2 & & 4 \\ & & 2 & \\ & & & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{11;E}^{(k)} & \widetilde{M}_{12;E}^{(k)} & \widetilde{M}_{13;E}^{(k)} \\ \widetilde{M}_{21;E}^{(k)} & \widetilde{M}_{22;E}^{(k)} & \widetilde{M}_{23;E}^{(k)} \\ \widetilde{M}_{31;E}^{(k)} & \widetilde{M}_{32;E}^{(k)} & \widetilde{M}_{33;E}^{(k)} \end{bmatrix},$$

където $\widetilde{M}_{33;E}^{(k)} = \frac{|e^{(k)}|}{3} \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$.

Нека отбележим, че макроелементните матрици на масата $\widetilde{M}_E^{(k)}$ са положително определени, както и съответните блокове $\widetilde{M}_{33;E}^{(k)}$. Локалните константи на КБШ за юрархичното разделяне можем да пресметнем, като използваме Лема 1.3.3. От нея следва, че $\gamma_{M,E}^2 = 1 - \lambda_1$, където λ_1 е минималното решение на обобщената задача за намиране на собствени стойности

$$\widetilde{S}_{M,E}^{(k)} \mathbf{w} = \lambda \widetilde{M}_{33;E}^{(k)} \mathbf{w},$$

а с $\widetilde{S}_{M,E}$ сме означили макроелементното допълнение на Шур. За всеки макроелемент $E \in \mathcal{T}_k$ е в сила

$$\widetilde{S}_{M,E}^{(k)} = \frac{|e^{(k)}|}{3} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \widetilde{M}_{E;33}^{(k)},$$

и следователно $\gamma_{M,E}^2 = 1/2$. С помощта на Лема 1.3.4 получаваме следната оценка за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне за глобалната матрица на масата

$$(2.4.25) \quad \gamma_M^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Също така директно се получава, че

$$\widetilde{M}_{E;33}^{(k)} = \frac{4|e^{(k)}|}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \frac{|e^{(k-1)}|}{3} I = M_e^{(k-1)},$$

от където

$$(2.4.26) \quad \widetilde{M}_{33}^{(k)} = M^{(k-1)}.$$

Следователно

$$(2.4.27) \quad (1 - \gamma_M^2) M^{(k-1)} \leq \widetilde{S}_M^{(k)} \leq M^{(k-1)}.$$

Готови сме да разгледаме действието на DA трансформация върху $A^{(k)}$, вж. (2.4.23). За удобство въвеждаме следните означения:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{11}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{11}^{(k)} & \widetilde{M}_{12}^{(k)} \\ \widetilde{M}_{21}^{(k)} & \widetilde{M}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}, & \widehat{K}_{11}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \widetilde{K}_{DA;11}^{(k)} & \widetilde{K}_{DA;12}^{(k)} \\ \widetilde{K}_{DA;21}^{(k)} & \widetilde{K}_{DA;22}^{(k)} \end{bmatrix}, \\ \widehat{M}_{12}^{(k)} &= (\widehat{M}_{21}^{(k)})^T = \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{12}^{(k)} & \widetilde{M}_{13}^{(k)} \end{bmatrix}, & \widehat{K}_{12}^{(k)} &= (\widehat{K}_{21}^{(k)})^T = \begin{bmatrix} \widetilde{K}_{DA;12}^{(k)} & \widetilde{K}_{DA;13}^{(k)} \end{bmatrix}, \\ \widehat{M}_{22}^{(k)} &= \widetilde{M}_{33}^{(k)}, & \widehat{S}_M^{(k)} &= \widetilde{S}_M^{(k)}, & \widehat{K}_{22}^{(k)} &= \widetilde{K}_{DA;33}^{(k)}, & \widehat{S}_K^{(k)} &= \widetilde{S}_{DA;K}^{(k)}. \end{aligned}$$

Йерархичната матрица получаваме във вида

$$(2.4.28) \quad \widehat{A}^{(k)} = J_{DA}^{(k)} A^{(k)} (J_{DA}^{(k)})^T = J_{DA}^{(k)} M^{(k)} (J_{DA}^{(k)})^T + \Delta t (1 - \theta) J_{DA}^{(k)} K^{(k)} (J_{DA}^{(k)})^T,$$

където следното двунивово разделяне е в сила

$$(2.4.29) \quad \widehat{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11}^{(k)} & \widehat{A}_{12}^{(k)} \\ \widehat{A}_{21}^{(k)} & \widehat{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{M}_{11}^{(k)} + \Delta t (1 - \theta) \widehat{K}_{11}^{(k)} & \widehat{M}_{12}^{(k)} + \Delta t (1 - \theta) \widehat{K}_{12}^{(k)} \\ \widehat{M}_{21}^{(k)} + \Delta t (1 - \theta) \widehat{K}_{21}^{(k)} & \widehat{M}_{22}^{(k)} + \Delta t (1 - \theta) \widehat{K}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Теорема 2.4.1 При прилагане на DA трансформация, за разделянето (2.4.29) са в сила неравенствата:

$$\frac{1}{4} (M^{(k-1)} + \Delta t (1 - \theta) 4K^{(k-1)}) \leq \widehat{S}_A^{(k)} \leq (M^{(k-1)} + \Delta t (1 - \theta) 4K^{(k-1)}),$$

когато $\widehat{S}_A^{(k)} = \widehat{A}_{22}^{(k)} - \widehat{A}_{21}^{(k)} \widehat{A}_{11}^{(k)-1} \widehat{A}_{12}^{(k)}$ е допълнение на Шур на йерархичната матрица (2.4.28). Този резултат е равномерен по отношение на скокове на коефициенти и мрежосва и коефициентна анизотропия.

Доказателство. От (2.2.12) и (2.4.26), както и от факта, че всички матрици и съответни допълнения на Шур са положително определени, следва следната горна граница:

$$(2.4.30) \quad \begin{aligned} \widehat{S}_A^{(k)} = \widehat{A}_{22}^{(k)} - \widehat{A}_{21}^{(k)} \widehat{A}_{11}^{(k)-1} \widehat{A}_{12}^{(k)} &\leq \widehat{M}_{22}^{(k)} + \Delta t(1-\theta) \widehat{K}_{22}^{(k)} \\ &= M^{(k-1)} + \Delta t(1-\theta) 4K^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Тъй като $\widehat{S}_A^{(k)}$ е допълнение на Шур на сума от матрици, то (вж. напр. [79])

$$\widehat{S}_A^{(k)} \geq \widehat{S}_M^{(k)} + \Delta t(1-\theta) \widehat{S}_K^{(k)}$$

Използвайки (2.2.15) и (2.4.27), получаваме следната долната граница за $\widehat{S}_A^{(k)}$,

$$(2.4.31) \quad \widehat{S}_A^{(k)} \geq \min\{(1-\gamma_M^2), (1-\gamma_K^2)\} (M^{(k-1)} + \Delta t(1-\theta) 4K^{(k-1)}).$$

Комбинирането на (2.4.30), (2.4.31) и оценките за γ_K и γ_M завършват доказателството. ■

Следствие 2.4.1 Следното спектрално отношение е в сила, равномерно относно скокове на коефициенти, мрежосва и коефициентна анизотропия:

$$\frac{1}{2} A^{(k-1)} \leq \widehat{S}_A^{(k)} \leq 4A^{(k-1)}.$$

Доказателство. От това, че $M^{(k-1)}$ е симетрична положително определена матрица и от (2.4.30) следва че

$$\widehat{S}_A^{(k)} \leq 4A^{(k-1)}.$$

Аналогично на (2.4.31) получаваме, че

$$\widehat{S}_A^{(k)} \geq (1-\gamma_M^2) M^{(k-1)} + (1-\gamma_K^2) \Delta t(1-\theta) 4K^{(k-1)} \geq \min\{\frac{1}{4}(1-\gamma_M^2), (1-\gamma_K^2)\} 4A^{(k-1)}.$$

■

Представеният анализ показва два възможни начина за конструиране на AMLI преобусловител. При първия подход текущото допълнение на Шур $\widehat{S}_A^{(k)}$ се приближава чрез модифицираната матрица $\overline{A}^{(k-1)} = M^{(k-1)} + 4^{\ell-k+1} \Delta t(1-\theta) 4K^{(k-1)}$.

$\theta)K^{(k-1)}$. В този случай, при използване на полиномиална стабилизация, линейният AMLI преобусловител $C^{(k)}$, вж. (1.3.74), се дефинира посредством стабилизиращ полином във вида

$$Z^{(k-1)} = \bar{A}^{(k-1)} \left(I - P_{\beta_k}^k (C^{(k-1)^{-1}} \bar{A}^{(k-1)}) \right)^{-1}.$$

При втория възможен подход директно се използва матрицата на системата $A^{(k-1)}$ и допълнението на Шур се приближава чрез

$$Z^{(k-1)} = A^{(k-1)} \left(I - P_{\beta_k}^k (C^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)}) \right)^{-1}.$$

В представените в тази глава числени експерименти приближаваме допълнението на Шур чрез $A^{(k-1)}$, като приемаме, че този избор е по-естествен и не води до разлики в мащаба на елементите в съответстващите на различни нива на рафиниране блокове на многонивовия преобусловител.

В общия случай използваната техника за теоретичен анализ не е директно приложима за FR разделянето (вж. напр. [60]), но в следващите раздели включваме резултати от експерименти и числено изследване както за DA, така и за FR преобусловители.

2.5 Робастни AMLI преобусловители за параболични задачи

Тук представяме обобщение и сравнение на робастни многонивови преобусловители за параболични задачи, дискретизирани с помощта на конформни и неконформни крайни елементи. Разглежданите AMLI методи се характеризират от константата в усиленото неравенство на КБШ за избраното юерархично разделяне. За целите на сравнението разглеждаме системна матрица в следния (скалиран) вид

$$(2.5.32) \quad A = \zeta M + K = \sum_{E \in \mathcal{T}} A_E = \sum_{E \in \mathcal{T}} (\zeta M_E + K_E)$$

където $\zeta > 0$ е параметър, съответстващ на избора на параметрите Δt и θ при дискретизацията по времето.

(i) *Неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар, DA разделяне:*

За локалната (макроелементна) константа на КБШ за юерархичната матрица на коравина $\widehat{K}_E = J_{DA;E} K_E (J_{DA;E})^T$ в случая на неконформни дискретизации с крайни елементи на Крозе-Равиар е в сила оценката

$$\gamma_{K;E}^2 \leq \frac{3}{4},$$

показана за първи път в [27]. Константа на КБШ за локалната матрица на маса $\widehat{M}_E = J_{DA;E} M_E (J_{DA;E})^T$ удовлетворява равенството

$$\gamma_{M;E}^2 = \frac{1}{2}.$$

Локалната макроелементна матрица $\widehat{A}_E = J_{DA;E} A_E (J_{DA;E})^T = \zeta \widehat{M}_E + \widehat{K}_E$ има следното блочно представяне:

$$(2.5.33) \quad \widehat{A}_E = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{E;11} & \widehat{A}_{E;12} \\ \widehat{A}_{E;21} & \widehat{A}_{E;22} \end{bmatrix} = \zeta \begin{bmatrix} \widehat{M}_{E;11} & \widehat{M}_{E;12} \\ \widehat{M}_{E;21} & \widehat{M}_{E;22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{K}_{E;11} & \widehat{K}_{E;12} \\ \widehat{K}_{E;21} & \widehat{K}_{E;22} \end{bmatrix}.$$

По дефиниция (вж. Глава 1.3.1), константата $\gamma_{A;E}$ в усиленото неравенство на КБШ за разделянето (2.5.33) е минималната константа, за която

$$|\mathbf{v}_1^T \widehat{A}_{E;12} \mathbf{v}_2| \leq \gamma_{A;E} \left\{ \mathbf{v}_1^T \widehat{A}_{E;11} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T \widehat{A}_{E;22} \mathbf{v}_2 \right\}^{1/2}.$$

В сила са неравенствата

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_1^T \widehat{A}_{E;12} \mathbf{v}_2| &\leq \zeta |\mathbf{v}_1^T \widehat{M}_{E;12} \mathbf{v}_2| + |\mathbf{v}_1^T \widehat{K}_{E;12} \mathbf{v}_2| \\ &\leq \gamma_{M;E} \zeta \left\{ \mathbf{v}_1^T \widehat{M}_{E;11} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T \widehat{M}_{E;22} \mathbf{v}_2 \right\}^{1/2} + \gamma_{K;E} \left\{ \mathbf{v}_1^T \widehat{K}_{E;11} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T \widehat{K}_{E;22} \mathbf{v}_2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \max\{\gamma_{M;E}, \gamma_{K;E}\} \left(\zeta \left\{ \mathbf{v}_1^T \widehat{M}_{E;11} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T \widehat{M}_{E;22} \mathbf{v}_2 \right\}^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \mathbf{v}_1^T \widehat{K}_{E;11} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T \widehat{K}_{E;22} \mathbf{v}_2 \right\}^{1/2} \right) \\ &\leq \max\{\gamma_{M;E}, \gamma_{K;E}\} \left\{ \mathbf{v}_1^T (\zeta \widehat{M}_{E;11} + \widehat{K}_{E;22}) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T (\zeta \widehat{M}_{E;22} + \widehat{K}_{E;11}) \mathbf{v}_2 \right\}^{1/2} \end{aligned}.$$

Следователно, $\gamma_{A;E} \leq \max\{\gamma_{M;E}, \gamma_{K;E}\}$. Тогава, с помощта на Лема 1.3.4, получаваме равномерната относно мрежова и коефициентна анизотропия оценка

$$(2.5.34) \quad \gamma_{DA;A}^2 = \gamma_A^2 \leq \frac{3}{4}$$

за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне на матрицата (2.5.32) при дискретизация с неконформни крайни елементи.

(ii) Неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар, FR разделяне:

В този случай са в сила следните равномерни оценки за локалните константи на КБШ за макроелементните матрици на маса и на коравина,

$$\gamma_{M;E}^2 = 0, \quad \gamma_{K;E}^2 < \frac{3}{4}.$$

Стойността на $\gamma_{M;E}^2$ за FR разделяне следва от диагоналната структура на елементните матрици на маса,

$$M_e = \frac{|e|}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и се извежда директно.

Поради по-особения вид на FR трансформацията (2.2.20), тук разсъждението от подточка *(i)* не могат да се приложат директно.

(iii) Конформни крайни елементи на Курант:

Локалната константа на КБШ за случая на двунивово разделяне на матрицата на коравина при дискретизация с линейни конформни крайни елементи, е анализирана в [67, 9], вж. също [11]. Следната оценка е в сила:

$$\gamma_{K;E}^2 \leq \frac{3}{4}.$$

За локалната константа на КБШ за матрицата на масата е в сила равенството, вж. напр. [67],

$$\gamma_{M;E}^2 = \frac{9}{10}.$$

Този резултат може да се провери, като се вземе предвид, че елементната матрица на масата за крайни елементи на Курант, $e \in \mathcal{T}_k$, има вида

$$M_e = \frac{|e|}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Тогава, в случая на разглежданата дискретизация с неконформни крайни елементи, за локалната константа на КБШ за двунивово разделяне на матрицата (2.5.32), дефинирано чрез (1.3.68), е в сила оценката

$$\gamma_A^2 \leq \gamma_{A;E}^2 \leq \max \left\{ \frac{3}{4}, \frac{9}{10} \right\},$$

от където

$$(2.5.35) \quad \gamma_A^2 \leq \frac{9}{10}.$$

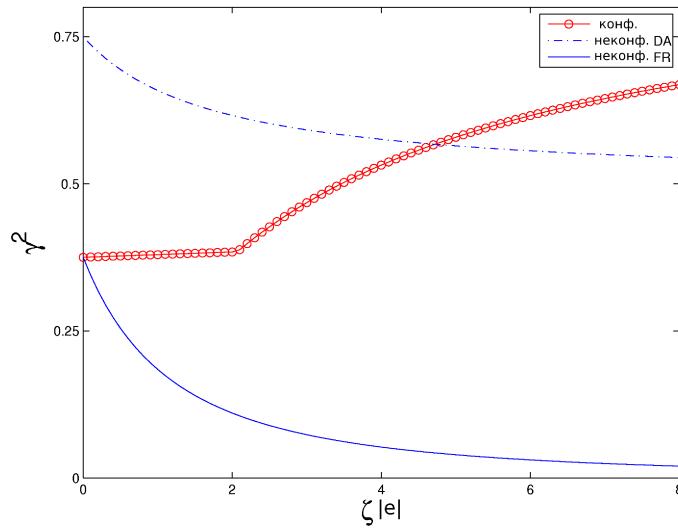
Оценката е равномерна относно мрежова и коефициентна анизотропия.

Достатъчното условие за оптималност на AMLI метода (1.3.78) не е изпълнено, ако $\gamma^2 > \frac{8}{9}$. Както се вижда от оценката (2.5.35), при двунивово разделяне в случая на конформни крайни елементи, това може да се случи за определени стойности на коефициента ζ в (2.5.32), който в общия случай е пропорционален на $\frac{1}{\Delta t}$.

В случая на DA разделяне, условието за оптималност (1.3.78) е удовлетворено за съставната матрица (2.5.32) за степен на стабилизиранция полином $\beta = 3$. Числените експерименти, включени в следващия раздел, показват, че стабилизация може да се постигне и за $\beta = 2$, както при DA, така и при FR разделяне. Едно възможно обяснение за тези резултати е, че реалната стойност на $\gamma_{DA;A}$ за съставната матрица е по-малка. т.е. оценката (2.5.34) не се достига.

Фигури 2.4–2.6 представят числено изследване на поведението на константата в усиленото неравенство на КБШ за матрицата $A_E = \zeta M_E + K_E$ като функция на произведението на параметъра ζ и лицето на крайния елемент $|e|$ от една страна, и мрежовата анизотропия от друга страна. Означаваме с $\gamma_{DA;E}^{CR}$,

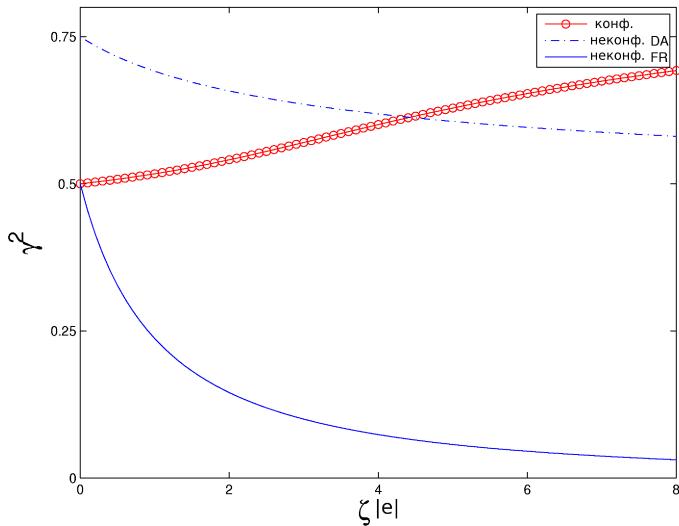
$\gamma_{FR;E}^{CR}$ и γ_E^C макроелементните константи на КБШ, съответстващи на разделяната в случаите (i), (ii) и (iii). Нека припомним, че тук мрежовата анизотропия



Фигура 2.4: Макроелементен триъгълник: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$

се описва посредством ъглите $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ на триъгълните крайни елементи (вж. Фигура 2.2). Разглеждаме три случая, като всеки е представен на отделна фигура. На всяка от Фигури 2.4, 2.5 и 2.6, за съответния избор на ъглите $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, са изобразени графиките на $\gamma^2 = \{(\gamma_E^C)^2, (\gamma_{DA;E}^{CR})^2, (\gamma_{FR;E}^{CR})^2\}$ като функции на $\zeta|e|$. Напомняме, че за неявен метод на Ойлер, ζ е пропорционална на $1/\Delta t$, а лицето на елемента $|e|$ е пропорционално на h^2 , където h е характеристичният размер. Стойността на $\zeta|e|$ зависи от избора на стъпките по пространство и време.

Константата $\gamma_{FR;E}^{CR}$ в усиленото неравенство на КБШ за FR разделяне е най-малката във всички разглеждани случаи. При сравнение на γ_E^C и $\gamma_{DA;E}^{CR}$ се вижда, че константата на КБШ за конформни елементи има по-добро поведение за малки стойности на параметъра $\zeta|e|$ и случаи на по-малка мрежова анизотропия. Общо наблюдение е, че предимствата на неконформните крайни елементи са добре изразени в случая на най-силна мрежова анизотропия, вж. Фигура 2.6.



Фигура 2.5: Макроелементен триъгълник: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (45^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$

2.6 Числени експерименти

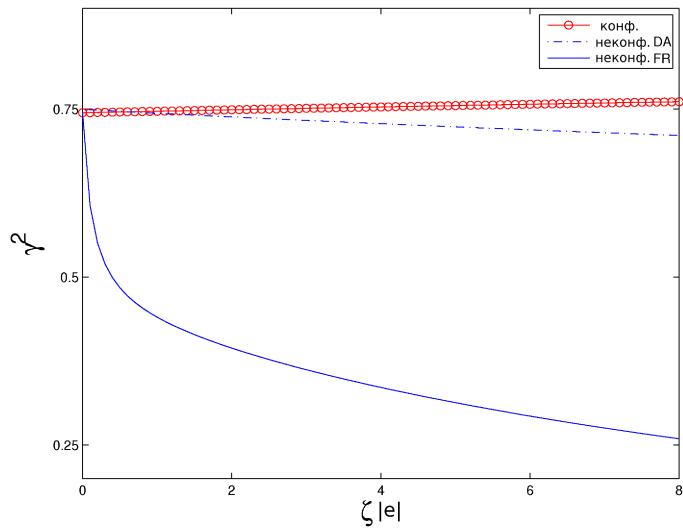
Ще илюстрираме числено ефективността на разглежданите техники за преобуславяне с помощта на следните задачи.

Задача 2.6.1 (Параболична задача върху моделна област с триъгълна форма) Разглеждаме системата (2.1.9),

$$(M + \Delta t(1 - \theta)K)\mathbf{u} = \mathbf{g},$$

получена при дискретизация на задачата 2.1.2 върху триъгълна област Ω , вж.

Фигура 2.7. Дясната част \mathbf{g} съответства на случаино-генерираното точно решение \mathbf{u} , $\mathbf{g} = A\mathbf{u}$. Върху страната на областта, лежаща срещу ъгъл α_3 , е наложено хомогенно гранично условие на Дирихле, а върху другите две страни на триъгълника Ω са наложени хомогенни условия на Нойман. Изследваме скоростта на сходимост на AMLI метода за три случая на ъгли на триъгълната област Ω . Мрежите са получени чрез равномерно сгъстяване и са съставени от триъгълни крайни елементи със същите ъгли $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Ъгли-



Фигура 2.6: Макроелементен триъгълник: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (6^\circ, 6^\circ, 168^\circ)$

те на областта Ω , а от там и съответните триъгълни краини елементи, са избрани по следния начин

2.6.1.(a) $\alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = \alpha_3 = 45^\circ$.

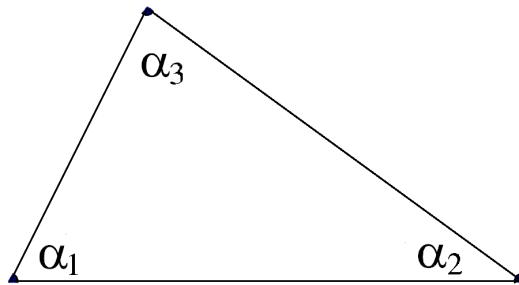
2.6.1.(б) $\alpha_1 = 156^\circ, \alpha_2 = \alpha_3 = 12^\circ$.

2.6.1.(в) $\alpha_1 = 177^\circ, \alpha_2 = 2^\circ, \alpha_3 = 1^\circ$.

И в трите случая коефициентната матрица в (2.1.2) е $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Напомняме, че локалните свойства (съответстващи на елементните матрици) на изотропния оператор на Лаплас върху анизотропна мрежа като тази в 2.6.1.(b) и 2.6.1.(c), са еквивалентни на свойствата на анизотропен елиптичен оператор върху мрежа от правовъгълни равнобедрени триъгълници като тази в 2.6.1.(a), вж. напр. [9].

Задача 2.6.2 (Уравнение на топлопроводност с прекъснато начално условие) Разглеждаме (2.1.2) в единичния квадрат $\Omega = [0, 1]^2$. Дясната част



Фигура 2.7: Областта Ω за Задача 2.6.1. При различен избор на ъглите се илюстрира въздействието на мрежовата анизотропия върху скоростта на сходимост на предложения преобусловител

e $f(\mathbf{x}, t) = 1$, а по границата $\Gamma_D \equiv \partial\Omega$ са наложени хомогенни граничните условия на Дирихле. Началното условие u_0 е прекъснато, като $u_0 = 1$ във вътрешността на кръг с радиус 0.4 и център в $(0.5, 0.5)$ и $u_0 = 0$ извън този кръг.

Разглеждаме AMLI алгоритми базирани както на DA, така и на FR разделяния. Във всички експерименти системите с водещите диагонални блокове се решават приближено чрез три вътрешни итерации на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне, където преобусловителят е построен по описания в Раздел 2.3 начин.

В числените експерименти разглеждаме AMLI преобусловител без стабилизация (V-цикъл) и нелинеен AMLI (NLAMLI) с брой вътрешни итерации с обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне $\beta_k = 2$ и 3 на всяко ниво k (W-цикъл от степен 2 и 3). Използваме нелинейния AMLI метод поради следните съображения. От една страна не разполагаме с оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ за случая на FR разделяне на матрицата на системата за параболична задача. Известно е обаче (вж. напр. [61]), че за елиптични задачи FR подходит притежава по-добра сходимост от DA метода, което ни дава основание да очакваме подобно поведение и за случая на параболични

Брой рафинирания ℓ	2.6.1 (a)			2.6.1 (b)			2.6.1 (c)		
	V	W2	W3	V	W2	W3	V	W2	W3
DA преобусловител									
1	8	11	11	10	14	14	7	10	9
2	12	13	12	19	15	14	14	18	17
3	15	13	12	34	16	14	26	22	17
4	19	13	11	62	18	14	51	26	16
5	26	13	12	114	18	14	102	25	16
FR преобусловител									
1	8	8	8	9	9	9	6	7	6
2	11	8	8	15	10	9	10	7	6
3	14	8	8	20	10	9	16	7	6
4	16	8	7	25	9	9	21	6	6
5	20	8	8	29	9	9	19	6	6

Таблица 2.1: Задача 2.6.1: Брой итерации за стационарната задача

Брой рафинириания ℓ	2.6.1 (a)			2.6.1 (b)			2.6.1 (c)		
	V	W2	W3	V	W2	W3	V	W2	W3
DA преобусловител									
1	7	7	7	8	8	8	5	5	5
2	8	7	7	10	8	8	7	6	5
3	11	7	7	13	8	8	10	6	5
4	14	7	7	15	8	8	10	6	5
5	19	7	7	18	8	8	12	6	5
FR преобусловител									
1	6	6	6	8	8	8	5	6	6
2	7	6	6	10	8	8	7	6	5
3	7	6	6	9	8	8	8	5	5
4	7	6	6	9	8	8	9	5	5
5	7	6	6	10	8	8	9	5	5

Таблица 2.2: Задача 2.6.1: Брой итерации, $\theta = 0$, AMLI преобусловител

задачи. Също така, трябва да се вземе под внимание, че FR преобусловителите подобряват свойствата си при увеличаване на броя на нивата в AMLI метода. Въз основа на Теорема 2.4.1, DA преобусловителят притежава гарантирана оптимална скорост на сходимост при използване на стабилизиращ полином от трета степен, но в проведените експерименти, представени в Таблици 2.1–2.3, разглеждаме също така и стабилизация само с две вътрешни итерации. Ето защо, използването на саморегулиращия се нелинеен AMLI метод с адаптивно преобуславяне по нива, който да позволи усвояването на пълния потенциал на юрархичното разделяне, е за предпочитане.

Забележка 2.6.1 Числени експерименти, които не са включени в дисертацијата, показват, че подобно на представените в [16] резултати, стабилизация

може да бъде прилагана само на част от нивата, вж. също [76].

Експериментите за Задача 2.6.1 илюстрират въздействието на мрежовата анизотропия върху ефективността на предложения преобусловител за (2.1.9). В представените експерименти най-грубата мрежа е получена чрез три последователни рафинирания на началната геометрия. Най-фината използвана мрежа има 98688 степени на свобода. Използвано е нулево начално приближение.

Проведени са три вида експерименти. При първия разглеждаме стационарната задача, където решаваните системи са (само) с матрицата на коравина. В другите два случая решаваме дискретизираната параболична система (2.1.9) за две стойности на θ , $\theta = 0$ и $\theta = 1/2$. При $\theta = 0$ дискретизацията по времето е чрез напълно неявна схема (неявен метод на Ойлер), а при $\theta = 1/2$ – чрез метод на Кранк-Николсон. И в двета случая стъпката по времето е $\Delta t = h_\ell^2$, където h_ℓ е характеристичният размер на най-фината мрежка. Системите на най-грубата мрежа решаваме точно с факторизация на Холецки.

В Таблици 2.1–2.3 са показани резултати за решаването на Задача 2.6.1. Всеки ред отговаря на еднократно решаване на съответната система чрез прилагане на метод на спрегнатия градиент с преобуславяне за случая на V-цикъл (V), или обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне за случая на W-цикъл с две вътрешни итерации (W2) и W-цикъл с три вътрешни итерации (W3). Представеният брой итерации съответства на относителна грешка $\|\mathbf{r}_{(n)}\|/\|\mathbf{r}_{(0)}\| \leq 10^{-6}$, където $\mathbf{r}_{(n)}$ е n -тият резидуал, вж. (1.2.43) в Алгоритъм 1.2.2.

В случая на Задача 2.6.1.(б) и 2.6.1.(в) матрицата на коравина е допълнително лошо обусловена заради мрежовата анизотропия, породена от формата на триъгълните елементи. Резултатите в Таблица 2.1 ясно показват влиянието на този факт върху сходимостта на V-цикъла. В съответствие с теоретичните оценки, при използване на стабилизация в двета варианта на W-цикъл, броят на итерациите не се влияе съществено от “лошата” мрежа.

Брой рафинирания ℓ	2.6.1 (a)			2.6.1 (b)			2.6.1 (c)		
	V	W2	W3	V	W2	W3	V	W2	W3
DA преобусловител									
1	6	7	7	7	7	7	6	5	5
2	8	7	7	9	7	7	8	6	6
3	11	7	7	11	7	7	9	6	6
4	14	7	7	13	7	7	10	6	6
5	19	7	7	16	7	7	11	6	6
FR преобусловител									
1	6	6	6	7	7	7	6	5	6
2	6	6	6	9	7	7	7	6	5
3	6	6	6	9	7	7	8	5	5
4	6	6	6	9	7	7	9	5	5
5	6	6	6	9	7	7	9	5	5

Таблица 2.3: Задача 2.6.1: Брой итерации, $\theta = 1/2$, AMLI преобусловител

Матрицата на масата за крайни елементи на Крозе-Равиар е диагонална, поради което матрицата на системата за дискретизираната параболична задача е по-силно диагонално доминираща от матрицата на системата в случай на елиптична задача. Сравнение на резултатите в Таблица 2.1, от една страна, и Таблици 2.2 и 2.3, от друга страна, ясно показва влиянието на този ефект. W-циклите за параболичната система се стабилизират за по-малък брой итерации. V-цикълът за този случай също има по-добри свойства. При използваната тук стъпка по времето не се наблюдават много големи разлики в поведението на преобусловителите за двата избора на θ , което също е в съответствие с теоретичните оценки. Сравнението на DA и FR преобусловителите показва, че FR методът има същата или по-добра скорост на сходимост спрямо тази на DA метода за параболичната задача. Случаят на W-цикъл с три вътрешни итерации, както и този с две, показват оптимално поведение и за двата разглеждани варианта на юерарично разделяне. Резултатите потвърждават предположението, че FR преобусловителят е оптимален и за параболичната задача.

За да направим сравнение на предложените AMLI преобусловители с други оптимални методи, включваме и числени експерименти с метод на спрегнатия градиент, преобусловен с Алгебричен Мултигрид (AMG). Решаваме разглежданата задача при $\theta = 1/2$, за трите случая 2.6.1.(a), 2.6.1.(b) и 2.6.1.(c). За AMG преобусловителя, като “черна кутия” с настройки по подразбиране, използваме функционалността в библиотеката *HSL_M120* (вж. [55]). Резултатите са представени в Таблица 2.4. Дясната част, началното приближение и критерия за прекратяване на итеративния процес са същите като тези, използвани с DA и FR преобуславяне в Таблица 2.3. Ясно изразено е предимството на NLAMLI за силно анизотропни задачи.

Като следваща стъпка разглеждаме Задача 2.6.2 и поведението на предложените техники на преобуславяне в процеса на числено решаване на нестационарната параболична задача. Известно е, че за по-сложни задачи, например такива с прекъснато начално условие като разглежданата тук, стойност на параметър $\theta = 1/2$ води до нефизични осцилации в началото на изчислителния процес.

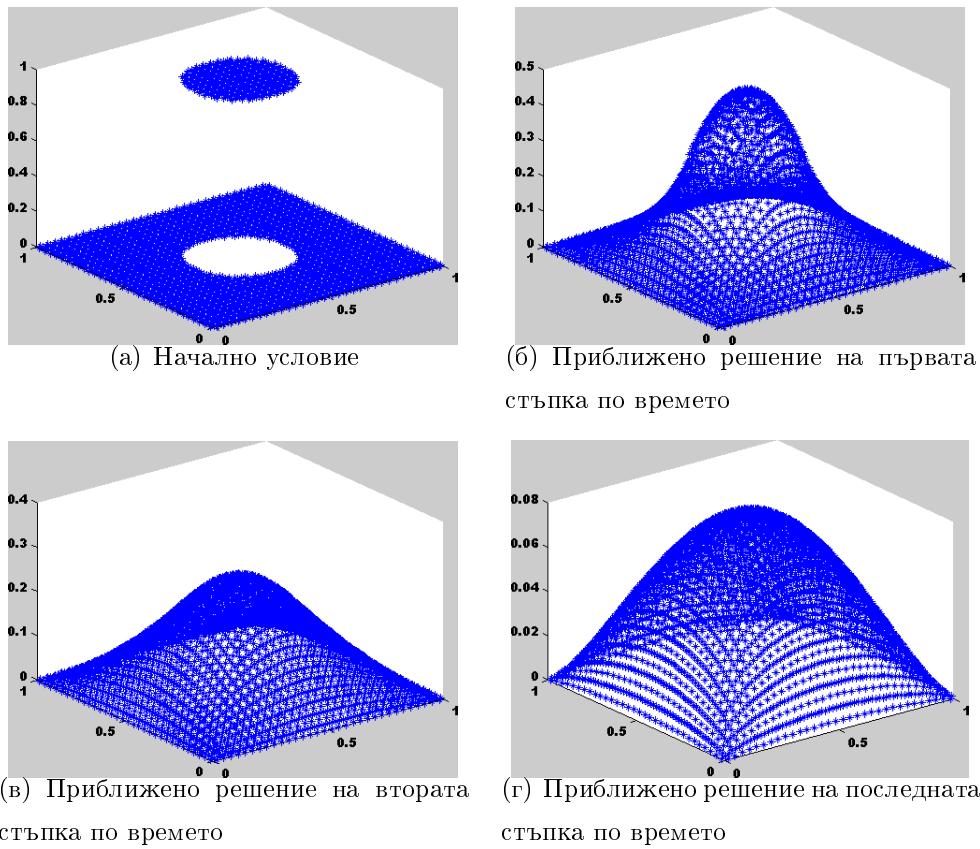
Брой рафинирания ℓ	2.6.1 (a)	2.6.1 (b)	2.6.1 (c)
AMG преобусловител			
1	4	10	28
2	4	10	38
3	4	10	46
4	4	10	50
5	4	10	50

Таблица 2.4: Задача 2.6.1: Брой итерации, $\theta = 1/2$, AMG преобусловител

Ето защо използваме неявен метод на Ойлер, $\theta = 0$. В експериментите избираме $\Delta t = h_\ell$. За получаване на представените резултати изпълняваме десет стъпки по времето, което е достатъчно, за да се покрие периода, в който функцията на температурата се изглежда в цялата област. Прилагаме NLAMLI с FR преобусловител и стабилизация с две вътрешни итерации. На всяка стъпка по времето използваме получения на предходна стъпка резултат като начално приближение. Приближенията се подобряват, поради което има основание да прилагаме динамичен критерий за край на итерационния процес. Тук, итерациите в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне и обобщения метод на спрегнатия градиент с преобуславяне се преустановяват, когато $\|\mathbf{r}_{(n)}\|/\|\mathbf{r}_{(0)}\| \leq 10^{-6}$, или когато $\|\mathbf{r}_{(n)}\| \leq 10^{-6}$. В Таблица 2.5 са представени средният брой извършени на стъпка по времето итерации.

Фигура 2.8 илюстрира формата на полученото числено решение. Показани са началното условие, приближението на първата, втората и последната стъпка по времето. Резултатите съответстват на свойствата на физичното явление. Ясно се наблюдава типичното за еволюционни уравнения изглеждане на началното условие.

Фигура 2.8: Уравнение на топлопроводност с прекъснато начално условие, $\ell = 2$.



Размерност на зад. n_ℓ	Брой рафин. ℓ	Ср. брой итерации (V)	Ср. брой итерации (W2)
FR преобусловител			
800	1	6	5
3136	2	8	6
12416	3	11	6
49408	4	13	7
197120	5	16	8

Таблица 2.5: Задача 2.6.2: Среден брой итерации на стъпка по времето

Глава 3

Многонивови методи за граф-лапласиани с тегла

Във фокуса на настоящата глава е конструирането на многонивови преобусловители за системи, чиито матрици имат структура на граф-лапласиан с тегла. Един клас задачи от този вид е свързан с прилагане на смесен метод на крайните елементи.

Нека напомним, че стандартният метод на крайните елементи е вариант на класическия метод на Риц с на части полиномиално пространство за търсене на приближено решение на вариационната задача. В този случай решението минимизира енергетичния функционал, съответстващ на разглежданата задача. От друга страна, при смесения метод на крайните елементи, решението е седлова точка за съответния функционал. Получената дискретна задача е знаково неопределенна и следователно методът на спрегнатия градиент с преобуславяне не е директно приложим.

Тук показваме как разглежданата в тази глава задача със седлова точка може ефективно да се сведе до задача за решаване на система със симетрична положително полуопределенна матрица. Тази матрица е със структура на граф-лапласиан и няма стандартно представяне като сума от елементни матрици. В използваната в дисертацията формулировка матрицата на системата се раз-

глежда като сума от специално въведени локални матрици, асоциирани не с елементите, а с техните страни. В дисертацията предлагаме многонивов преобусловител, основан на тази конструкция. Представяме теоретични и числени резултати, свързани с двата основни аспекта в построяването на оптимален AMLI метод – равномерна оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ за предложеното йерархично двунивово разделяне и ефективни преобусловители за водещите диагонални блокове.

Основни резултати, включени в настоящата глава, са публикувани в:

- P. Boyanova, S. Margenov, *Multilevel Splitting of Weighted Graph-Laplacian Arising in Non-conforming Mixed FEM Elliptic Problems*, Numerical Analysis and Its Applications, Springer LNCS **5434**, 2009, 216-223.
- P. Boyanova, S. Margenov, *Numerical Study of AMLI Methods for Weighted Graph-Laplacians*, Large-Scale Scientific Computing, Springer LNCS **5910**, 2010, 84-91.
- P. Boyanova, I. Georgiev, S. Margenov, L. Zikatanov, *Multilevel Preconditioning of Graph-Laplacians: Polynomial Approximation of the Pivot Blocks Inverses*, submitted.

3.1 Смесена задача – постановка и дискретизация

Разглеждаме елиптичната гранична задача в смесена форма

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

където Ω е многоъгълна област в \mathbb{R}^2 , а $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ е дадена гладка векторна функция. Неизвестната векторна функция $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ще наричаме скорост, а неизвестната скаларна функция p – налягане.

Задача от този вид възниква, например, на проекционната стъпка в съставен метод за нестационарните уравнения на Навие-Стокс. В този случай комбинацията от крайни елементи на Крозе-Равиар за скоростите и на части константи за налягането води до устойчива, локално консервативна дискретизация (вж. [43], както и [25]). В слаба форма задача (3.1.1) има вида:

При дадена дясна част $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$, да се намерят $(\mathbf{u}, p) \in (\mathcal{V}, Q)$, така че

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2, \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ върху } \partial\Omega\}, \\ Q &= \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q = 0\}. \end{aligned}$$

Разглеждаме квази-регулярен мрежа от триъгълници \mathcal{T}_h с характерен размер h , а приближено решение (\mathbf{u}_h, p_h) на (3.1.2) търсим в дискретните пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h &= \{ \mathbf{v}_h \in (L^2(\Omega))^2, \mathbf{v}_h|_e \in (P_1(e))^2 \quad \forall e \in \mathcal{T}_h, \\ &\quad \mathbf{v}_h \text{ е непрекъсната в средите на страните на } \forall e \in \mathcal{T}_h, \\ &\quad \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ в средите на страни по границата } \partial\Omega \}, \end{aligned}$$

$$Q_h = \{q_h \in L^2(\Omega), q_h|_e \in P_0(e), \forall e \in \mathcal{T}_h, \int_{\Omega} q_h = 0\},$$

така че

$$(3.1.3) \quad \begin{aligned} (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Нека $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ са средите на страните на елементите $\{e_k\}_{k=1}^n$. Означаваме с $\phi_i, i = 1, \dots, N$ базисните функции на Крозе-Равиар,

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij},$$

а с $q_k, k = 1, \dots, n$ базисните функции на пространството на на части константи върху \mathcal{T}_h ,

$$(3.1.4) \quad q_k(\mathbf{y}) = \delta_{kl}, \mathbf{y} \in e_l.$$

Тогава, неизвестните функции на скоростите и налягането търсим като

$$\mathbf{u}_h = (u_{1,h}, u_{2,h}) = \left(\sum_{j=1}^N u_{1,h,j} \phi_j, \sum_{j=1}^N u_{2,h,j} \phi_j \right),$$

$$p_h = \sum_{k=1}^n p_{h,k} q_k.$$

За да е в сила $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h)$ за всяко $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$, достатъчно е да е изпълнено за $\forall \mathbf{v}_h = (\phi_i, 0)$ и $\forall \mathbf{v}_h = (0, \phi_i)$, $i = 1, \dots, N$. Тогава задача (3.1.3) може да се запише във вида:

Да се намерят $\mathbf{u}_{1,h} = \{u_{1,h,j}\}_{j=1}^N$, $\mathbf{u}_{2,h} = \{u_{2,h,j}\}_{j=1}^N$ и $\mathbf{p}_h = \{p_{h,k}\}_{k=1}^n$, за които

$$(3.1.5) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_{1,h,j} \phi_j \phi_i - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} p_{h,k} q_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x} &= \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} f_{1,h,j} \phi_j \phi_i, \quad i = 1, \dots, N \\ \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_{2,h,j} \phi_j \phi_i - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} p_{h,k} q_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x} &= \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} f_{2,h,j} \phi_j \phi_i, \quad i = 1, \dots, N \\ - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_{1,h,j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} q_k - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_{2,h,j} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} q_k &= 0, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Дискретната система (3.1.5) има вида $P \mathbf{w}_h = \mathbf{b}$, където $\mathbf{w}_h^T = \{\mathbf{u}_{1,h}^T, \mathbf{u}_{2,h}^T, \mathbf{p}_h^T\}$ е векторът на неизвестните скорости и налягане, а матрицата P има следната симетрична структура

$$(3.1.6) \quad P = \begin{bmatrix} M & & B_1 \\ & M & B_2 \\ B_1^T & B_2^T & \end{bmatrix}.$$

Тук M е матрица на масата, която, както вече беше споменато, е диагонална, т.e.

$$M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^N, \text{ където } m_{ii} = \int_{\Omega} \phi_i^2, \text{ а } m_{ij} = 0 \text{ за } i \neq j.$$

Блоковете B_1 и B_2 са матрици с N реда и n стълба и поради свойството (3.1.4) имат вида

$$(3.1.7) \quad \begin{aligned} B_1 &= \{b_{1,ij}\}_{i,j=1}^{N,n}, \quad \text{където } b_{1,ij} = - \int_{e_j} \frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \\ B_2 &= \{b_{2,ij}\}_{i,j=1}^{N,n}, \quad \text{където } b_{2,ij} = - \int_{e_j} \frac{\partial \phi_i}{\partial y}. \end{aligned}$$

3.2 Структура на матрицата на задачата за налягането: граф-лапласиан с тегла

Смесеният метод на крайните елементи води до задача със седлова точка. Матрицата P е особена и директното приложение на метод на спрегнатия градиент не е възможно.

Методи за решаване на системи със седлова точка са предлагани от различни автори (вж. напр. [17] и цитираните там заглавия). В разглеждания случай можем да подходим по два начина. Единият е да елиминираме неизвестните на налягането и да получим система за неизвестните скорости \mathbf{u}_h , (вж. напр. [39]). Можем също така да елиминираме неизвестните скорости и да получим система за налягането със симетричната положително полуопределенна матрица

$$(3.2.8) \quad A = B_1^T M^{-1} B_1 + B_2^T M^{-1} B_2.$$

Понеже за случая на дискретизация с крайни елементи на Крозе-Равиар матрицата на масата е диагонална, това изключване лесно може да бъде извършено точно. В дисертацията разглеждаме този втори вариант, като целта на текущата глава е да представи ефективен многонивов метод за решаване на системи с матрицата A .

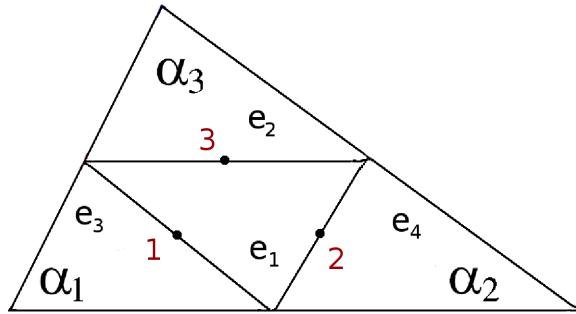
Забележка 3.2.1 *Поради вида, в който търсим неизвестното налягане – като на части константна функция – компонентите на вектора $\mathbf{p}_h = \{p_{h,k}\}_{k=1}^n$ се асоциират с крайните елементи e_k .*

Матрицата (3.2.8) има следния вид

$$(3.2.9) \quad A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, a_{ij} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{b_{1,kj} b_{1,ki}}{m_{kk}} + \frac{b_{2,kj} b_{2,ki}}{m_{kk}} \right),$$

като от (3.1.7) следва, че ненулева връзка a_{ij} има само между съседни елементи e_i, e_j . В общия случай на начална триангулация и равномерно рафинирана мрежа, елементите на матрицата имат стойности, които зависят от ъглите на триъгълниците.

Фигура 3.1: Ненулевите компоненти в допълнението на Шур за налягането, асоциирани с крайния елемент e_1 , съответстват на връзки със съседните му елементи e_1, e_2, e_3 посредством общите им крайно-елементни възли в средите на страните на e_1



Лема 3.2.1 Нека мрежата \mathcal{T}_h е получена чрез равномерно сгъстяване на дадена начална триангулация. За номерация на крайните елементи $e_k, k = 1, \dots, 4$ както на Фигура 3.1, редът в матрицата A , отговарящ на компонента на налягането асоцииран с e_1 , има следните ненулеви елементи:

$$(3.2.10) \quad \begin{aligned} a_{12} &= -3 \frac{\cot^2 \alpha_2 + 1}{\cot \alpha_2 + \cot \alpha_3}, \\ a_{13} &= -3(\cot \alpha_2 + \cot \alpha_3), \\ a_{14} &= -3 \frac{\cot^2 \alpha_3 + 1}{\cot \alpha_2 + \cot \alpha_3}, \\ a_{11} &= -(a_{12} + a_{13} + a_{14}). \end{aligned}$$

Доказателство. Разглеждаме крайния елемент e_1 , неговите съседи и възлите в средите на страните му с номерация като във Фигура 3.1. От (3.2.9)

следва, че

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{b_{1,k1}b_{1,k2}}{m_{kk}} + \frac{b_{2,k1}b_{2,k2}}{m_{kk}} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{\int_{e_1} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \int_{e_2} \frac{\partial \phi_k}{\partial x}}{\int_{\Omega} \phi_k^2} + \frac{\int_{e_1} \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \int_{e_2} \frac{\partial \phi_k}{\partial y}}{\int_{\Omega} \phi_k^2} \right) \\
 &= \frac{\int_{e_1} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \int_{e_2} \frac{\partial \phi_3}{\partial x}}{2 \int_{e_1} \phi_3^2} + \frac{\int_{e_1} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \int_{e_2} \frac{\partial \phi_3}{\partial y}}{2 \int_{e_1} \phi_3^2}.
 \end{aligned}$$

Като използваме свойството на частите константната базисна функция ϕ_3 :

$$\frac{\partial(\phi_3|_{e_2})}{\partial x} = -\frac{\partial(\phi_3|_{e_1})}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\phi_3|_{e_2})}{\partial y} = -\frac{\partial(\phi_3|_{e_1})}{\partial y},$$

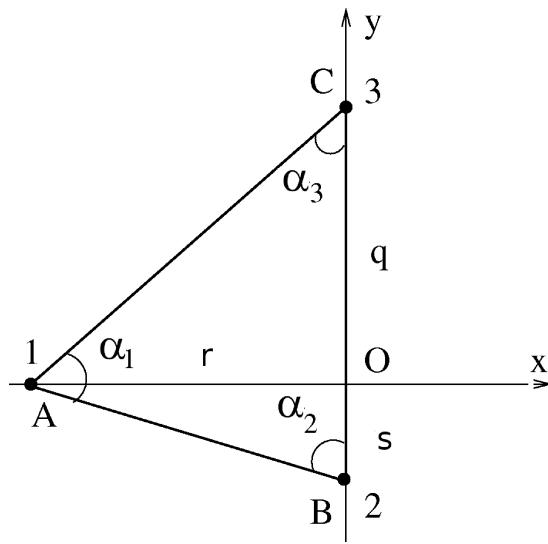
получаваме

$$(3.2.11) \quad a_{12} = \frac{-\left(\int_{e_1} \frac{\partial \phi_3}{\partial x}\right)^2 - \left(\int_{e_1} \frac{\partial \phi_3}{\partial y}\right)^2}{2 \int_{e_1} \phi_3^2}.$$

Също така директно се извеждат и равенствата:

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= \frac{-\left(\int_{e_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)^2 - \left(\int_{e_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\right)^2}{2 \int_{e_1} \phi_1^2}, \quad a_{14} = \frac{-\left(\int_{e_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right)^2 - \left(\int_{e_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial y}\right)^2}{2 \int_{e_1} \phi_2^2}, \\
 (3.2.12) \quad a_{11} &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\left(\int_{e_1} \frac{\partial \phi_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\int_{e_1} \frac{\partial \phi_k}{\partial y}\right)^2}{2 \int_{e_1} \phi_k^2} \right) = -(a_{12} + a_{13} + a_{14}).
 \end{aligned}$$

Нека точките A, B, C са средите на страните на неизродения триъгълен краен елемент e , а ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 са съответните им базисни функции на Крозе-Равиар. Триъгълникът ABC , вж. Фигура 3.2, е подобен на e с коефициент на подобие



Фигура 3.2: При свързване на средите на страните на краен елемент e , се получава подобен на него триъгълник. Базисните функции на Крозе-Равиар асоциирани с e зависят от ъглите $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

2. Използваме означенията $r = |OA|, s = |OB|, q = |OC|$. Следните равенства се проверяват директно:

$$(3.2.13) \quad \cot \alpha_2 = \frac{s}{r}, \quad \cot \alpha_3 = \frac{q}{r},$$

$$\cot \alpha_1 = \cot(\pi - (\alpha_2 + \alpha_3)) = -\frac{\cot \alpha_2 \cot \alpha_3 - 1}{\cot \alpha_2 + \cot \alpha_3} = \frac{r^2 - sq}{r(s + q)}.$$

Тогава, за базисните функции и техните производни са в сила равенствата:

$$(3.2.14) \quad \begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{x}{r}, & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= -\frac{1}{r}, & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} &= 0, \\ \phi_2 &= \frac{qx + r(q - y)}{r(s + q)}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= \frac{q}{r(s + q)}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} &= -\frac{1}{s + q}, \\ \phi_3 &= \frac{sx + r(s + y)}{r(s + q)}, & \frac{\partial \phi_3}{\partial x} &= \frac{s}{r(s + q)}, & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} &= \frac{1}{s + q}. \end{aligned}$$

За лицето на крайния елемент получаваме представянето

$$(3.2.15) \quad |e| = \int_e 1 = 4 \frac{r(s + q)}{2} = 2r(s + q),$$

а за $k = 1, 2, 3$ е в сила равенството

$$(3.2.16) \quad \int_e \phi_k^2 = \frac{2}{3}r(s+q).$$

Изразите (3.2.10) се извеждат след заместване на (3.2.14), (3.2.15) и (3.2.16) в (3.2.11) и (3.2.12) и поредица от еквивалентни преобразувания. За a_{12} получаваме

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{-\left(\int_{e_1} \frac{\partial \phi_3}{\partial x}\right)^2 - \left(\int_{e_1} \frac{\partial \phi_3}{\partial y}\right)^2}{2 \int_{e_1} \phi_3^2} = -\frac{3r^2(s+q)^2}{r(s+q)} \left(\frac{s^2}{r^2(s+q)^2} + \frac{1}{(s+q)^2} \right) \\ &= -\frac{3}{r(s+q)} (s^2 + r^2) = -3 \left(\frac{s^2}{r(s+q)} + \frac{r}{(s+q)} \right). \end{aligned}$$

Окончателният вид на a_{12} се получава като използваме (3.2.13) и факта, че $\frac{r}{s+q} = \frac{1}{\cot \alpha_2 + \cot \alpha_3}$. Аналогични разсъждения се използват и за a_{13} и a_{14} . ■

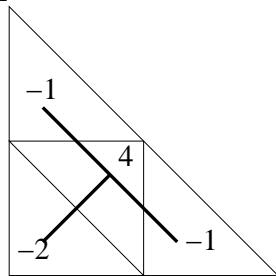
В изложението матрици със структура от описания по-горе вид ще наричаме граф-лапласиани с тегла (вж. напр. [65]).

Забележка 3.2.2 В теорията на графите, граф-лапласиант е матрица, която съдържа информацията за върховете и ребрата му. Нека G е даден граф с n върха $v_i, i = 1, \dots, n$. Граф-лапласиан за графа G наричаме матрицата $L = \{\ell_{ij}\}_{i,j=1}^n$, където:

$$\ell_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & i = j, \\ -1, & i \neq j \text{ и върховете с номера } i \text{ и } j \text{ са свързани с ребро,} \\ 0, & в противен случай. \end{cases}$$

В следващите раздели разглеждаме случая на вложени мрежи от равнобедрени правоъгълни триъгълници, като всяка по-фина мрежа е получена чрез равномерно сгъстяване на предходната. От Лема 3.2.1 следва, че за всяка такава триангуляция, A съответства на Т-образния четириточков шаблон от Фигура 3.3, т.е., връзките на елемент e с негови съседи с общ катет имат стойност -1 , а връзка с елемент с обща хипотенуза има стойност -2 .

Фигура 3.3: Четириточков шаблон на допълнението на Шур за налягането – равнобедрени правоъгълни триъгълници



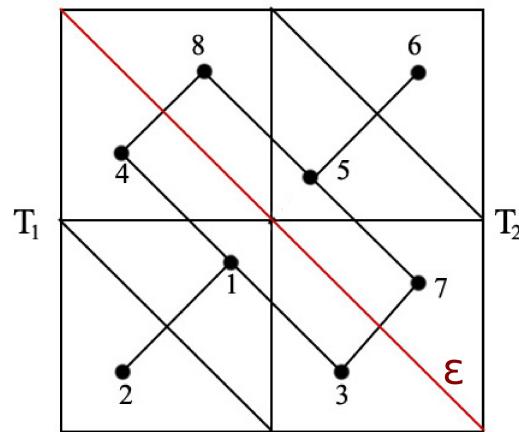
3.3 Йерархично разделяне, оценка на константа в усиленото неравенство на КБШ

Както знаем, основен градивен елемент в конструирането на ефективни AMLI методи е дефинирането на подходящо йерархично разделяне на крайно-елементното пространство. Предложеният по-долу подход за йерархично разделяне на граф-лапласиани с тегла се базира на идеи, първоначално представени в [65].

Нека $\mathcal{T}_{k-1} \subset \mathcal{T}_k$ са две последователни триангулации на областта Ω , получени чрез равномерно сгъстяване на начална мрежа от равнобедрени правоъгълни триъгълници. Граф-лапласианът с тегла A представяме във вида

$$A^{(k)} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} A_{\varepsilon}^{(k)},$$

като сума (в смисъл на асемблиране) от локални макроелементни матрици. Тук $A_{\varepsilon}^{(k)}$ дефинираме по специален начин, което е и пъrvата важна стъпка в предложената йерархична конструкция. Матриците $A_{\varepsilon}^{(k)}$ асоциираме с множеството на страните $\varepsilon \in \mathcal{E}$ на триъгълниците от по-грубата мрежа. Следвайки номерацията от Фигура 3.4, въвеждаме локална макроелементна матрица $A_{\varepsilon}^{(k)}$,



Фигура 3.4: Макроелемент от два триъгълника с обща хипотенуза

съответстваща на хипотенуза, по следния начин

$$(3.3.17) \quad A_{\varepsilon}^{(k)} = A_{\varepsilon;H}^{(k)} = \left[\begin{array}{cccc|cc} t+1 & -2t & \frac{t-1}{2} & \frac{t-1}{2} & & \\ -2t & 2t & & & & \\ \frac{t-1}{2} & & \frac{5-t}{2} & & -2 & \\ \frac{t-1}{2} & & \frac{5-t}{2} & & & -2 \\ \hline & & & & t+1 & -2t & \frac{t-1}{2} & \frac{t-1}{2} \\ & & & & -2t & 2t & & \\ & & -2 & & \frac{t-1}{2} & & \frac{5-t}{2} & \\ & & -2 & & \frac{t-1}{2} & & & \frac{5-t}{2} \end{array} \right].$$

Локалните матрици, съответстващи на катет, разглеждаме във вида

$$(3.3.18) \quad A_{\varepsilon}^{(k)} = A_{\varepsilon;C}^{(k)} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{3-t}{2} & t-1 & \frac{t-1}{2} & -t & \\ t-1 & 2-t & & & -1 \\ \frac{t-1}{2} & & \frac{3-t}{2} & & -1 \\ -t & & t & & \\ \hline & & & \frac{3-t}{2} & t-1 & -t & \frac{t-1}{2} \\ & -1 & & t-1 & 2-t & & \\ & & -t & & & t & \\ & -1 & & \frac{t-1}{2} & & & \frac{3-t}{2} \end{array} \right].$$

Основна идея в тази конструкция е компонентите на глобалната матрица A , съответстващи на даден елемент $e \in \mathcal{T}_k$, да бъдат "разпределени" между три локални матрици, съответстващи на трите страни на елемента $E \in \mathcal{T}_{k-1}$ от грубата мрежа, за който $e \subset E$. Това разпределение става посредством тегловия параметър $t \in (0, 1)$ в (3.3.17) и (3.3.18). Ядрото $\ker(A_{\varepsilon}^{(k)})$ съдържа константните вектори, а след асемблиране на $A_{\varepsilon}^{(k)}$, $\varepsilon \in \mathcal{E}$, глобалната матрица A се възстановява точно.

Вторият важен момент в конструирането на преобусловителя, е да се въведе локална трансформационна матрица $J_{\varepsilon}^{(k)}$. Дефинираме я по следния начин

$$(3.3.19) \quad J_{\varepsilon}^{(k)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & s & q & q & & & & \\ 1 & q & s & q & & & & \\ 1 & q & q & s & & & & \\ & & & & 1 & s & q & q \\ & & & & 1 & q & s & q \\ & & & & 1 & q & q & s \\ r & r & r & r & & r & r & r \\ & & & & & & & r \end{array} \right],$$

където параметрите s и q ще бъдат уточнени по-късно, а r е скалиращ параметър. В йерархичен базис локалните матрици имат следния вид

$$(3.3.20) \quad \tilde{A}_\varepsilon^{(k)} = J_\varepsilon^{(k)} A_\varepsilon^{(k)} J_\varepsilon^{(k)T} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\varepsilon:11}^{(k)} & \tilde{A}_{\varepsilon:12}^{(k)} \\ \tilde{A}_{\varepsilon:21}^{(k)} & \tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)} \end{bmatrix},$$

където блокът $\tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)}$ е с размерност 2×2 . Глобалната йерархична матрица $\tilde{A}^{(k)} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \tilde{A}_\varepsilon^{(k)}$ приема блочното две-на-две разделяне

$$(3.3.21) \quad \tilde{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k)} & \tilde{A}_{12}^{(k)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k)} & \tilde{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Лема 3.3.1 За йерархичния базис, дефиниран чрез трансформацията (3.3.19), е изпълнено равенството

$$\tilde{A}_{22}^{(k)} = A^{(k-1)} \quad \text{тогава и само тогава, когато} \quad r = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Доказателство. От (3.3.19) и (3.3.20) се извеждат следните равенства за компонентите (i, j) на $\tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)}(1, 1) &= r^2 \sum_{i,j=1}^4 A_\varepsilon^{(k)}(i, j) \\ \tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)}(1, 2) &= r^2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=5}^8 A_\varepsilon^{(k)}(i, j) \\ \tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)}(2, 2) &= r^2 \sum_{i,j=5}^8 A_\varepsilon^{(k)}(i, j) \\ \tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)}(2, 1) &= r^2 \sum_{i=5}^8 \sum_{j=1}^4 A_\varepsilon^{(k)}(i, j). \end{aligned}$$

За случаите (3.3.17), (3.3.18) получаваме съответно

$$(3.3.22) \quad \begin{aligned} \tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)} &= \tilde{A}_{\varepsilon;H:22}^{(k)} = r^2 \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)} &= \tilde{A}_{\varepsilon;C:22}^{(k)} = r^2 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ в $\tilde{A}_{\varepsilon;H:22}^{(k)}$ и $\tilde{A}_{\varepsilon;C:22}^{(k)}$ се съдържат приносите към граф-лапласиана от по-грубата мрежа, съответстващи на връзки между елементи с обща хипотенуза или катет, вж. четириточковия шаблон от Фигура (3.3). ■

Лема 3.3.1 показва, че във втория диагонален блок на предложеното йерархичното разделяне се възстановява граф-лапласианът на грубата мрежа, което позволява рекурсивно многонивово обобщение за последователност от вложени триангулации.

Както се вижда от (3.3.22), $\ker(\tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)})$ се състои от константните вектори. От Лема 1.3.3 следва, че локалните константи γ_ε на КБШ за разделянето (3.3.20) можем да пресметнем като

$$(\gamma_\varepsilon)^2 = 1 - \lambda,$$

където λ е собствената стойност (която е единствена за разглежданите матрици) на задачата за собствени стойности

$$\tilde{S}_\varepsilon^{(k)} \mathbf{v} = \lambda \tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq \text{const},$$

където $\tilde{S}_\varepsilon^{(k)} = \tilde{A}_{\varepsilon:22}^{(k)} - \tilde{A}_{\varepsilon:21}^{(k)} (\tilde{A}_{\varepsilon:11}^{(k)})^{-1} \tilde{A}_{\varepsilon:12}^{(k)}$ е допълнението на Шур.

Варирайки параметрите (s, q, t) получаваме семейство йерархични разделяния. По аналогия с анализа в [65], първо разглеждаме комбинацията $s = 1$, $q = -0.5$, $t = 0.5$. Като използваме Лема 1.3.4 в този случай получаваме оценката

$$(3.3.23) \quad \gamma^2 \leq \max\{\gamma_{e;H}, \gamma_{e;C}\} = 0.73$$

за константата в усиленото неравенство на КБШ за разделянето (3.3.21).

Като следваща стъпка модифицираме параметрите на йерархичната трансформация с цел подобряване на оценката за локалните константи в усиленото неравенство на КБШ. Варираме стойностите на q и t за $s = 1$. Направеният анализ показва, че за $q = -0.1$ и $t = 0.75$ се достига локален минимум и

$$(3.3.24) \quad \gamma^2 \leq \max\{\gamma_{e;H}, \gamma_{e;C}\} = 0.58.$$

Двунивовото разделяне може директно да се обобщи в AMLI метод за последователност от вложени мрежи $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell$. Конструирането на йерархичния базис и всички свързани с него матрици не зависят от текущото ниво на рафиниране, ето защо оценките (3.3.23) и (3.3.24) са в сила за всяко $k = 1, \dots, \ell$. И в двета разгледани случая на избор на параметрите на разделянето (s, q) , достатъчното условие за оптималност (1.3.78) на AMLI метода е изпълнено за стабилизация с полином от втора степен.

3.4 Преобусловител за водещия диагонален блок

В този раздел е предложен и изследван преобусловител за водещия диагонален блок в дефинираното йерархично разделяне на граф-лапласиани. Конструкцията използва полиномиална апроксимация на обратна матрица.

Нека разгледаме симетричната положително определена матрица H с размерност $n \times n$. Множеството от двойките ѝ собствено число - собствен вектор означаваме с $\{\lambda_i, \hat{\mathbf{v}}_i\}_{i=1}^n$, $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Целта е да построим полиномиална апроксимация (преобусловител) C^{-1} на H^{-1} (т.е. преобусловител C на H), така че $C^{-1} = P_\nu(H)$, където $P_\nu \in \mathcal{P}_\nu$ е полином от степен ν , а относителното число на обусловеност $\kappa(C^{-1}H)$ да е близо до единица.

Теорема 3.4.1 Нека $P_\nu(x) \in \mathcal{P}_\nu$ и неравенствата $0 < \underline{m} \leq P_\nu(x)x \leq \bar{m}$ са в сила за всяко x в даден интервал \mathcal{S} , за който $[\lambda_1, \lambda_n] \subset \mathcal{S}$. Тогава

$$\underline{m}\mathbf{v}^T \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^T P_\nu(H) H \mathbf{v} \leq \bar{m}\mathbf{v}^T \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Доказателство. За всеки собствен вектор $\hat{\mathbf{v}}_i, i = 1, \dots, n$ и цяло число m е изпълнено $H^m \hat{\mathbf{v}}_i = \lambda_i^m \hat{\mathbf{v}}_i$ и следователно

$$P_\nu(H) \hat{\mathbf{v}}_i = P_\nu(\lambda_i) \hat{\mathbf{v}}_i.$$

Нека $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{\mathbf{v}}_i$ е произволен вектор в \mathbb{R}^n . Тогава

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^T P_\nu(H) H \mathbf{v} &= \mathbf{v}^T P_\nu(H) H \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{\mathbf{v}}_i \\ &= \mathbf{v}^T \sum_{i=1}^n \alpha_i P_\nu(H) H \hat{\mathbf{v}}_i \\ &= \mathbf{v}^T \sum_{i=1}^n \alpha_i P_\nu(\lambda_i) \lambda_i \hat{\mathbf{v}}_i \\ &\leq \mathbf{v}^T \bar{m} \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{\mathbf{v}}_i = \bar{m} \mathbf{v}^T \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Лявото неравенство следва по аналогичен начин. ■

Целта е да получим матрица, която е близка до обратната на H , $P_\nu(H)H \sim I$, т.e. $P_\nu(x)x \sim 1$ за всяко $x \in \mathcal{S}$. Нека предположим, че $|P_\nu(x) - 1/x| < \epsilon$ за всяко $x \in \mathcal{S} \subset (0, +\infty)$. Тогава

$$1 - \epsilon x < P_\nu(x)x < 1 + \epsilon x, \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Ако е известна оценка за спектъра на H , така че $\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}, i = 1, \dots, n$, можем да изберем $\mathcal{S} = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ и да получим

$$(3.4.25) \quad 1 - \epsilon \lambda_{\max} < P_\nu(x)x < 1 + \epsilon \lambda_{\max}.$$

В общия случай, ако ϵ е достатъчно малко, или еквивалентно, ако степента ν на полинома е достатъчно голяма, то $P_\nu(x)x > 0$ за всяко $x \in \mathcal{S}$, $P_\nu(H)H$ е симетрична и положително определена и

$$\kappa(P_\nu(H)H) < \frac{1 + \epsilon \lambda_{\max}}{1 - \epsilon \lambda_{\max}}.$$

Подходът, който разглеждаме в дисертацията, е да изберем $P_\nu(x)$ да бъде полином на най-добро приближение на x^{-1} в L_∞ норма в крайния интервал $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, т.e.

$$\left\| \frac{1}{x} - P_\nu \right\|_{\infty, [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} = \min_{P \in \mathcal{P}_\nu} \left\| \frac{1}{x} - P \right\|_{\infty, [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} = E(\nu).$$

Известно е (вж. напр. [72], [62]), че за $\nu \geq 1$

$$P_\nu(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{2(-\theta)^{-\nu}}{(\theta - \theta^{-1})^2} R_{\nu+1}(2\sigma x - a) \right),$$

където

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}, & a &= \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}, & \theta &= a + \sqrt{a^2 - 1}, \\ R_{\nu+1}(x) &= \theta T_{\nu+1}(x) + 2T_\nu(x) + \theta^{-1} T_{\nu-1}(x), \end{aligned}$$

и $T_\nu(x) \in \mathcal{P}_\nu$ е полином на Чебишев от степен ν . Грешката на най-доброто полиномиално приближение $E(\nu)$ е

$$E(\nu) = \frac{8\sigma\theta^{-\nu}}{(\theta - \theta^{-1})^2}.$$

За полинома $P_\nu(x)$ съществува тричленна рекурентна формула (вж. [62]), която позволява използването на следния алгоритъм за пресмятането на $P_\nu(H)$:

$$\begin{aligned} P_0(H) &= \frac{\eta(1+\delta)}{(1-\delta)^2} I, & P_1(H) &= - \left(\frac{\eta}{1-\delta} \right)^2 A + \frac{2\eta}{(1-\delta)^2} I, \\ P_{k+1}(H) &= [(1+\delta)I - \eta A]P_k(H) - \delta P_{k-1}(H) + \eta I, \end{aligned}$$

където

$$\eta = \frac{4}{(\sqrt{\lambda_{\max}} + \sqrt{\lambda_{\min}})^2}, \quad \delta = \left(\frac{\sqrt{\lambda_{\max}} - \sqrt{\lambda_{\min}}}{\sqrt{\lambda_{\max}} + \sqrt{\lambda_{\min}}} \right)^2.$$

Нека сега разгледаме водещия диагонален блок $\tilde{A}_{11}^{(k)} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \tilde{A}_{\varepsilon:11}^{(k)}$. Локалните матрици $\tilde{A}_{\varepsilon:11}^{(k)}$ са симетрични и положително определени. Ето защо $\tilde{A}_{11}^{(k)}$ също е симетрична. Известно е, че необходимо и достатъчно условие една симетрична матрица да е положително определена, е собствените ѝ стойности да са положителни. Разглеждаме задачата за намиране на собствени стойности $\tilde{A}_{11}^{(k)} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. Тогава

$$\lambda \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \tilde{A}_{11}^{(k)} \mathbf{v} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \mathbf{v}_\varepsilon^T \tilde{A}_{\varepsilon:11}^{(k)} \mathbf{v}_\varepsilon \leq \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \max \lambda(\tilde{A}_{\varepsilon:11}^{(k)}) \mathbf{v}_\varepsilon^T \mathbf{v}_\varepsilon.$$

Следователно

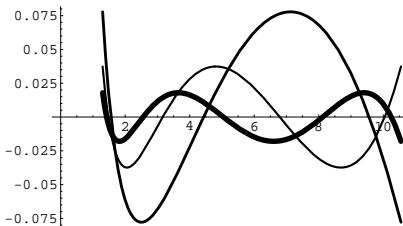
$$(3.4.26) \quad \lambda < C_{\mathcal{E}} \max_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \{ \max \lambda(\tilde{A}_{\varepsilon:11}^{(k)}) \},$$

където $C_{\mathcal{E}}$ е максималният брой елементни вектори \mathbf{v}_{ε} , в които може да се случи да участва една и съща компонента на \mathbf{v} . По аналогичен начин се доказва и оценка отдолу, т.e.

$$(3.4.27) \quad \lambda > \min_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \{ \min \lambda(\tilde{A}_{\varepsilon:11}^{(k)}) \}.$$

От (3.4.26) и (3.4.27) следва, че $\tilde{A}_{11}^{(k)}$ е положително определена и описаната по-горе техника за полиномиална апроксимация на обратната ѝ матрица е директно приложима.

Да разгледаме $P_{\nu}(\tilde{A}_{11}^{(k)})$, където $P_{\nu}(x)$ е полином на най-добро приближение на x^{-1} в L_{∞} норма върху интервала $\mathcal{S} = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, съдържащ всички собствени стойности на $\tilde{A}_{11}^{(k)}$. Неравенствата (3.4.26) и (3.4.27) не зависят от размерността на задачата, ето защо е достатъчно да намерим оценки λ_{\min} и λ_{\max} за собствените стойности на водещия диагонален блок за сравнително груба мрежа и да използваме един и същ интервал \mathcal{S} , а от там и един и същ полином $P_{\nu}(x)$, за всяко $k = 1, \dots, \ell$. Представените в останалата част от тази глава резултати са за $\mathcal{S} = [1.3, 10.55]$. На Фигура 3.5 се вижда поведението на грешката $P_{\nu}(x) - 1/x$ за степен на полинома $\nu \in \{2, 3, 4\}$. Във всички случаи се наблюдават $\nu + 2$ точки на алтернанс, което в съгласие с теория на апроксимациите характеризира полинома на най-добро приближение в L_{∞} норма.



Фигура 3.5: Поведение на грешката $P_{\nu}(x) - 1/x$ за степен на полинома $\nu \in \{2, 3, 4\}$

От избора на полинома $P_{\nu}(x)$, неравенствата (3.4.25) и Теорема 3.4.1 следва

$$1 - E(\nu)\lambda_{\max} \leq P_{\nu}(\tilde{A}_{11}^{(k)})\tilde{A}_{11}^{(k)} \leq 1 + E(\nu)\lambda_{\max}.$$

Тогава, следните неравенства са в сила

$$\mathbf{v}^T \tilde{A}_{11}^{(k)} \mathbf{v} \leq (1 + E(\nu) \lambda_{\max}) \mathbf{v}^T (P_\nu(\tilde{A}_{11}^{(k)}))^{-1} \mathbf{v} \leq \frac{(1 + E(\nu) \lambda_{\max})}{(1 - E(\nu) \lambda_{\max})} \mathbf{v}^T \tilde{A}_{11}^{(k)} \mathbf{v}.$$

Нека изберем

$$(3.4.28) \quad C_{11}^{(k)} = (1 + E(\nu) \lambda_{\max}) (P_\nu(\tilde{A}_{11}^{(k)}))^{-1}$$

за преобусловител на водещия диагонален блок $\tilde{A}_{11}^{(k)}$. В този случай за константата ξ в (1.3.79) получаваме

$$(3.4.29) \quad \xi = (1 + E(\nu) \lambda_{\max}) / (1 - E(\nu) \lambda_{\max}) - 1.$$

3.5 Числени експерименти

Целта на представените в тази глава експерименти е да бъдат изследвани свойствата на предложените техники за преобуславяне на граф-лапласиани с тегла. Изследваме поведението на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне за задачата

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

където граф-лапласианът A е получен за дискретизация в единичния квадрат $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ посредством равномерна мрежа от правоъгълни триъгълници с характерен размер h . По границата на областта са наложени хомогенни условия на Дирихле. Данните, представени в таблиците по-долу, са за брой итерации, необходими за достигане на относителна грешка $\|\mathbf{r}_{(n)}\| / \|\mathbf{r}_{(0)}\| \leq \epsilon$, където $\mathbf{r}_{(n)}$ е n -тият резидуал, вж. (1.2.43) в Алгоритъм 1.2.2. Разглеждаме нулева дясна част \mathbf{b} и случаен начално приближение в итерационния процес. Решение търсим за няколко случая на размерност n_ℓ на най-фината мрежа \mathcal{T}_ℓ , получена чрез $\ell = 1, \dots, 5$ на брой равномерни сгъстявания на начална триангулация \mathcal{T}_0 с характерен размер $h_0 = 1/16$, което отговаря на $n_0 = 512$ неизвестни. Броят степени на свобода може да се пресметне по формулата $n_\ell = 4^{\ell-1} \times 2048$, като най-голямата разглеждана размерност е $n_5 = 524288$.

		Брой итерации				
(s, q)	ϵ	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$
$(1, -0.5)$	10^{-3}	4	4	4	4	4
	10^{-6}	7	8	8	8	8
	10^{-9}	11	12	12	12	12
$(1, -0.1)$	10^{-3}	4	4	4	3	3
	10^{-6}	7	7	7	7	7
	10^{-9}	10	10	10	10	10

Таблица 3.1: Двунивов метод: брой итерации с метода на спрегнатия градиент с преобуславяне

3.5.1 Изследване свойствата на йерархичния базис

Като първа стъпка изследваме свойствата на предложеното в Раздел 3.3 йерархично разделяне на граф-лапласиан с тегла и поведението на съответния многонивов метод.

Конструираният AMLI преобусловител е рекурсивно обобщение на двунивов метод за двунивово разделяне, което има еднакви свойства на всяко ниво. Ето защо най-напред разглеждаме поведението на двунивов мултипликативен преобусловител основан на блочното представяне (3.3.21). Разглеждаме два случая на стойности на параметрите на йерархичното разделяне, $(s = 1, q = -0.5)$ и $(s = 1, q = -0.1)$. Както се вижда от Таблица 3.1, и за двете параметрични комбинации броят на итерациите в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне не зависи от размерността на задачата, а само от желаната относителна грешка ϵ , като зависимостта е пропорционална на $\ln(1/\epsilon)$. Тези резултати са в съответствие с Теорема 1.2.2.

Като следваща стъпка разглеждаме AMLI преобусловител със стабилизиращ полином от втора степен. За случая $\beta = 2$, коефициентите на полинома можем да пресметнем чрез формулите (1.3.80), в които участват оценка γ_{est} на константата γ в усиленото неравенство на КБШ, $\gamma \leq \gamma_{est}$, и константата ξ от

		Брой итерации					
$(s, q), \gamma_{est}^2$	ϵ	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$	$\ell = 6$
$(1, -0.5), 0.73$	10^{-3}	4	8	8	9	8	
	10^{-6}	7	16	18	19	18	
	10^{-9}	11	25	28	29	28	
$(1, -0.1), 0.58$	10^{-3}	4	4	4	4	4	
	10^{-6}	7	8	8	8	8	
	10^{-9}	10	11	12	11	11	

Таблица 3.2: W-цикъл, точно решаване на системите с водещия диагонален блок: брой итерации с метода на спрегнатия градиент с преобуславяне

неравенствата (1.3.79).

За експериментите обобщени в Таблица 3.2 използваме вътрешни итерации за да получим решение с голяма точност, което да ни позволя да приемам, че $\xi = 0$. И за двета случая на параметри на разделянето броят итерации се стабилизира, като за комбинацията с по-добра оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ това става по-рано и скоростта на сходимост е значително по-добра.

Разглеждаме също така и AMLI преобусловител, в който водещите блокове са апроксимирани с техни скалирани диагонални части $\tilde{D}_{11}^{(k)} = \alpha_D diag(\tilde{A}_{11}^{(k)})$. Факторът α_D е избран така, че $\mathbf{v}^T \tilde{A}_{11}^{(k)} \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^T \tilde{D}_{11}^{(k)} \mathbf{v}, \forall \mathbf{v}$, което ни позволява да пресметнем ξ в (1.3.79) и да използваме формулите (1.3.80). Както вече беше отбелязано, ξ е равномерно ограничено и не зависи от размерността на задачата. Пресмятаме го за сравнително груба мрежа и използваме получената стойност за определяне на коефициентите на стабилизиращия полином за всички нива. В представените експерименти използваме $\xi = 4.67$ за $(p = 1, q = -0.5)$ и $\xi = 6.2$ за $(p = 1, q = -0.1)$. Резултатите за съответните AMLI методи са показани в Таблица 3.3. Относителното число на обусловеност на AMLI преобусловителя се увеличава, когато системите с водещия диагонален блок не се решават точно.

		Брой итерации				
$(s, q), \gamma_{est}^2$	ϵ	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$
$(1, -0.5), 0.73$	10^{-3}	8	18	18	20	19
	10^{-6}	16	38	45	47	47
	10^{-9}	24	58	69	74	74
$(1, -0.1), 0.58$	10^{-3}	9	9	9	9	9
	10^{-6}	20	20	20	20	20
	10^{-9}	30	30	30	30	30

Таблица 3.3: W-цикъл, диагонална апроксимация на водещия диагонален блок: брой итерации с метода на спрегнатия градиент с преобуславяне

Това е причината за по-големия брой итерации в метода на спрегнатия градиент в Таблица 3.3 спрямо тези в Таблица 3.2.

Анализът на числените експерименти дават основание да се предположи, че бихме могли да подобрим метода за случая $(p = 1, q = -0.5)$, като използваме информация от направените тестове. Поведението на двунивовия преобусловител е добър практически индикатор за свойствата на дефинираното юерархично разделяне. Както се вижда от Таблица 3.1, методът на спрегнатия градиент с преобуславяне се държи по много подобен начин за двета случая на параметри на разделянето, което предполага, че и съответните разделяния имат близки свойства. Освен това, ако използваме $\gamma_{est}^2 = 0.73$ в (1.3.81), за да пресметнем приближена стойност на относителното число на обусловеност на AMLI метода за случая на $(s = 1, q = -0.5)$, съответната очаквана според (1.2.34) скорост на сходимост е по-добра от реално наблюдаваната в Таблици 3.2 и 3.3. Както вече беше споменато, качествата на стабилизиращия полином се влияят от точността на оценката γ_{est}^2 , с която се пресмятат коефициентите (1.3.80). Ето защо има основание да се допусне, че изведената оценка $\gamma_{est}^2 = 0.73$ е пессимистична за случая $(p = 1, q = -0.5)$ и вместо нея можем да използваме получената за случая $(p = 1, q = -0.1)$, т.e. $\gamma_{est}^2 = 0.58$. Представените в Таблица 3.4 резултати

		Брой итерации				
	ϵ	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$
$C_{11}^{(k)} = \tilde{A}_{11}^{(k)}$	10^{-3}	4	4	4	4	4
	10^{-6}	7	8	8	8	8
	10^{-9}	11	11	13	12	12
$C_{11}^{(k)} = \tilde{D}_{11}^{(k)}$	10^{-3}	8	9	9	9	9
	10^{-6}	16	19	19	19	19
	10^{-9}	24	28	28	29	29

Таблица 3.4: W-цикъл, ($s = 1, q = -0.5, \gamma_{est}^2 = 0.58$): брой итерации с метода на спрегнатия градиент с преобуславяне

са за AMLI преобусловител с коефициенти на стабилизиращия полином, които пресмятаме като използваме тази по-добра оценка. Както може да се види, методът на спрегнатия градиент се схожда и AMLI методът се стабилизира за по-малко итерации, като броят им съответства на оценката в Теорема 1.2.2.

3.5.2 Изследване свойствата на преобусловителя за водещия диагонален блок

Числените експерименти, които следват, имат за цел да илюстрират свойствата на предложението в тази глава полиномиален преобусловител за водещите диагонални блокове в йерархичното разделяне за граф-лапласиани. Резултатите в този раздел са за случая $s = 1, q = -0.1, \gamma_{est}^2 = 0.58$.

Забележка 3.5.1 За пресмятане на относителната грешка в експериментите в този раздел са използвани както векторната норма $\|\mathbf{r}_{(n)}\| = \mathbf{r}_{(n)}^T \mathbf{r}_{(n)}$, така и енергетичната норма на резидуалите, т.e. $\|\mathbf{r}_{(n)}\|_A = \mathbf{r}_{(n)}^T A \mathbf{r}_{(n)}$. Съществени разлики в броя на итерациите за двата случая не са наблюдавани, което е в съответствие с теорията за еквивалентност на нормите.

Предложената в тази глава конструкция за разглежданите системи гарантира, че матриците $C_{11}^{(k)}$ са симетрични положително определени при степени на полинома $\nu \geq 2$. За експериментите в Таблица 3.5 използваме стойността на ξ от (3.4.29) за пресмятане на коефициентите (1.3.80). Сходимостта при $\nu = 3$ и $\nu = 4$ е доста по-добра от тази за $\nu = 2$ и методът се стабилизира по-рано. Това е очакван резултат, тъй като $E(\nu)$ и съответната стойност за ξ са значително по-големи при $\nu = 2$. Важно е да отбележим, че ξ е мярка за това колко добре $C_{11}^{(k)}$ приближава $\tilde{A}_{11}^{(k)}$ и също така влияе в значителна степен на стабилизиращите свойства на полинома $Q_{\beta-1}$. Нека сравним резултатите в Таблица 3.5 с тези в Таблица 3.3. Преобусловител с диагонална апроксимация на $\tilde{A}_{11}^{(k)}$, за който $\xi = 6.2$, води до по-малък брой итерации от преобусловител с полиномиална апроксимация от степен $\nu = 2$, където $\xi = 9.166$. От друга страна, когато блокът $\tilde{A}_{11}^{(k)}$ е преобусловен с матричен полином от степен $\nu = 3$ или $\nu = 4$, ξ е значително по-малко, съответно и итерациите намаляват, като броят им не е много по-голям от този в Таблица 3.2 за случая на точно решаване на системите с водещия диагонален блок.

			Брой итерации					
ν	ξ	ϵ	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$	
2	9.166	10^{-3}	8	12	13	13	13	
		10^{-6}	14	26	28	28	28	
		10^{-9}	21	40	43	43	44	
3	1.303	10^{-3}	5	6	6	6	6	
		10^{-6}	10	11	11	11	11	
		10^{-9}	15	17	17	17	17	
4	0.467	10^{-3}	4	5	6	5	6	
		10^{-6}	8	11	11	11	11	
		10^{-9}	12	16	16	16	16	

Таблица 3.5: W-цикъл, полиномиална апроксимация от степен ν за $\tilde{A}_{11}^{(k)}$

Полиномът P_ν в апроксимацията (3.4.28) за водещите диагонални блокове в предложението AMLI преобусловител е постоянен, като по този начин се осигурява линейността на процеса и ортогоналността на направленията на търсене в Алгоритъм 1.2.2 се запазва. Правим също така сравнение с многонивов преобусловител, при който вместо полиномиалната апроксимация за намиране на приближено решение на системите с водещите диагонални блокове, използваме няколко вътрешни итерации с метода на спрегнатия градиент. Подобни експерименти имат няколко специфични особености. Методът на спрегнатия градиент се адаптира автоматично, за да намери най-доброто приближено решение за дадена дясна част, но това означава, че действието на матричния полином, който съответства на определен брой вътрешни итерации, се променя на всяка външна итерация на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне. По този начин линейността на AMLI метода се разваля. В такъв случай вместо метод на спрегнатия градиент с преобуславяне се налага да се използва обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне. Както вече беше отбелязано, вж. Забележка 1.2.1, допълнително наложената ортогоналност се постига на цената на повече използвани компютърни ресурси. При експериментите, обобщени в Таблица 3.6, предполагаме, че за случая на ν на брой вътрешни итерации за водещите диагонални блокове можем да използваме същата оценка за ξ , която сме намерили за случая на полиномиална апроксимация от степен ν . В таблиците използваме символа * за да отбележим случаите, в които методът на спрегнатия градиент с преобуславяне не се схожда в рамките на 300 итерации. Както се вижда от Таблица 3.6, преобусловителите с описаната по-горе конструкция с вътрешни итерации чрез метода на спрегнатия градиент не водят до добри резултати, не се наблюдава стабилизация, а в някои случаи процесът не се схожда.

Експериментите, представени в Таблици 3.7 и 3.8 са мотивирани от направени в множество различни числени експерименти наблюдения, вж. още [47, 60]. Оказва се, че използването на $\xi = 0$ при пресмятане на коефициентите (1.3.80) за предложението AMLI метод не влошава сходимостта, а напротив, в този слу-

			Брой итерации					
ν	ξ	ϵ	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$	
3	1.303	10^{-3}	6	9	10	10	10	
		10^{-6}	14	*	*	*	29	
		10^{-9}	23	*	*	48	*	
4	0.467	10^{-3}	5	6	7	7	7	
		10^{-6}	10	21	25	25	15	
		10^{-9}	16	44	*	45	24	

Таблица 3.6: W-цикъл, $(\tilde{A}_{11}^{(k)})^{-1}$ се приближава чрез прилагане на ν на брой вътрешни итерации с метод на спрегнатия градиент

			Брой итерации					
ν	ϵ		$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$	
2	10^{-3}		8	8	8	8	8	
	10^{-6}		14	15	15	15	15	
	10^{-9}		21	22	22	22	22	
3	10^{-3}		5	5	5	6	6	
	10^{-6}		10	10	11	11	11	
	10^{-9}		15	16	16	16	16	
4	10^{-3}		4	5	5	5	5	
	10^{-6}		8	9	9	9	9	
	10^{-9}		12	13	13	13	13	

Таблица 3.7: W-цикъл, при пресмятане на (1.3.80) е използвано $\xi = 0$, $\tilde{A}_{11}^{(k)}$ се априксимира с полином от степен ν

чай стабилизация се достига по-бързо, когато за водещите диагонални блокове прилагаме полиномиална априксимация. Резултатите в Таблица 3.8 показват по-добро поведение на преобусловителя от тези в Таблица 3.6. Въпреки това полиномиалната априксимация на $\tilde{A}_{11}^{(k)}$ води до много по-добър (по-стабилен)

		Брой итерации				
ν	ϵ	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$
3	10^{-3}	6	6	11	8	*
	10^{-6}	14	34	36	22	19
	10^{-9}	23	71	79	78	36
4	10^{-3}	5	6	6	6	7
	10^{-6}	10	18	12	12	10
	10^{-9}	16	31	32	19	18

Таблица 3.8: W-цикъл, при пресмятане на (1.3.80) е използвано $\xi = 0$, $(\tilde{A}_{11}^{(k)})^{-1}$ се приближава чрез прилагане на ν на брой вътрешни итерации с метод на спрегнатия градиент

алгоритъм.

Глава 4

Многонивови методи за уравненията на Навие-Стокс

Тази глава е посветена на конструиране на ефективни алгоритми за намиране на числено решение на нестационарната система от уравнения на Навие-Стокс, описващи течение на несвиваем флуид. Резултатите, представени тук, демонстрират приложение на предложените в Глава 2 и Глава 3 многонивови методи в една от важните приложни области на изчислителната математика и механика, а именно, численото изследване на динамика на флуидите.

В работата по дисертацията за първи път е предложен устойчив съставен алгоритъм, основан на многонивови техники за преобуславяне, който осигурява оптимална сложност на числения метод. Използваме устойчива локално консервативна крайно-елементна дискретизация, като реализацията на алгоритъма гарантира запазването на локалната консервативност. Методът, предложен в следващите раздели, се основава на многонивово преобуславяне на системите, възникващи на конвективно-дифузионната и проекционната стъпки в проекционен алгоритъм за нестационарните уравнения на Навие-Стокс.

Представените резултати са публикувани в:

- P. Boyanova, S. Margenov, *On Multilevel Iterative Methods for Navier-Stokes Problems*, Journal Of Theoretical And Applied Mechanics, Vol. 40, Number 1,

2010, 51–60.

- P. Boyanova, S. Margenov, *On Optimal AMLI Solvers for Incompressible Navier-Stokes Problems*, AIP Conference Proceedings vol. 1301, 457-467.

4.1 Уравнения на Навие-Стокс: постановка на задачата и проекционен метод

Разглеждаме нестационарната система от уравнения на Навие-Стокс с гранични условия на Дирихле

$$(4.1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times (0, T), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \{0\}, \end{aligned}$$

където \mathbf{u} и p са неизвестните функции на скоростта и налягането, Re е числото на Рейнолдс, а Ω е ограничена и свързана област в \mathbb{R}^2 , $\Gamma = \partial\Omega$.

Един подход за намиране на приближено решение на (4.1.1), е да се използват методи, при които се решава свързаната дискретна система за скоростите и налягането, получена след апроксимация по времето и пространството на уравненията на Навие-Стокс. Устойчивите дискретизации на задачата в тази постановка изискват крайни елементи от по-висок ред. Матрицата на свързаната система е несиметрична и от тип седлова точка, като тази трудност може да бъде преодоляна чрез методи, изследвани напр. в [54].

В дисертацията разглеждаме различна техника за числено решаване на (4.1.1), която използва така наречения проекционен подход, при който вместо свързана система, на всяка стъпка по времето се разглеждат отделни задачи за скоростите и налягането. Проекционните методи за първи път са предложени от Temam и Chorin, вж [75] и [42]. Подходът се основава на представянето

на L^2 - векторни полета като директна сума на бездивергентни полета и полета с нулева ротация (вж. напр. [48]).

Много от съществуващите проекционни методи използват непрекъснато приближение за налягането, като в този случай на проекционната стъпка трябва да се реши уравнение на Поасон, вж. напр. [51, 52]. Въпреки, че няма изискване за непрекъснатост на приближението, не са много изследванията, в които налягането се апроксимира чрез неконформни крайни елементи, а уравнението за налягането се разглежда в смесена форма. Основното предимство на неконформните елементи е, че те са локално консервативни. В дисертацията за апроксимация на неизвестните на скоростите \mathbf{u} използваме неконформни линейни крайни елементи на Крозе-Равиар. Едно важно предимството на тези елементи е, че дивергенцията на полето на скоростите е нула във вътрешността на всеки елемент. Неизвестното налягане p търсим в пространството от на части константни функции. Този избор води до устойчива, локално консервативна дискретизация, вж. напр. [43] и [25].

Нека \mathcal{T}_h е равномерно разделяне на областта Ω с афинни триъгълници и характерен размер h . Разглеждаме пространството на Крозе-Равиар от на части линейни функции \mathcal{V}_h и пространството от на части константи Q_h , дефинирани като

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h = & \{ \mathbf{v}_h \in (L^2(\Omega))^2, \mathbf{v}_h|_e \in (P_1(e))^2 \quad \forall e \in \mathcal{T}_h, \\ & \mathbf{v}_h \text{ е непрекъсната в средите на страните на } \forall e \in \mathcal{T}_h \} \end{aligned}$$

$$(4.1.2) \quad Q_h = \{ q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_e \in P_0(e) \quad \forall e \in \mathcal{T}_h, \int_{\Omega} q_h = 0 \}$$

За дискретизация по времето използваме неявен метод на Ойлер със стъпка Δt .

Разглежданият в дисертацията проекционен алгоритъм се дефинира по следния начин:

При предположение, че $\mathbf{u}_h^0 \in \mathcal{V}_h$ и $p_h^0 \in Q_h$ са дадени подходящи приближения (интерполанти) на началната скорост и налягане, за всяка стъпка по времето $0 \leq m \leq T/\Delta t$ се решават задачите:

- *Конвективно-дифузационна стъпка:*

Да се намери $\widehat{\mathbf{u}}_h^{m+1} \in (V_h)^2$ така че за всяко $\mathbf{v}_h \in (V_h)^2$

$$(4.1.3) \quad \left(\frac{\widehat{\mathbf{u}}_h^{m+1} - \mathbf{u}_h^m}{\Delta t}, \mathbf{v}_h \right) + ((\mathbf{u}_h^m \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^m, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{Re} (\nabla \widehat{\mathbf{u}}_h^{m+1}, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h^m, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) = 0$$

Границните условия, които трябва да се наложат на тази стъпка, са дефинираните за задачата (4.1.1).

- *Проекционна стъпка:*

Да се намерят $\mathbf{u}_h^{m+1} \in (V_h)^2$ и $p_h^{m+1} \in Q_h$ така че

$$(4.1.4) \quad \begin{aligned} (\mathbf{u}_h^{m+1} - \widehat{\mathbf{u}}_h^{m+1}, \mathbf{v}_h) &= (p_h^{m+1} - p_h^m, \nabla \cdot \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in (V_h)^2 \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{m+1}, q_h) &= 0, \quad \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

За да се осигури проекция върху бездивергентното подпространство, на тази стъпка налагаме гранично условие $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, където \mathbf{n} е нормалния вектор към границата.

4.2 Съставен многонивов метод

Проекционната схема, представена в Раздел 4.1, разделя нелинейната система на Навие-Стокс на две линейни подзадачи. В дисертацията предлагаме съставен алгоритъм, при който за всяка от тях се прилага оптимално многонивово преобуславяне, което води до обща оптимална ефективност на метода.

Да разгледаме дискретизацията на задачите (4.1.3) и (4.1.4) в слаба форма. Означаваме с $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ средите на страните на триъгълните крайни елементи $\{e_k\}_{k=1}^n$ от триангуляцията \mathcal{T}_h . Нека $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ са възвловите базисни функции на Крозе-Равиар, $\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$, а $\{q_k\}_{k=1}^n$ са базисните функции на пространството на части константи върху \mathcal{T}_h , $q_k(\mathbf{y}) = \delta_{kl}$, $\mathbf{y} \in e_l$. Приближения за неизвест-

ните функции на скоростите и налягането търсим във вида

$$(4.2.5) \quad \begin{aligned} \widehat{\mathbf{u}}_h^{m+1} &= (\widehat{u}_{1,h}^{m+1}, \widehat{u}_{2,h}^{m+1}) = \left(\sum_{j=1}^N \widehat{u}_{1,h,j}^{m+1} \phi_j, \sum_{j=1}^N \widehat{u}_{2,h,j}^{m+1} \phi_j \right), \\ \mathbf{u}_h^{m+1} &= (u_{1,h}^{m+1}, u_{2,h}^{m+1}) = \left(\sum_{j=1}^N u_{1,h,j}^{m+1} \phi_j, \sum_{j=1}^N u_{2,h,j}^{m+1} \phi_j \right), \\ p_h^{m+1} &= \sum_{k=1}^n p_{h,k}^{m+1} q_k. \end{aligned}$$

Както вече беше отбелоязано в Глава 3, за да са в сила векторни равенства като (4.1.3) и (4.1.4) за всеки вектор $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$, достатъчно е да осигурим изпълнението им за $\forall \mathbf{v}_h = (\phi_i, 0)$ и $\forall \mathbf{v}_h = (0, \phi_i)$, $i = 1, \dots, N$.

Заместваме (4.2.5) в (4.1.3), прехвърляме известните членове в дясната част, и за $\mathbf{v}_h = (\phi_i, 0)$, $i = 1, \dots, N$ получаваме следните уравнения на конвективно-дифузационната стъпка

$$(4.2.6) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \widehat{u}_{1,h,j}^{m+1} \phi_j \phi_i + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \widehat{u}_{1,h,j}^{m+1} \nabla \phi_j \nabla \phi_i \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_{1,h,j}^m \phi_j \phi_i + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} p_k^m q_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ &- \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \left(\sum_{s=1}^N u_{1,h,s}^m \phi_s \right) u_{1,h,j}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \left(\sum_{s=1}^N u_{2,h,s}^m \phi_s \right) u_{1,h,j}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \phi_i \end{aligned}$$

Аналогично за $\mathbf{v}_h = (0, \phi_i)$, $i = 1, \dots, N$ получаваме уравненията

$$(4.2.7) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \widehat{u}_{2,h,j}^{m+1} \phi_j \phi_i + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \widehat{u}_{2,h,j}^{m+1} \nabla \phi_j \nabla \phi_i \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_{2,h,j}^m \phi_j \phi_i + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} p_k^m q_k \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ &- \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \left(\sum_{s=1}^N u_{1,h,s}^n \phi_s \right) u_{2,h,j}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \left(\sum_{s=1}^N u_{2,h,s}^n \phi_s \right) u_{2,h,j}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \phi_i \end{aligned}$$

Следователно на конвективно-дифузионната стъпка (4.1.3) в проекционния алгоритъм трябва да се решат две независими задачи,

$$(4.2.8) \quad A_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}}_{1,h}^{m+1} = \mathbf{b}_1^{m+1}, \quad A_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}}_{2,h}^{m+1} = \mathbf{b}_2^{m+1},$$

за векторите на двете компоненти на скоростта, $\hat{\mathbf{u}}_{1,h}^{m+1} = \{\hat{u}_{1,h,i}^{m+1}\}_{i=1}^N$ и $\hat{\mathbf{u}}_{2,h}^{m+1} = \{\hat{u}_{2,h,i}^{m+1}\}_{i=1}^N$. Структурата на матриците на системите на двете задачи е една и съща (с точност до допълнително наложени гранични условия) и има следния вид

$$(4.2.9) \quad A_{\mathbf{u}} = \frac{1}{\Delta t} M + \frac{1}{Re} K,$$

където с M и K са означени съответно матрицата на маса и матрицата на коравина за неконформните крайни елементи на Крозе-Равиар. Десните части \mathbf{b}_1^{m+1} и \mathbf{b}_2^{m+1} зависят от намерените на предходна стъпка по времето приближени решения за скоростите \mathbf{u}_h и налягането p_h , като видът им следва от (4.2.6) и (4.2.7).

Като използваме представянето (4.2.5), на проекционната стъпка (4.1.4) за $\mathbf{v}_h = (\phi_i, 0), i = 1, \dots, N$ получаваме уравненията

$$(4.2.10) \quad \begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_{1,h,j}^{m+1} \phi_j \phi_i - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} p_k^{m+1} q_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \hat{u}_{1,h,j}^{m+1} \phi_j \phi_i - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} p_k^m q_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \end{aligned}$$

а за $\mathbf{v}_h = (0, \phi_i), i = 1, \dots, N$, съответно

$$(4.2.11) \quad \begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_{2,h,j}^{m+1} \phi_j \phi_i - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} p_k^{m+1} q_k \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \hat{u}_{2,h,j}^{m+1} \phi_j \phi_i - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} p_k^m q_k \frac{\partial \phi_i}{\partial y}. \end{aligned}$$

Допълнително за всяко $q_k, k = 1, \dots, n$ трябва да са изпълнени равенствата

$$-\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_{1,h,j}^{m+1} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} q_k - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_{2,h,j}^{m+1} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} q_k = 0.$$

Следователно, на проекционната стъпка (4.1.4) трябва да се реши дискретната задача

$$(4.2.12) \quad P\mathbf{w}_h^{m+1} = \mathbf{b}_p^{m+1},$$

където $(\mathbf{w}_h^{m+1})^T = \{(\mathbf{u}_{1,h}^{m+1})^T, (\mathbf{u}_{2,h}^{m+1})^T, (\mathbf{p}_h^{m+1})^T\}$, $\mathbf{p}_h^{m+1} = \{p_{h,k}^{m+1}\}_{k=1}^n$, а матрицата на системата е във вида (3.1.6), а именно

$$P = \begin{bmatrix} M & & B_1 \\ & M & B_2 \\ B_1^T & B_2^T \end{bmatrix}.$$

Дясната част \mathbf{b}_p^{m+1} зависи от намерените на конвективно-дифузионната стъпка стойности на $\widehat{\mathbf{u}}_h^{m+1}$ и налягането от предходна стъпка по времето \mathbf{p}_h^m .

За решаване на дискретните системи (4.2.8) и (4.2.12) прилагаме многонивовите преобусловители, представени съответно в Глава 2 и Глава 3, като в резултат получаваме съставен многонивов метод за нестационарните уравнения на Навие-Стокс. Нека $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell$ е последователност от вложени триангулации, получени чрез равномерно сгъстяване на първоначалната мрежа \mathcal{T}_0 . На всяка стъпка по времето $0 \leq m \leq T/\Delta t$ разглеждаме дискретните системи, съответстващи на най-фината мрежа \mathcal{T}_ℓ .

- *Конвективно-дифузионна стъпка:*

За двете независими задачи (4.2.8) от параболичен тип за компонентите на скоростта използваме предложените в Глава 2 робастни AMLI преобусловители за параболични задачи, дискретизирани с крайни елементи на Крозе-Равиар. Напомняме, че в този случай оценката за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне е равномерно ограничена и не зависи от нивото на сгъстяване на мрежата, т.е. не зависи от мрежовия параметър h_ℓ , или мрежовата анизотропия на първоначалната мрежа \mathcal{T}_0 .

Експериментите в Раздел 2.6 (вж. още [32]) показват, че FR методът за параболични задачи има по-добра сходимост от тази при използване на

DA преобусловител. Оптималност на AMLI метода за DA преобуславяне се гарантира теоретично при стабилизация с полином от степен $\beta = 3$, но в дисертацията показваме, че на практика оптimalен (или почти оптимален) ред на сходимост се наблюдават и за NLAMLI метод с $\beta = 2$, както за DA, така и за FR преобуславяне.

- *Проекционна стъпка:*

На проекционната стъпка трябва да се реши система със седлова точка, получена чрез дискретизация на смесена задача като тази, разгледана в Глава 3. Матрицата на масата за крайни елементи на Крозе-Равиар е диагонална и изключването на неизвестните на скоростите може да се извърши точно, като по този начин локалната консервативност на дискретизацията се запазва. Редуцираната задача за неизвестните на налягането има симетрична и положително полуопределенна матрица A_p със структура на граф-лапласиан с тегла в следния вид

$$(4.2.13) \quad A_p = B_1^T M^{-1} B_1 + B_2^T M^{-1} B_2.$$

В съставния алгоритъм за уравненията на Навие-Стокс използваме преобусловителя за системи от този вид, описан в Глава 3. Изведената там оценка за константата в усиленото неравенство на КБШ за предложеното йерархично разделяне на граф-лапласиан с тегла е в сила за равномерна мрежа от правоъгълни триъгълници.

Приближено решение на функцията на налягането на проекционната стъпка търсим в Q_h , вж. (4.1.2). Налагането на условието

$$(4.2.14) \quad \int_{\Omega} q_h = 0$$

за пространството Q_h не е тривиално. Вместо това, в предложния алгоритъм условието се налага директно върху решението r_h , вж. напр. [68]. За целта като първа стъпка в A_p налагаме хомогенно условие на Дирихле за някоя от компонентите на вектора на налягането. В резултат получаваме симетрична положително определена матрица \tilde{A}_p , която използваме,

за да пресметнем вектор $\tilde{\mathbf{p}}_h$, който съвпада с \mathbf{p}_h с точност до константа.

Като втора стъпка налагаме интегралното условие (4.2.14), за да намерим p_h . Използваме следното свойство

$$0 = \int_{\Omega} p_h = \int_{\Omega} (\tilde{p}_h + c_p) = \int_{\Omega} \tilde{p}_h + \int_{\Omega} c_p.$$

Константата c_p се намира по формулата

$$(4.2.15) \quad c_p = -\frac{\int_{\Omega} \tilde{p}_h}{\int_{\Omega} 1}.$$

Нека триангулацията \mathcal{T}_{ℓ} е получена чрез последователност от равномерни сгъстявания на мрежа от правоъгълни триъгълници \mathcal{T}_0 , а $A_{\mathbf{u}}, M, B_1, B_2, A_p, C_{\mathbf{u}}, C_p$ са матриците и съответните многонивови преобусловители за триангулацията \mathcal{T}_{ℓ} . Съставният метод за нестационарните уравнения на Навие-Стокс води до следния алгоритъм.

Алгоритъм 4.2.1 [Съставен многонивов алгоритъм за нестационарните уравнения на Навие-Стокс]

$m = 0$; Инициализират се \mathbf{u}_h^m и \mathbf{p}_h^m ;

while ($m \leq T/\Delta t$) **do**

Пресмятат се \mathbf{b}_1^{m+1} и \mathbf{b}_2^{m+1} според (4.2.6) и (4.2.7);

Прилага се обобщен метод на спрегнатия градиент с преобусловител

$C_{\mathbf{u}}$ за решаване на системите:

$$(4.2.16) \quad A_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}}_{1,h}^{m+1} = \mathbf{b}_1^{m+1},$$

$$(4.2.17) \quad A_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}}_{2,h}^{m+1} = \mathbf{b}_2^{m+1};$$

Пресмятат се $\mathbf{b}_{p,1}^{m+1}$ и $\mathbf{b}_{p,2}^{m+1}$ според (4.2.10) и (4.2.11);

Пресмята се $\tilde{\mathbf{b}}_p^{m+1} = B_1^T M^{-1} \mathbf{b}_{p,1}^{m+1} + B_2^T M^{-1} \mathbf{b}_{p,2}^{m+1}$;

Прилага се метод на спрегнатия градиент с преобусловител

C_p за решаване на системата:

$$(4.2.18) \quad \tilde{A}_p \tilde{\mathbf{p}}_h^{m+1} = \tilde{\mathbf{b}}_p^{m+1};$$

Пресмята се $\mathbf{p}_h^{m+1} = \tilde{\mathbf{p}}_h^{m+1} - c_p$, където c_p има вида (4.2.15);

$$\mathbf{u}_{1,h}^{m+1} = M^{-1} \mathbf{b}_{p,1}^{m+1} - M^{-1} B_1 \mathbf{p}_h^{m+1};$$

$$\mathbf{u}_{2,h}^{m+1} = M^{-1} \mathbf{b}_{p,2}^{m+1} - M^{-1} B_2 \mathbf{p}_h^{m+1};$$

$$m = m + 1;$$

end

На всяка стъпка в Алгоритъм 4.2.1 се изпълняват $\mathcal{O}(N)$ операции, като по този начин общата изчислителна сложност на съставния метод за нестационарните уравнения на Навие-Стокс е от оптимален порядък.

4.3 Числени експерименти

Илюстрираме поведението на Алгоритъм 4.2.1 върху задачата за течение, породено от движение на безкраен капак по повърхността на контейнер пълен с флуид. В литература на английски език в областта на динамика на флуидите, тази задача е известна като lid-driven cavity flow. Разглеждаме течението в двумерно сечение на контейнера, а задачата се дефинира както следва:

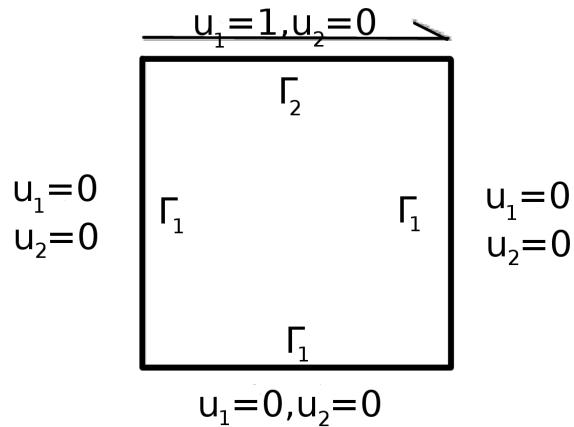
Да се решат уравненията (4.1.1) в областта $\Omega = [0, 1]^2$, със следните граничните условия:

$$(4.3.19) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= 0, \quad \mathbf{u}_2 = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_1 \times (0, T), \\ \mathbf{u}_1 &= 1, \quad \mathbf{u}_2 = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_2 \times (0, T), \end{aligned}$$

където $\Gamma_1 = \{(0, y), y \in (0, 1)\} \cup \{(1, y), y \in (0, 1)\} \cup \{(x, 0), x \in (0, 1)\}$, $\Gamma_2 = \{(x, 1), x \in (0, 1)\}$. Равенствата (4.3.19), вж. Фигура 4.1, означават, че по стените на контейнера от Γ_1 има условие за непротичане и прилепване, а скоростта на капака е константна. Началното условие за полето на скоростите е

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}.$$

Фигура 4.1: Границни условия за уравненията на Навие-Стокс



Разглеждаме три случая на число на Рейнолдс, $Re = 100$, $Re = 400$ и $Re = 1000$.

Целта на проведените експерименти е да се анализира сходимостта на многонивовите методи, приложени на стъпки (4.2.16), (4.2.17) и (4.2.18) в рамките на съставния Алгоритъм 4.2.1. При решаването на параболичните задачи (4.2.16) и (4.2.17), използваме NLAMLI алгоритъм със стабилизация с $\beta = 2$

Бр. рафинирания ℓ	$IT(\hat{\mathbf{u}}_1)$	$IT(\hat{\mathbf{u}}_2)$	$IT(\mathbf{p})$
Среден брой итерации			
1	5	4.95	16.81
2	7	6.93	17.99
3	8.97	7.92	18.09
4	9.91	8.91	18.26

Таблица 4.1: Поведение на съставния многонивов метод, $Re = 100$

Бр. рафинирания ℓ	$IT(\widehat{\mathbf{u}}_1)$	$IT(\widehat{\mathbf{u}}_2)$	$IT(\mathbf{p})$
Среден брой итерации			
1	4	3.96	16.52
2	5	4.95	17.97
3	7	6.93	18.07
4	8.96	7.92	18.25

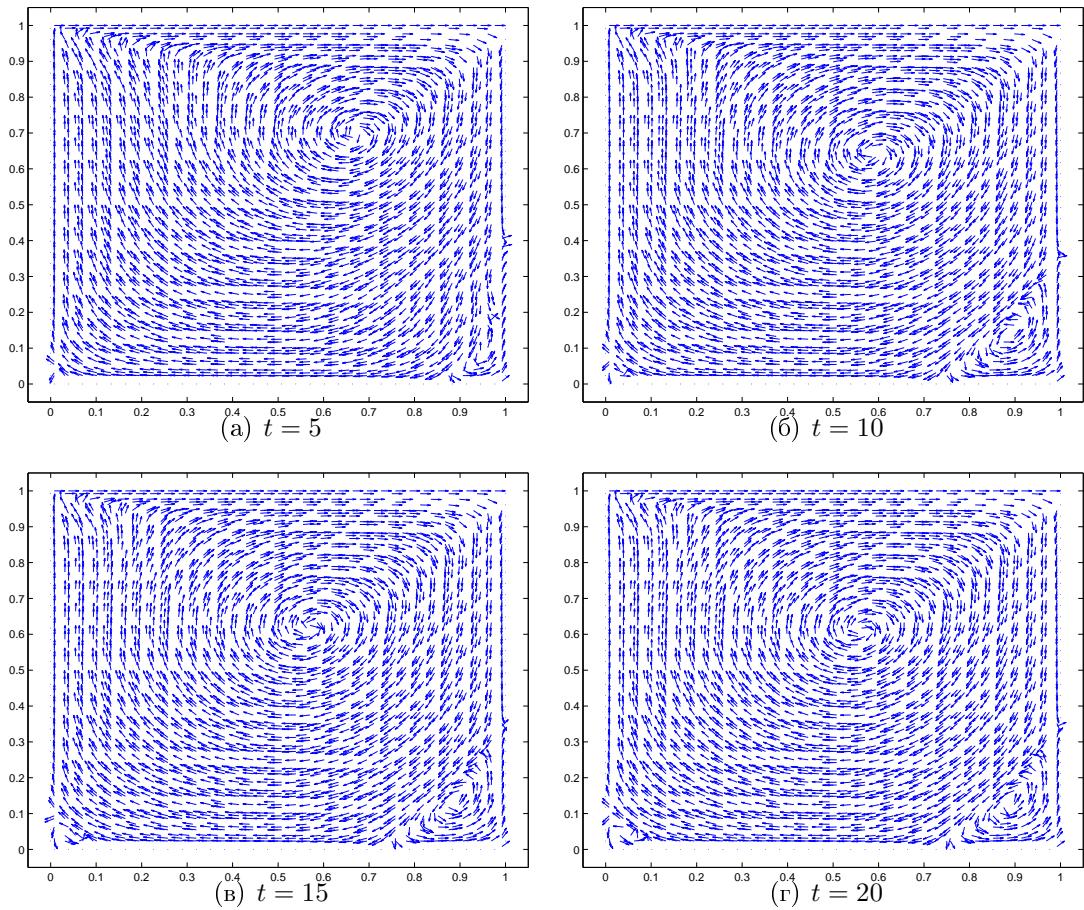
Таблица 4.2: Поведение на съставния многонивов метод, $Re = 400$

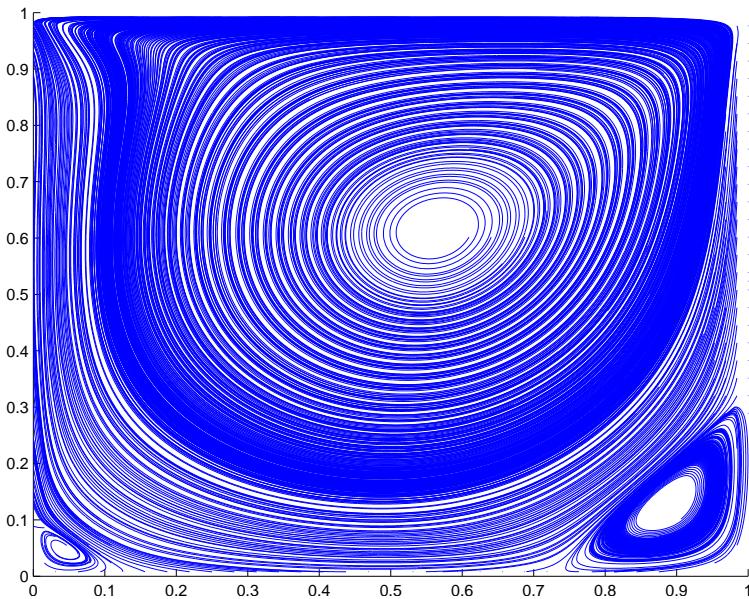
Бр. рафинирания ℓ	$IT(\widehat{\mathbf{u}}_1)$	$IT(\widehat{\mathbf{u}}_2)$	$IT(\mathbf{p})$
Среден брой итерации			
1	3	2.97	16.52
2	4	3.96	17.93
3	5.97	4.95	18.02
4	7.07	6.93	18.26

Таблица 4.3: Поведение на съставния многонивов метод, $Re = 1000$

вътрешни итерации и FR преобусловител. В този случай за приближено решаване на системите с водещите диагонални блокове използваме три вътрешни итерации с метод на спрегнатия градиент с описания в Раздел 2.3 преобусловител. За задачата (4.2.18) прилагаме метод на спрегнатия градиент с многонивов преобусловител за граф-лапласиана \tilde{A}_p , основан на разделянето, предложено в Раздел 3.3, и стабилизация с полином от втора степен. Полиномът P_ν , с който апроксимираме обратните матрици на водещите диагонални блокове в юрархичното разделяне на тази стъпка, е от трета степен. Представените числени резултати илюстрират поведението на многонивовите алгоритми в случаите на първоначална груба мрежа с характерен размер $h_0 = 1/16$ и най-фина мрежа, получена за ℓ на брой рафинирания, $\ell = 1, 2, 3, 4$. Размерността N_ℓ на всяка една от компонентите на вектора на скоростите, е съответно $N_1 = 3136, N_2 = 12416, N_3 = 49408, N_4 = 197120$. За начално приближение в итерационния метод използваме решението на предходна стъпка по времето,

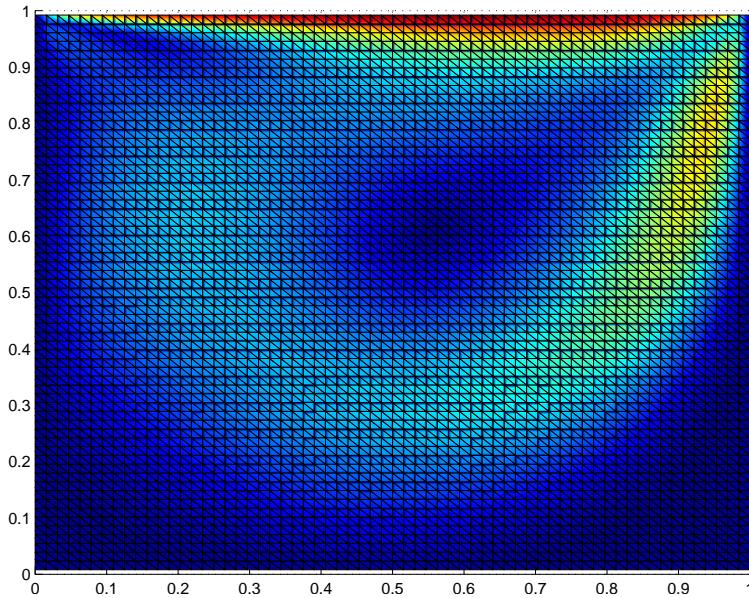
Фигура 4.2: Векторно поле на скоростите при число на Рейнолдс $Re = 400$. Изобразени са решенията за различно време t



Фигура 4.3: Поле на вихъра, $Re = 400$, $t = 20$ 

като $\Delta t = 0.005$. Итерациите в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне и обобщения метод на спрегнатия градиент с преобуславяне, при решаване на системите в съставния алгоритъм, прекратяваме при достигане на относителна точност 10^{-9} . Основна цел на числения анализ е да се сравни сходимостта за трите различни разглеждани случая на число на Рейнолдс. Ето защо използваме еднакви параметри на дискретизацията и на съставния алгоритъм за $Re = 100$, $Re = 400$ и $Re = 1000$, като те са съобразени със случая на $Re = 1000$. Както е известно, поради по-силно изразената динамика на течения с големи числа на Рейнолдс, в тези случаи стъпките по пространство и време, както и постигнатата в итерационните методи относителна грешка, трябва да са достатъчно малки.

В Таблици 4.1-4.3 са представени среден брой итерации на стъпка по времето, за общо сто стъпки по времето. С $IT(\hat{\mathbf{u}}_1)$ и $IT(\hat{\mathbf{u}}_2)$ сме означили средния брой итерации, необходими за достигане на желаната точност, при решаване на задачите (4.2.16) и (4.2.17) за компонентите на скоростта $\hat{\mathbf{u}}_1$ и $\hat{\mathbf{u}}_2$ на конвективно-дифузионната стъпка в проекционния метод. Средният брой ите-

Фигура 4.4: Норма на векторите от полето на скоростите, $Re = 400$, $t = 20$ 

рации при решаване на задача (4.2.18) за налягането е означен с $IT(\mathbf{p})$.

В съответствие с теоретичните оценки, при решаването на задачите (4.2.17) и (4.2.18) прилагането на $\beta = 2$ вътрешни итерации в NLAMLI алгоритъма не осигурява пълна стабилизация на общия брой итерации. Въпреки това, разликата в сходимостта за различни размерности на задачата е незначителна, като броя на итерациите се увеличава с не повече от две за последователни нива на рафиниране. Ето защо използването на $\beta = 2$ в NLAMLI метода, вместо изчислително по-скъпия случай $\beta = 3$, е оправдано. Както се вижда в Таблици 4.1-4.3, броят итерации при решаване на параболичните задачи е по-малък при по-големи числа на Рейнолдс. Обяснение на този факт е по-силната диагонална доминация на съответните матрици. Итерациите, необходими за постигане на желаната точност при решаването на (4.2.18) на проекционната стъпка в съставния алгоритъм, са повече от итерациите на конвективно-дифузионната стъпка. Трябва да отбележим, обаче, че размерността n на системите за налягането е по-малка от размерността N на системите за скоростите, като $N > 1.5n$.

Броят на итерациите при решаването на задача (4.2.18), както и наблюдаваната в този случай стабилизация, съответстват на теоретичните и числени резултати в Глава 3.

Получените резултати за приближеното решение на уравненията на Навие-Стокс в случая на $Re = 400$ са илюстрирани чрез Фигури 4.2 – 4.4. На Фигура 4.2 е показано скалираното векторно поле за различни стъпки по времето, с цел да се демонстрира изменението на профила на течението. При $t = 5$ се наблюдава завихряне в левия долн ъгъл на контейнера. При $t = 10$ в десния долн ъгъл се оформя още един вихър, който се доразвива при $t = 15$ и $t = 20$. На Фигура 4.3 е представена друга визуализация на течението при $t = 20$, този път чрез полето на вихъра. Стойностите на нормата на векторите от полето на скоростите на последната стъпка по времето са показани на Фигура 4.4. Както се вижда, скоростта е най-голяма близо до капака.

Заключение

Представените в дисертацията резултати са в областта на създаване на ефективни методи и алгоритми за решаване на системи от линейни алгебрични уравнения, възникващи при дискретизация на частни диференциални уравнения.

Разгледани са класове дискретни задачи, получени при прилагане на МКЕ с неконформни крайни елементи. Интересът към този вид елементи е мотивиран от някои техни предимства за класове задачи, в това число осигурените устойчивост и локална консервативност на получените апроксимации. По-малко изучени от конформния случай, неконформните крайни елементи предизвикват все по-голям интерес и развитие в последните години. Това води до необходимост от създаване и анализ на техники и общи подходи за решаване на съответните алгебрични системи.

В дисертацията разглеждаме оптимални алгоритми, основани на използването на многонизови преобусловители в метода на спрегнатия градиент. Оптималните методи, конструирани с помощта на последователност от вложени мрежи, са се утвърдили като предпочитан инструмент при решаване на системи с разредени матрици. Въпреки активните изследвания в областта, този вид техники все още не са достатъчно развити за редица важни класове задачи. Предизвикателство представляват и дискретизацията с неконформни елементи. При тях крайно-елементните пространства, съответстващи на последователност от триангулации, не са вложени, което води до допълнителни трудности в разработването на подходящи йерархични преобусловители.

Основни научни приноси

1. Изследван е многонивов метод за двумерни линейни параболични задачи, дискретизирани с неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар. Получена е нова равномерна оценка за константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц за йерархично разделяне чрез DA метод за матрицата на масата. Направено е обобщение на получения резултат и са предложени два подхода за конструиране на оптимални многонивови преобусловители основани на DA разделяне на матрицата на дискретизираната параболична задача.
2. Получена е характеризация на робастни многонивови методи за параболични задачи, дискретизирани с конформни елементи на Курант и неконформни линейни елементи на Крозе-Равиар. Изследвано е влиянието на мрежовата анизотропия върху качествата на съответните йерархични разделяния.
3. Разгледан е подход за решаване на системи, получени при дискретизация с неконформни крайни елементи на елиптични задачи в смесена форма. Подходът свежда задачата до система с матрица със структура на граф-лапласиан с тегла. Предложено е йерархично разделяне за такъв тип задачи, основано на специално дефинирани макроелементи, асоциирани със страни на триъгълници от груба мрежа. Получена е равномерна оценка за константата на Коши-Буняковски-Шварц в случая на равномерна триангулация с правоъгълни елементи.
4. Разработена е полиномиална апроксимация за симетрични положително определени матрици с помощта на полинома на най-добро приближение на x^{-1} в L_∞ норма в краен интервал. Изведена е оценка за относителното число на обусловеност на така получения преобусловител. Подходът е приложен за апроксимиране на водещите диагонални блокове в многонивова факторизация на граф-лапласиани с тегла. Изследвани са свойствата

на получения многонивов метод в случая на равномерна триангулация с правоъгълни елементи.

5. Предложен е оптимален съставен многонивов метод за решаване на нестационарните уравнения на Навие-Стокс за случая на устойчива, локално консервативна дискретизация с неконформни крайни елементи. Методът се основава на многонивово преобуславяне на системите, възникващи на конвективно-дифузионната и проекционна стъпки в проекционен метод.
6. Програмно са реализирани изследваните методи и алгоритми. Проведените числени експерименти потвърждават тяхната изчислителна ефективност за важни класове задачи с голяма размерност.

Декларация за оригиналност на резултатите

Декларирам, че настоящата дисертация съдържа оригинални резултати, получени при проведени от мен научни изследвания (с подкрепата и съдействието на научния ми ръководител). Резултатите, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са надлежно и подробно цитирани в библиографията.

Настоящата дисертация не е прилагана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпись:

Библиография

- [1] Б. Боянов, *Лекции по численни методи*, Дарба, 1995.
- [2] Св. Маргенов, *Числени методи за системи с разредени матрици*, Българска Академия на Науките, София, 2007.
- [3] Бл. Сендов, В. Попов, *Числени методи I, II*, София, „Наука и изкуство“, 1978.
- [4] Г. Стрендг, Дж. Фикс, *Теория метода конечных элементов*, Москва, „Мир“, 1977.
- [5] D. N. Arnold, F. Brezzi, *Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates*, RAIRO, Model. Math. Anal. Numer., **19** (1985), 7–32.
- [6] B. Ayuso de Dios and L. Zikatanov, *Uniformly convergent iterative methods for discontinuous Galerkin discretizations*, SIAM J. Sci. Comput. **40** (2009), 4-36.
- [7] O. Axelsson, *A Generalized Conjugate Gradient, Least Square Method*, Numer. Math. 51 (1987), pp. 209–227.
- [8] O. Axelsson, *Iterative solution methods*, Cambridge, University press, 1994.
- [9] O. Axelsson, *Stabilization of algebraic multilevel iteration methods; additive methods*, Numerical Algorithms **21** (1999), 23–47.

- [10] O. Axelsson, V. Barker, *Finite element solution of boundary value problems: Theory and computations*, Academic Press, 1983.
- [11] O. Axelsson, R. Blaheta, *Two simple derivations of universal bounds for the C.B.S. inequality constant*, Appl. Math. **49** (1) (2004), 57-72.
- [12] O. Axelsson, R. Blaheta, M. Neytcheva, *A black-box generalized conjugate gradient minimum residual method based on variable preconditioners and local element approximations*, TR 2007-033, Institute for Information Technology, Uppsala University, 2007.
- [13] O. Axelsson, R. Blaheta, M. Neytcheva, *Preconditioning of boundary value problems using elementwise Schur complements*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **31** (2) (2009), 767-789.
- [14] O. Axelsson and I. Gustafsson, *Preconditioning and two-level multigrid methods of arbitrary degree of approximations*, Math. Comp. **40** (1983), 219–242.
- [15] O. Axelsson, S. Margenov, *On multilevel preconditioners which are optimal with respect to both problem and discretization parameters*, Computational Methods in Applied Mathematics, **3**(1) (2003), 6–22.
- [16] O. Axelsson and M. Neytcheva, *Algebraic multilevel iterations for Stieltjes matrices*, Num. Lin. Alg. Appl. **1** (1994), 213–236.
- [17] O. Axelsson, M. Neytcheva, *Preconditioned methods for linear systems arising in constrained optimization problems*, Numer. Linear Algebra Appl. **10** (2003) 3–31.
- [18] O. Axelsson and A. Padiy, *On the additive version of the algebraic multilevel iteration method for anisotropic elliptic problems*, SIAM J. Sci. Comput. **20** (1999), 1807–1830.
- [19] O. Axelsson and P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning methods I*, Numer. Math. **56** (1989), 157–177.

- [20] O. Axelsson, P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning methods II*, SIAM J. Numer. Anal., **27** (1990), 1569–1590.
- [21] O. Axelsson and P.S. Vassilevski, *A black box generalized conjugate gradient solver with inner iterations and variable-step preconditioning*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **12** (1991), 625–644.
- [22] O. Axelsson and P.S. Vassilevski, *Variable-step multilevel preconditioning methods, I: Self-adjoint and positive definite elliptic problems*, Num. Lin. Alg. Appl. **1** (1994), pp. 75–101.
- [23] R. Bank and T. Dupont, *An optimal order process for solving finite element equations*, Math. Comp. **36** (1981), 427–458.
- [24] R. Barret, M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. van der Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [25] B. Bejanov, J. Guermond and P. Minev, *A locally div-free projection scheme for incompressible flows based on non-conforming finite elements*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **49**, 2005, 239–258.
- [26] G. Bencheva, I. Georgiev, S. Margenov, *Two-level preconditioning of Crouzeix-Raviart anisotropic FEM systems*, Large-Scale Scientific Computing, Springer LNCS, **2907** (2004), 76–84.
- [27] R. Blaheta, S. Margenov, M. Neytcheva, *Uniform estimate of the constant in the strengthened CBS inequality for anisotropic non-conforming FEM systems*, Numer. Linear Algebra Appl., **11** (2004), 309–326.
- [28] R. Blaheta, S. Margenov, M. Neytcheva, *Robust optimal multilevel preconditioners for non-conforming finite element systems*, Numer. Lin. Alg. Appl., **12(5-6)** (2005), 495–514.

- [29] P. Boyanova, S. Margenov, *Multilevel Splitting of Weighted Graph-Laplacian Arising in Non-conforming Mixed FEM Elliptic Problems*, Numerical Analysis and Its Applications, Springer LNCS **5434**, 2009, 216-223.
- [30] P. Boyanova, S. Margenov, *Numerical Study of AMLI Methods for Weighted Graph-Laplacians*, Large-Scale Scientific Computing, Springer LNCS **5910**, 2010, 84-91.
- [31] P. Boyanova, I. Georgiev, S. Margenov, L. Zikatanov, *Multilevel Preconditioning of Graph-Laplacians: Polynomial Approximation of the Pivot Blocks Inverses*, submitted.
- [32] P. Boyanova, S. Margenov, M. Neytcheva, *Robust AMLI Methods for Parabolic Crouzeix-Raviart FEM Systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **235(2)** (2010), 380–390.
- [33] P. Boyanova, S. Margenov, *On Multilevel Iterative Methods for Navier-Stokes Problems*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 40, Number 1, 2010, 51–60.
- [34] P. Boyanova, S. Margenov, *On Optimal AMLI Solvers for Incompressible Navier-Stokes Problems*, AIP Conference Proceedings vol. 1301, 457-467.
- [35] P. Boyanova, S. Margenov, *Robust Multilevel Methods for Elliptic and Parabolic Problems*, invited chapter in: O. Axelsson, J. Karatson, Efficient preconditioning methods for elliptic partial differential equations, Bentham Science Publishers, 2011, 3–22.
- [36] D. Braess, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University Press, 2001, Second Edition.
- [37] J. Bramble, *Multigrid methods*, Longman Scientific & Technical, 1993.
- [38] S. Brenner, L. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, Springer-Verlag, 1994.

- [39] S. Brenner, *A nonconforming multigrid method for the stationary Stokes equations*, Math. Comp. **55** (1990) 411–437.
- [40] S. Brenner, L. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, Springer, 1994.
- [41] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [42] A.J. Chorin, *Numerical solution of the Navier–Stokes equations*, Mathematics of Computation 1968; 22:745 –762.
- [43] M. Crouzeix, P.-A. Raviart, *Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations*, RAIRO Anal. Numér. **7 R-3** (1973), 33–76.
- [44] V. Eijkhout, P. Vassilevski, *The role of the strengthened Cauchy-Bunyakowski-Schwarz inequality in multilevel methods*, SIAM Review **33** (1991), 405–419.
- [45] R. Fedorenko, *On a relaxation method for solving discrete elliptic equations*, J. Comp. Math. and Math. Phys., 1-5 (1961), 922–927.
- [46] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, *Multilevel preconditioning of 2D Rannacher-Turek FE problems; additive and multiplicative methods*, pp. 56–64. Springer LNCS **4310**, 2007.
- [47] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, *Multilevel preconditioning of rotated bilinear non-conforming FEM problems*, Comput. Math. Appl. **55** (2008), 2280–2294.
- [48] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations*, Springer Series in Computational Mathematics (Theory and Algorithms). Springer, Berlin, 1986.
- [49] G.H. Golub and C.F. van Loan, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1989.

- [50] C. Grossmann, H.-G. Roos, M. Stynes, *Numerical treatment of partial differential equations*, Springer, 2007.
- [51] J.-L. Guermond, *Some practical implementations of projection methods for Navier–Stokes equations*, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 1996, 30, 637– 667.
- [52] J.-L. Guermond, L. Quartapelle, *Calculation of incompressible viscous flows by an unconditionally stable projection FEM*, Journal of Computational Physics 1997, 132, 12–23.
- [53] W. Hackbusch, *Multi-Grid Methods and Applications*, Springer-Verlag, 1985.
- [54] X. He, M. Neytcheva, S. Serra Capizzano, *On an augmented Lagrangian-based preconditioning of Oseen type problems*, BIT Numerical Mathematics, DOI: 10.1007/s10543-011-0334-4.
- [55] The HSL Mathematical Software Library, Package HSL-MI20: Algebraic Multigrid Preconditioner <http://www.hsl.rl.ac.uk/>, http://www.hsl.rl.ac.uk/packages/hsl_mi20.html
- [56] C. Johnson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, 1987.
- [57] J. Kraus, *An algebraic preconditioning method for M-matrices: Linear versus nonlinear multilevel iteration*, Num. Lin. Alg. Appl. **9** (2002), 599–618.
- [58] J. Kraus, *Algebraic multilevel preconditioning of finite element matrices using local Schur complements*, Num. Lin. Alg. Appl. **13** (2006), 49–70.
- [59] J. Kraus and S. Margenov, *Multilevel methods for anisotropic elliptic problems*, Lectures on Advanced Computational Methods in Mechanics, Radon Series Comp. Appl. Math., **1** (2007), 47–87.

- [60] J. Kraus, S. Margenov, *Robust Algebraic Multilevel Methods and Algorithms*, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, 5, de Gruyter, 2009.
- [61] J. Kraus, S. Margenov and J. Synka, *On the multilevel preconditioning of Crouzeix-Raviart elliptic problems*, Num. Lin. Alg. Appl., 15 (2008), 395–416.
- [62] J. Kraus, V. Pillwein, and L. Zikatanov, *Algebraic multilevel iteration methods and the best approximation to $1/x$ in the uniform norm*, RICAM-Report No. 2009-17.
- [63] J. Kraus and S. Tomar, *A multilevel method for discontinuous Galerkin approximation of three-dimensional anisotropic elliptic problems*, Num. Lin. Alg. Appl. 15 (2008), 417–438.
- [64] J. Kraus and S. Tomar, *Multilevel preconditioning of elliptic problems discretized by a class of discontinuous Galerkin methods*, SIAM J. Sci. Comput. 30 (2008), pp. 684–706.
- [65] R. Lazarov and S. Margenov, *CBS constants for multilevel splitting of graph-Laplacian and application to preconditioning of discontinuous Galerkin systems*, J. Complexity, 23(4-6) (2007), 498-515.
- [66] R. Lazarov, P.S. Vassilevski, and S. Margenov, *Solving elliptic problems by the domain decomposition method using precondition matrices derived by multilevel splitting of finite element matrix*, Proceedings of the 1st Int. Conf. on Supercomputing (Greece) (1987), 826–835.
- [67] J. F. Maitre and F. Musy, *The contraction number of a class of two-level methods; an exact evaluation for some finite element subspaces and model problems*, Lect. Notes Math. 960 (1982), 535–54.
- [68] S. Margenov and P. Minev, *On a MIC(0) preconditioning of non-conforming mixed FEM elliptic problems*, Math. Comput. Simul. 76(1-3) (2007), 149–154.

- [69] S. Margenov and J. Synka, *Generalized aggregation-based multilevel preconditioning of Crouzeix-Raviart FEM elliptic problems*, RICAM, Report, Linz, 2006. No. 2006-23.
- [70] M. Neytcheva, *On element-by-element Schur complement approximations*, Linear Algebra and its Applications (2010), doi:10.1016/j.laa.2010.03.031.
- [71] Y. Notay, *Flexible conjugate gradients*, SIAM J. Sci. Comput. 22 (2000), pp. 1444–1460.
- [72] T. J. Rivlin, *An introduction to the approximation of functions*, Dover Publications Inc., New York, 1981, corrected reprint of the 1969 original, Dover Books on Advanced Mathematics.
- [73] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS Publishing Company, Boston, 1996.
- [74] J. Synka, *The effect of a minimum angle condition on the preconditioning of the pivot block arising from 2-level-splittings of Crouzeix-Raviart FE-spaces*, Springer LNCS **4818**, 2008, 105-112.
- [75] R. Temam, *Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires ii*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 1969; 33:377–385.
- [76] P.S. Vassilevski, *Hybrid V-cycle algebraic multilevel preconditioners*, Math. Comp. **58** (1992), 489–512.
- [77] P.S. Vassilevski, *On two ways of stabilizing the hierarchical basis multilevel methods*, Siam Review **39** (1997), 18–53.
- [78] P.S. Vassilevski, *Multilevel Block Factorization Preconditioners: Matrix-based Analysis and Algorithms for Solving Finite Element Equations*, Springer, 2008.

- [79] F. Zhang, *The Schur complement and its applications*, Numerical Methods and Algorithms, 4 Springer-Verlag, 2005, New York.