

# Abstracts of Dissertations

Institute of Information and  
Communication Technologies

BULGARIAN ACADEMY OF  
SCIENCES



5 / 2024



METHODS FOR DESIGN  
OF WAVELET AND  
MULTIWAVELET FILTER  
BANKS

*Vasil Kolev*

МЕТОДИ ЗА  
ПОСТРОЯВАНЕ НА  
УЕЙВЛЕТНИ И  
МУЛТИУЕЙВЛЕТНИ  
ФИЛТЪРНИ БАНКИ

*Васил Колев*

# Автореферати на дисертации

Институт по информационни и  
комуникационни технологии

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ISSN: 1314-6351

Пореаницата „Авореферати на дисертации на Института по информатионни и комуникационни технологии при Българската академия на науките“ представя в електронен формат автореферати на дисертации за получаване на научната степен „Доктор на науките“ или на образователната и научната степен „Доктор“, защитени в Института по информатионни и комуникационни технологии при Българската академия на науките. Представените трудове отразяват нови научни и научно-приложни приноси в редица области на информатионните и комуникационните технологии като Компютърни мрежи и архитектури, Паралелни алгоритми, Научни пресмятания, Лингвистично моделиране, Математически методи за обработка на сензорна информация, Информатионни технологии в сигурността, Технологии за управление и обработка на знания, Грид-технологии и приложения, Оптимизация и вземане на решения, Обработка на сигнали и разпознаване на образи, Интелигентни системи, Информатионни процеси и системи, Вградени интелигентни технологии, Йерархични системи, Комуникационни системи и услуги и др.

#### Редактори

*Геннадий Агре*

Институт по информатионни и комуникационни технологии, Българска академия на науките  
E-mail: [agre@iinf.bas.bg](mailto:agre@iinf.bas.bg)

*Райна Георгиева*

Институт по информатионни и комуникационни технологии, Българска академия на науките  
E-mail: [rayna@parallel.bas.bg](mailto:rayna@parallel.bas.bg)

*Даниела Борисова*

Институт по информатионни и комуникационни технологии, Българска академия на науките  
E-mail: [dborissova@iit.bas.bg](mailto:dborissova@iit.bas.bg)

*Настоящото издание е обект на авторско право. Всички права са запазени при превод, разпечатване, използване на илюстрации, цитирания, разпространение, възпроизвеждане на микрофилми или по други начини, както и съхранение в бази от данни на всички или част от материалите в настоящето издание. Копирането на изданието или на част от съдържанието му е разрешено само със съгласието на авторите и/или редакторите*

*The series **Abstracts of Dissertations of the Institute of Information and Communication Technologies at the Bulgarian Academy of Sciences** presents in an electronic format the abstracts of Doctor of Sciences and PhD dissertations defended in the Institute of Information and Communication Technologies at the Bulgarian Academy of Sciences. The studies provide new original results in such areas of Information and Communication Technologies as Computer Networks and Architectures, Parallel Algorithms, Scientific Computations, Linguistic Modelling, Mathematical Methods for Sensor Data Processing, Information Technologies for Security, Technologies for Knowledge management and processing, Grid Technologies and Applications, Optimization and Decision Making, Signal Processing and Pattern Recognition, Information Processing and Systems, Intelligent Systems, Embedded Intelligent Technologies, Hierarchical Systems, Communication Systems and Services, etc.*

#### Editors

*Gennady Agre*

Institute of Information and Communication Technologies, Bulgarian Academy of Sciences  
E-mail: [agre@iinf.bas.bg](mailto:agre@iinf.bas.bg)

*Rayna Georgieva*

Institute of Information and Communication Technologies, Bulgarian Academy of Sciences  
E-mail: [rayna@parallel.bas.bg](mailto:rayna@parallel.bas.bg)

*Daniela Borissova*

Institute of Information and Communication Technologies, Bulgarian Academy of Sciences  
E-mail: [dborissova@iit.bas.bg](mailto:dborissova@iit.bas.bg)

*This work is subjected to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the materials is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. Duplication of this work or part thereof is only permitted under the provisions of the authors and/or editor.*



**BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES**

## **Abstract of PhD Thesis**

# **METHODS FOR DESIGN OF WAVELET AND MULTIWAVELET FILTER BANKS**

*Vasil Stefanov Kolev*

**Supervisor: Assoc. Prof. Rumen Andreev**

**Approved by Supervising Committee:**

Prof. Ognyan Kounchev  
Prof. Alexander Bekyarski  
Prof. Ivan Garvanov  
Prof. Pencho Marinov  
Prof. Daniela Borisova



**INSTITUTE OF INFORMATION AND  
COMMUNICATION TECHNOLOGIES**

**Department of Communication and computer systems**

## PREFACE

### Problem statement

In recent decades, scalar wavelets have established themselves as an indispensable tool in signal processing, in applications such as numerical analysis, operator theory, denoising and compression of  $N$ -D signals, object extraction from astronomical images, machine learning, data sorting, database searching, time series analysis, computational medicine, and others. They have been around since the late 1980s. There are different types of them: wavelet packets, ridgelets, curvelets, slantlets, frames and other constructions. Since the early 1990's, one known generalization of scalar wavelets have been multiwavelets. The great interest in them is caused by the fact that they contain more than one function while possessing at the same time the most important characteristics from the theory of filter banks - short support, symmetry, and vanishing moments of high degree.

An important subfield is orthogonal multiwavelet filters, the construction of which requires satisfying a number of restrictive conditions. They have advantageous properties, but are very difficult to design. Generally, new design methods and algorithms are necessary.

### Motivation

There is a significant difficulty and a major challenge in finding orthogonal multiscaling functions by spectral decomposition of a singular matrix filter product. Moreover, due to the presence of single or multiple zeros in the determinant of the product filter, the spectral decomposition may be highly erroneous or even impossible.

*The main research question* is the extension of wavelet and multiwavelet theory. This research contributes four methods for constructing scalar or vector scaling functions from different polynomials and splines:

- ❖ *Basis change method* ;
- ❖ *Brute force method*;
- ❖ *Inner product method*;
- ❖ *Bauer's method for spectral factorization*.

The first three methods are based on polynomial basis functions or different splines. These can be exponential functions, Legendre polynomials in  $[-1,1]$  or  $[0,1]$ , cubic or quintic Hermitian polynomials in  $[0,1]$  and  $[0,2]$ , Chebyshev polynomials of the first and second kind, Haar and Walsh functions, etc.

The fourth proposed method constructs scaling and multiscaling functions satisfying desired properties - orthogonality, vanishing moment, compact support, and smoothness. Two numerical algorithms for the Bauer's method for spectral factorization of scalar and matrix product filters are constructed.

### Main tasks of the scientific research:

1. To conduct a study, overview and critical analysis of existing methods for constructing scaling and multiscaling functions;

2. To outline research opportunities in constructing new methods of implementing filter banks;
3. To propose new methods for constructing scaling and multiscaling functions from polynomials and splines;
4. To define and construct spectral factorization methods;
5. To elaborate on the algorithms for a fast and accurate Bauer's method;
6. To implement an Alpert multiwavelet filter bank based on the lifting scheme and perform experimental studies of the methods for constructing wavelet and multiwavelet filter banks.

## Content structure

The dissertation consists of 5 chapters, preface, conclusion, and references.

The *Preface* outlines the topic, object and subject of the dissertation work, as well as the leading hypotheses. The problem statement and the motivation for conducting the dissertation research are briefly described. The purpose and methodology of the research work, as well as the methods according to which it is to be achieved, are given.

*Chapter 1* is devoted to existing methods for constructing wavelet and multiwavelet filter banks. It includes the theory of basis functions from polynomials and splines, spectral decomposition, and construction of scalar and vector filter banks.

*Chapter 2* presents three construction methods for scaling and multiscaling functions from polynomials and splines.

*Chapter 3* is devoted to existing methods for spectral factorization. The necessary condition for smoothness of the matrix product filter is described. The *Daubechies 4* scaling function is designed according to the root method for spectral factorization. Bauer's theoretical method for spectral factorization is also described and an Alpert product filter is obtained.

*Chapter 4* is devoted to the development of fast algorithms implementing Bauer's method and their numerical solution using three numerical methods. Algorithms 1 and 2 for a fast and accurate Bauer method for scalar and vector spectral decomposition are developed and Alpert orthogonal multifilter banks are constructed.

*Chapter 5* is devoted to the following novel aspects:

- 1) Comparative analysis of the four methods for constructing scaling and multiscaling functions, Bauer methods for spectral decomposition for Haar and Daubechies scaling functions, as well as Alpert multiscaling function;
- 2) Empirical research on the fast and exact Bauer's method for scalar and matrix spectral factorization – Haar and Daubechies 4 scaling functions;
- 3) Seven examples of *Algorithm 1, 2* implementing the exact Bauer's method;
- 4) Built-in functions for the seven examples of *Algorithm 1, 2*;
- 5) The lifting scheme for the Alpert multiwavelet filter bank is implemented. It is applied with different quantizations:  $\sqrt{3}$  for  $256 \times 256$  and  $512 \times 512$  image denoising with gray levels and AWGN with  $(\sigma = 10, 20)$ ;
- 6) Image compression of astronomy images from scanned photograph plates are compared.

**CHAPTER 1****REVIEW OF CONSTRUCTION METHODS OF WAVELET AND MULTI-WAVELET FILTER BANKS****1.1 Introduction**

Wavelets are, essentially, short or fast-decaying waves where by translation and dilation one can obtain a set of functions possessing the important properties of orthogonality, zero moments, compact support, and smoothness. They are particularly useful in the analysis of non-stationary signals, which requires that the frequency characteristics of a given filter depend on time. They are obtained with the construction of filter banks where spatial and frequency features are simultaneously determined for a given signal, which is impossible with Fourier transformation.

In wavelet theory, there are spline wavelets obtained from different spline functions. They are a linear combination of  $B$ -splines inheriting their basis functions and a compact support but the resulting functions are non-orthogonal. Because of their simple structure, they are one of the most important and interesting wavelet family. They are used in the construction of wavelet finite elements that satisfy the condition of continuity of a shape function. In this way, multi-level (multi-scale) representation is achieved in many engineering problems. This achieves the desired accuracy and provides adaptive hierarchical solutions.

An important drawback of wavelets is the impossibility of simultaneously possessing all important properties - orthogonality, zero moments, compact support, and smoothness [131], [132]. To overcome this drawback, the multiscaling and multiwavelet functions have been used. This changes the structure of a filter bank where instead of one scaling and wavelet function, two or more functions called multiscaling and multiwavelet functions are used simultaneously.

The advantage of the multifilter theory is the possession of the above properties, which ensures fast signal recovery (at the expense of orthogonality), good efficiency (at the expense of smoothness), and a high degree of approximation (at the expense of a large number of zero moments). The symmetry of the function allows a symmetrical extension of the boundaries of signals. Orthogonality results in independent subimages. The higher degree of vanishing moments leads to the ability to represent polynomials of a higher degree with a smaller number of coefficients.

**1.2. Brief theory of spline and Legendre polynomials****1.2.1 Spline functions**

From a mathematical point of view, a 'spline' is a partially linear function built from polynomial functions whose smoothness depends its derivatives. More generally, a spline is the set of all functions that are parts of a polynomial necessary to construct a function in the interval  $[a, b]$  with certain smoothness conditions. Splines whose polynomials are of low degree are called piecewise linear and are used as interpolating functions.

**1.2.1.1 Linear B – spline (“Hat” function)**

The ‘Hat’ function is piecewise linear function, known as linear  $B$  – spline:

$$L(t) = at + b. \quad (1.1)$$

where  $a$  и  $b$  are coefficients. It can be used as a linear interpolant and/or finite element. Its multiscaling function consists from three coefficients  $h_0, h_1, h_2$ :

$$\phi(t) = h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t-1) + h_2\phi(2t-2) \quad (1.2)$$

**1.2.1.2 Cubic Hermitain spline**

Hermitian spline functions belong to a class of splines that are defective<sup>(A)</sup>, i.e. piecewise polynomial function with constant defect on the knots. The most commonly used is the cubic spline consisting of a polynomial of degree  $\leq 3$  with two continuous derivatives for each subinterval. Cubic Hermitain spline is use for interpolation of data with continuous first and (possibly discontinuous) second derivatives of the nodes. Cubic Hermitain spline are constructed for two endpoints of a polynomial of the third degree  $H(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$  and its the derivatives (or tangents) at these points.

**1.2.2 Legendre polynomials**

Legendre polynomials are  $t$ -order polynomials, i.e.  $1, t, \dots, t^i$  and in  $[-1,1]$  forms nonorthogonal basis:

$$\phi_r(t) = \sqrt{r + \frac{1}{2}} P_r(t) \quad (1.3)$$

where:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, \\ P_1(t) &= t, \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \quad , \text{ for } m = 1, 2, 3, \dots \\ (m+1)P_{m+1}(t) &= (2m+1)tP_m(t) - mP_{m-1}(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

In the multiwavelet theory Legendre polynomials are in a interval  $[0,1]$ . The first multiscaling function is of Alpert [6] which is constructed from the two functions  $P_0(t)$  и  $P_1(t)$ :

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = [C_0 + C_1 z^{-1}] = \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

where  $C_0$  and  $C_1$  are matrix coefficients.

**1.3. General theory of filter banks**

**1.3.1 Scalar filter banks**

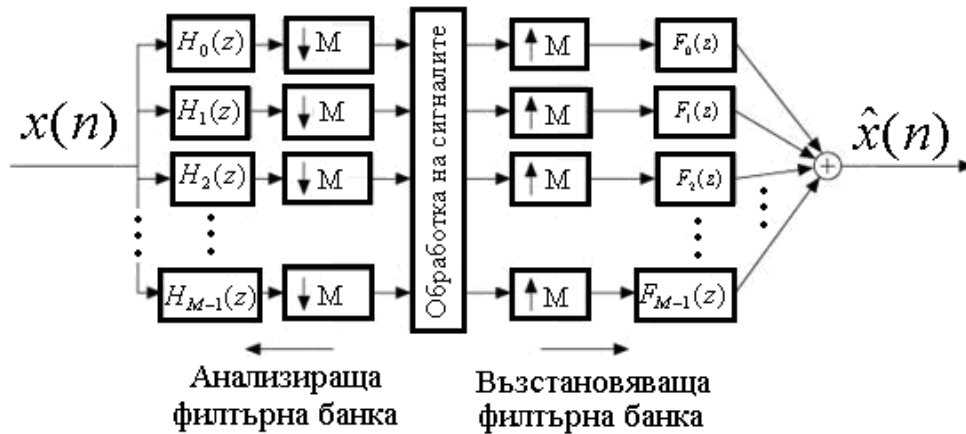
**1.3.1.1 General theory**

Wavelet theory is based on a domain of basis functions interconnected by scaling and translation. At the heart of this domain is a wavelet basis function used to generate all other basis functions. It has certain characteristics in the  $L^2$  space and is called the mother wavelet, wavelet function, or just wavelet, and is denoted by  $\psi(t)$ . There is a second function in the basis, allowing it to be built from a finite number of functions. This function is the parent wavelet, a scaling function, and is denoted by  $\phi(t)$ . The integer translations of the two functions form a Riez basis.

---

<sup>(A)</sup> The difference between the degree of a spline and its smoothness is called the *spline defect*. For example, a piecewise linear continuous function (its graph is a polygonal line) is a spline of degree one of defect 1.

The two functions are obtained using a filter bank, which usually has a tree-like hierarchy of two different types - for analysis and recovery (synthesis) of functions. The filter bank is a combination of shift-dependent filters with coefficient M – downsampling, denoted with ( $\downarrow M$ ), and decimation (upsampling), denoted with ( $\uparrow M$ ). The structure of an r-channel filter bank is shown in fig. 1.4. This way of analyzing a function (signal) is called multi-resolution analysis (MRA). If the analysis and recovery regions consist of the same scaling and wavelet functions, the filterbank is called orthogonal, and when they consist of different functions, the filter bank is called biorthogonal.



Фиг.1.4. M–channels scalar filter bank

The two – channels filter bank with input signal  $x(n)$  is described by the equation:

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} [H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)] X(z) + \frac{1}{2} [H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)] X(-z) \quad (1.6)$$

$$= T(z)X(z) + S(z)X(-z)$$

which is equivalent of the matrix product:

$$\hat{X}(z) = \begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}$$

The matrix product  $H_0(z)F_0(z)$  is called a product filter. It is the foundation for finding of scaling and multiscaling functions by spectral factorization.

**1.3.1.2 Scaling and wavelet functions by a parameter**

The construction of orthogonal scaling and wavelet functions can be done by the poyphase matrix with a parameter [86],[129],[139] which is called a lattice structure:

$$H_p(z) = \left[ \prod_{i=0}^{L-1} \begin{pmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \cos \phi_L & \sin \phi_L \\ -\sin \phi_L & \cos \phi_L \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

where  $\phi_i \in [0, 2\pi]$  and  $\phi_L \in [0, \pi]$ .

In other research [86] a parameter structure is used:



$$\begin{bmatrix} c_0^K & d_0^K \\ c_1^K & d_1^K \\ c_2^K & d_2^K \\ \vdots & \vdots \\ c_{N-1}^K & d_{N-1}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_K & & & \\ & \cos \phi_K & & \\ & & I \otimes R(\phi_K) & \\ & & & \cos \phi_K \\ & & & & \cos \phi_K \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \quad \text{for } K \geq 2 \quad (1.8)$$

where  $I$  is an identity matrix. In this way filter banks can be implemented directly.

Additionally, a universal parameterization is given [87]:

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = J(\alpha)J(\beta), \quad (1.9)$$

where  $J(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$  is a Jacobi matrix with  $\beta - \alpha = \phi \pmod{2\pi}$ . Then Jacobi matrix has three diagonal matrices:

$$\begin{aligned} R(\phi) &= I - A\left(\frac{\phi}{2}\right)B\left(\frac{\phi}{2}\right)A^T\left(\frac{\phi}{2}\right) = \\ &= I - \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & \sin \frac{\phi}{2} \\ 1 & -\cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2\cos \frac{\phi}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \frac{\phi}{2} & -\cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.10)$$

### 1.3.1.3 Properties of scaling and wavelet functions

The subchapter describes more important properties of scaling and wavelet functions - Heisenberg's uncertainty principle, symmetry, flatness, and *vanishing moments*.

### 1.3.1.4 Multiresolution Analysis (MRA) [139]

A key concept in wavelet theory is the nested structure called multiresolution analysis (MRA) or multiscale approximation (MSA), consisting of successively coarser or finer spaces  $V_j$ :

$$\begin{aligned} \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots, \in L^2(\mathbb{R}) \text{ (Lebesgue space)} \\ \leftarrow \text{rougher space} \qquad \qquad \qquad \text{finer space} \rightarrow \end{aligned}$$

MRA possesses following properties:

1. *Scaling* – For each  $j$ ,

$$\text{a function } f(t) \in V_j \text{ iff } f(2t) \in V_{j+1};$$

2. *Inclusion* - For each  $j$

$$V_j \subseteq V_{j+1};$$

3. *Completeness* - The union of all subspaces  $V_j$ 's in subspace  $L^2$  is dense:

$$\text{closure} \left\{ \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \right\} = L^2(\mathbb{R});$$

4. *Uniqueness* – The subspaces  $V_j$  have no intersection:

$$\left\{ \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j \right\} = \{0\}. \quad \#$$

Consequently, the  $j$ -level MRA applied on a function  $f(t)$  is obtained using scaling and wavelet coefficients according to:

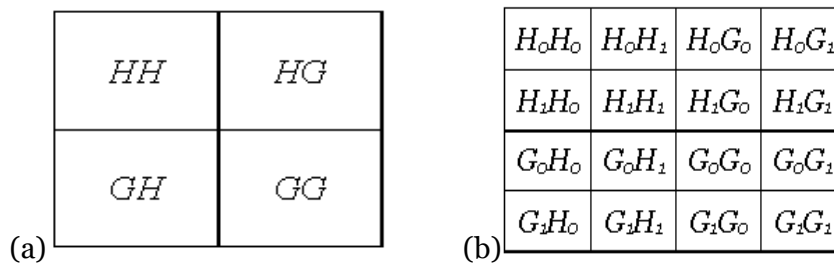
$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\phi(t-n) + \sum_{j=1}^J \sum_{n=0}^{N-1} g_{2^j+n}(n)\psi(2^j t-n). \tag{1.11}$$

### 1.3.2 Vector filter banks (Multifilters)

#### 1.3.2.1 General theory

The vector filter banks (or multifilter) are a generalization of scalar wavelet filter bank theory. Essentially, they are MIMO systems consisting of  $r$  –scaling functions  $\Phi = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_r]^T$  and  $r$  – wavelet functions  $\Psi = [\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_r]^T$ . This means that multiwavelet filter bank is consists of four analysis and synthesis multifilters which possess simultaneously the properties of orthogonality, symmetry, compact support, and vanishing moments.

A important difference between the scalar and vector filter banks is the number of subbands obtained in the decomposition. For example, an image decomposed at one level by a two-channel scalar filter bank forms four subbands (subimages) shown in [fig. 1.11\(a\)](#), while a two-channel vector filter bank forms sixteen subbands (subimages) shown in [fig. 1.11\(b\)](#).



**Фиг. 1.11** A one level decomposition of a image; (a) scalar two channel filter bank (4 subbands); (b) two channel multifilter bank (16 subbands)

The input – output equation of the two channel vector filter bank is:

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} [G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)] X(z) + \frac{1}{2} [G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)] X(-z) \tag{1.12}$$

or by the modulation matrix

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(z) \\ \hat{X}(-z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \\ G_0(-z) & G_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}, \tag{1.13}$$

$$= G^m(z)H^m(z) \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}$$

where,  $X(z)$  is input vector signal,

$H_r(z)$ - analysis multifilters,  $r = 0, 1$

$G_r(z)$ - synthesis multifilters,  $r = 0, 1$

$\hat{X}(z)$  - output vector signal.

$H^m(z)$  - orthogonal analysis modulation matrix,

$G^m(z)$  - orthogonal synthesis modulation matrix.

The perfect reconstruction conditions of multiwavelet filter banks using the modulation matrices are:

$$\begin{aligned} \tilde{H}^m(z)H^m(z) &= H^m(z)\tilde{H}^m(z) = cI \\ \tilde{G}^m(z)G^m(z) &= G^m(z)\tilde{G}^m(z) = cI \end{aligned} \quad (1.14)$$

where  $c$  is a constant,  $I$  – an identity matrix, and  $(\sim)$  denotes the Hermitian matrix. Therefore, the conditions to obtain orthogonal multifilter banks are:

$$\begin{aligned} H_0(z)\tilde{H}_0(z) + H_0(-z)\tilde{H}_0(-z) &= cI \\ H_1(z)\tilde{H}_1(z) + H_1(-z)\tilde{H}_1(-z) &= cI \\ H_0(z)\tilde{H}_1(z) + H_0(-z)\tilde{H}_1(-z) &= 0 \\ H_1(z)\tilde{H}_0(z) + H_1(-z)\tilde{H}_0(-z) &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

which means that only the lowpass multifilter  $H_0(z)$  is needed.

### 1.3.2.2 Properties of the multiscaling function

In this sub-chapter we consider some important properties:

- A. polynomial reproduction of discrete polynomials;
- B. Pre- and post-filtering;
- C. Balancing;
- D. The support of a multifilter;
- E. Symmetry/antisymmetry of multiscaling and multiwavelet functions;

### 1.4. Theory of spectral factorization

The spectral factorization has a unique minimum-phase solution  $H(e^{j\omega})$  if para-Hermitian polynomial matrix  $P(e^{j\omega})$  is positive definite on the unit circle  $|z|=1$ , absolute integrable with a finite energy and satisfying the Paley-Wiener conditions [152]:

- For scalar spectral factorization

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P(e^{j\omega}) d\omega > -\infty \quad \text{or} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P(e^{j\omega}) d\omega < \infty ;$$

- For matrix spectral factorization

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det P(e^{j\omega}) d\omega > -\infty \quad \text{or} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det P(e^{j\omega}) d\omega < \infty .$$

Therefore, the spectral factorization is the process of determining the minimum phase function belonging to a given power spectrum  $P(e^{j\omega})$  which is the product of two factors,  $H(z)$ , and  $H^*(z)$ , either of which are to be determined, i.e.  $P(e^{j\omega}) = H(z)H^*(z)$ .

The fundamental theorem of the spectral factorization is Fejér – Riesz theorem for positive definite functions. The terminology comes from prediction theory, where the nonnegative function  $\nu(z)$  plays the role of a spectral density for a multidimensional stationary stochastic process. Fejér [71]

first shows the importance of the class of trigonometric polynomials that admit only positive real values; as a theorem it is proved by Riesz [114]. The Fejér – Riesz theorem for a trigonometric univariate polynomial is:

$$\nu(z) = \sum_{k=-N}^N \nu_k z^k \quad (1.16)$$

When the function  $\nu(z)$  is real for all  $z \in \mathbb{T}$ , then the coefficients for all  $k$  satisfy the following equality  $\bar{\nu} = \nu_{-k}$ . If  $\nu(z) \geq 0$  for all  $z \in \mathbb{T}$  (unit circle), the factorization of the function  $\nu(z)$  is:

$$\nu(z) = p(z)p^*(z) \quad (1.17)$$

where  $p(z) = \sum_{k=0}^N p_k z^k$  is called a scalar spectral factor and  $p^*(z)$  is a Hermitian polynomial.

The scalar spectral factor  $p(z)$  is unique to a unitary matrix multiplier  $U(z)$  [59], [60], i.e.,

$$p_{new}(z) = p(z)U(z). \quad (1.18)$$

The Wilson – Burg method [142] for spectral factorization constructs a minimum-phase signal from its spectrum. This is an iterative method with good numerical convergence [58]. Its main application is in study of analytic and bounded functions whose zeros do not lie on the unit circle.

The matrix spectral factorization plays a crucial role in different applications that arise in MIMO systems and control theory [82],[141], [148]. The Bauer's method is well-known for spectral factorization [14], and the implementation of Youla and Kazanjian [102], [103], [109], [149] has been successfully applied [30], [54], [78], [81].

### 1.5 Theory of spline basis functions

The author has constructed - Linear B-splines; reduced support Hermitian spline for an interval [0,1]; a cubic Hermitian spline ; and a Quintic Hermitian spline.

### 1.6. Results and conclusions

Based on the identified problems, the author makes a contribution to the theory of wavelets and multiwavelets. For this purpose, a new universal unitary matrix structure was developed, applied in the construction of a new parametric structure model for directly constructing scaling and wavelet functions.

From the overview it follows that scalar and/or vector filter banks can be constructed from Bernstein polynomials, Legendre polynomials, cubic and quintic Hermitian polynomials, as well as linear and quadratic B -splines.

**CHAPTER 2****CONSTRUCTION METHODS OF SCALING AND MULTISCALING FUNCTIONS FROM POLYNOMIALS AND SPLINES****2.1 Basis change method**

The *basis change method* for construction of scaling and multiscaling functions consists of constructing a coefficients matrix of the basis functions for a defined interval. This is a product of a scaling function  $\phi(t)$  or a multiscaling  $\Phi(t)$  function with a nonsingular matrix  $A$ , i.e.  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ . In the multiscaling function case it leads to a new function:

$$\tilde{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_k AC_k \Phi(2t - k). \quad (2.1)$$

Changing the basis in (2.1) can be represented as:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(t) &= \sqrt{2} \sum_k (AC_k A^{-1}) A \Phi(2t - k) \\ &= \sqrt{2} \sum_k \underline{\mathbf{H}}_k \Phi(2t - k) \end{aligned} \quad (2.2)$$

where  $\text{supp } \Phi(t) = \text{supp } \tilde{\Phi}(t)$ , and the new matrix of coefficients is determined by:

$$\underline{\mathbf{H}}_k = AC_k A^{-1}. \quad (2.3)$$

The *basis change method* is used for the design of multiscaling functions from - Legendre polynomials and  $B$ -spline, cubic and quintic Hermitian splines.

**2.2 Brute force method**

The *brute force method* is a direct method for the design of scaling and multiscaling functions consisting of equalization of the basis function with a scaling function  $\phi(t)$  or a multiscaling  $\Phi(t)$  function over a defined interval. To apply this method we need:

(a) to divide the basic functions of :

$$\text{left (L): } \Phi_L(t) \quad \text{and} \quad \text{right (R): } \Phi_R(t).$$

(b) divide the support of the basis functions of subintervals.

The matrix coefficients from the multiscaling function is found for each subinterval. Example, for the multiscaling function

$$\Phi(t) = \sqrt{2} (C_0 \Phi(2t) + C_1 \Phi(2t - 1) + C_2 \Phi(2t - 2))$$

each matrix coefficient is found from the matrix equations

$$\Phi(t) = \sqrt{2} C_0 \Phi(2t), \quad \text{when } t \in [0, 1/2], \quad (2.4)$$

$$\Phi(t) = \sqrt{2} C_0 \Phi(2t) + \sqrt{2} C_1 \Phi(2t - 1), \quad \text{when } t \in [1/2, 3/2] \quad (2.5)$$

$$\Phi(t) = \sqrt{2} C_2 \Phi(2t - 2), \quad \text{when } t \in [1/2, 1]. \quad (2.6)$$

### 2.3 Inner product method

The inner product method uses tensor products and an integral depending on the interval of the basis functions. A disadvantage of the method is its computational complexity.

#### 2.3.1 "Hat" scaling function

The support of the multiscaling "Hat" function is  $[0,2]$

$$\phi(t) = \sqrt{2}(h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t-1) + h_2\phi(2t-2)).$$

The scalar coefficients is determined in the dependent the neighbouring coefficients:

- $h_0$  dependent from  $h_1$ ;
- $h_1$  dependent from  $h_0$  и  $h_2$ ;
- $h_2$  dependent from  $h_1$ .

This leads to construction and solving of the linear systems:

$$[a, b, c] = \sqrt{2}[h_0, h_1, h_2] \begin{bmatrix} q & r & 0 \\ r & q & r \\ 0 & r & q \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

where three scalar coefficients are:

$$[h_0, h_1, h_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4} \right] \left( \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left[ \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right].$$

#### 2.3.2 Multiscaling function of cubic Hermitian spline

The support of the multiscaling function for cubic Hermitian spline is  $[0,2]$

$$\Phi(t) = \sqrt{2}C_0\Phi(2t) + \sqrt{2}C_1\Phi(2t-1) + \sqrt{2}C_2\Phi(2t-2)$$

where  $C_0, C_1$ , and  $C_2$  are matrix coefficients. By dividing cubic Hermitian basis functions of 'left' and 'right':

$$\text{- left (L) for the interval } t \in [0,1]: \Phi_L(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 2t^3 \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\text{- right (R) for the interval } t \in [1,2]: \Phi_R(t) = \begin{pmatrix} 3(2-t)^2 - 2(2-t)^3 \\ (2-t)^3 - (2-t)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

is derived the matrix equation:

$$[C_0, C_1, C_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} [A \ B \ C] \begin{bmatrix} Q & R & 0 \\ R^T & Q & R \\ 0 & R^T & Q \end{bmatrix}^{-1}. \quad (2.10)$$

whose solutions are the matrix coefficients:

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}, C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ и } C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

### 2.3.3 Alpert multiscaling function

The support of the Alpert multiscaling function is  $[0,1]$ :

$$\Phi(t) = \sqrt{2}C_0\Phi(2t) + \sqrt{2}C_1\Phi(2t-1) .$$

where  $C_0$  and  $C_1$  are matrix coefficients, and whose basis functions lie in different intervals. From the inner products:

$$\begin{aligned} \langle\langle\Phi(t), \Phi(2t)\rangle\rangle &= \sqrt{2}C_0\langle\langle\Phi(2t), \Phi(2t)\rangle\rangle \\ \langle\langle\Phi(t), \Phi(2t-1)\rangle\rangle &= \sqrt{2}C_1\langle\langle\Phi(2t-1), \Phi(2t-1)\rangle\rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

the two matrix coefficients can be determined

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{ and } C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

### 2.4 Results and conclusions

*Chapter 2* discusses research opportunities in constructing new methods for constructing banks of polynomials and splines. Thus, three methods for constructing scaling and/or multiscaling functions have been developed. They have been applied to Legendre polynomials, cubic and quintic Hermitian polynomials, and linear and quadratic B-splines.

**CHAPTER 3****METHOD OF SPECTRAL FACTORIZATION****3.1 Design of the product filter**

The most important part when using the method of spectral factorization for find desirable scaling or multiscaling function that satisfies the *mandatory smoothness condition* of scalar or matrix filter product

$$\det P(z) = \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right)^m Q(z) \quad (3.1)$$

where  $Q(z)$  is a linear phase polynomial. The matrix product filter

$$P(z) = P_{-k}z^{-k} + P_{-k+1}z^{-k+1} + \dots + P_0 + \dots + P_{k-1}z^{k-1} + P_kz^k$$

satisfied the *half-band filter condition*:

$$P(z) + P(-z) = 2I, \quad (3.2)$$

which means that

$$P_0 = I, \text{ и } P_{2k} = 0, k \neq 0. \quad (3.3)$$

The simplest matrix product filter is the two channel product filter  $P(z) \in C^{r \times r}[z, z^{-1}]$  of an first order, i.e.  $k = 1$  [89]:

$$P(z) = P_1^T z^{-1} + P_0 + P_1 z, \quad (3.4)$$

To achive smoother scaling or multiscaling functions we need higher-order scaling or matrix product filters. This is equivalent to the multiplier  $(1+z)^m$  in the *mandatory smoothness condition* and singular matrix polynomial.

**3.2 Quadratic equation method**

The method use solving of quadratic equations [89]. Example, for scalar spectral factorization of product filter  $p(z)$

$$\begin{aligned} p(z) &= p_{-k}z^{-k} + \dots + p_{-2}z^{-2} + p_{-1}z^{-1} + p_0 \\ &\quad + p_1z + p_2z^2 + \dots + p_kz^k \\ &= h(z)h^*(z) \\ &= (h_0 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots + h_kz^{-k})(h_0 + h_1z + h_2z^2 + \dots + h_kz^k) \end{aligned} \quad (3.5)$$

where  $h(z)$  is scalar spectral factor and  $h^*(z)$  is scalar Hermitian spectral factor.

**3.3 Roots method (Wiener-Hopf factorization)**

*Roots method* [31], [129] use find of polynomial roots:

$$\begin{aligned} p(z) &= h(z)h(z^{-1}) \\ &= p_k \prod_{i=1}^m (z - z_i) \left( z - \frac{1}{z_i} \right) \prod_{j=1}^{k-m} (z - z_j)^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

where  $p_k \neq 0$  and Hermitian root  $z^*$  is root when  $z$  is also root.



### 3.4 Cepstral method

The cepstral method is based of FFT [28], [33], [83], [94], [110] as can be use to construction of nonsymmetrical orthogonal scaling function. The main idea is logarithm of the scalar filter product:

$$\log p(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} l_n z^{-n} = \left(\frac{l_0}{2} + \sum_1^{\infty} l_n z^{-n}\right) + \left(\frac{l_0}{2} + \sum_1^{\infty} l_n z^n\right). \tag{3.7}$$

The factorization consists from the sum of two polynomials as well as iterative finding the coefficients of spectral factor:

$$\begin{aligned} h_0 &= \exp\left(\frac{1}{2}l_0\right), \\ h_n &= l_n h_0 + \frac{n-1}{n} l_{n-1} h_1 + \dots + \frac{1}{n} l_1 h_{n-1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

### 3.5 Bauer’s method

The Bauer’s method is based on the Fejer-Riesz theorem for matrix case [29], [60], [80], [120], [122] which means that spectral factorization of scalar  $p(z)$  product filter with coefficients  $p_{-k} = p_k$ , or (matrix)  $P_{-1} = P_1^T$  with product filter  $P(z)$  is obtained by Choleski decomposition of the block-band matrix:

$$\begin{aligned} T_{n \times n} &= \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & P_{-k} & P_{-k+1} & \dots & P_{k-1} & P_k & & \\ & & P_{-k} & P_{-k+1} & \dots & P_{k-1} & P_k & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = FF^T \\ &= \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & C_k^{(n)} & \dots & C_1^{(n-1)} & C_0^{(n-1)} & & & \\ & & C_k^{(n)} & \dots & C_1^{(n-1)} & C_0^{(n-1)} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.9} \end{aligned}$$

Consequently, the Bauer’s method for spectral factorization is equivalent to the Choleski decomposition of  $(n + 1) \times (n + 1)$  block–band Toeplitz matrix [23], [24]:



**CHAPTER 4****ALGORITHMS FOR BAYER'S METHODS****4.1 General theory of the fast Bauer's method**

The advantages of the fast Bauer's method are avoiding the Choleski decomposition of a Toeplitz matrix of an enormous size and the obtaining of a spectral factor with exact values using well-known software tools such as *Matlab* [92], [93] or *Maple* [90]. For the purpose, it is necessary to reduce the degree of the product filter to a first order and solve a NME. Consequently, the  $k$ -order product filter by rearranging the matrix coefficients  $P_k$

$$P(z) = P_{-k}z^{-k} + P_{-k+1}z^{-k+1} + \dots + P_0 + \dots + P_{k-1}z^{k-1} + P_kz^k, \quad \text{and } P_{-1} = P_1^T. \quad (4.1)$$

is a construction a new product filter of order one, i.e.  $k = 1$ .

$$\hat{P}(z) = \hat{P}_{-1}z^{-1} + \hat{P}_0 + \hat{P}_1z. \quad (4.2)$$

where  $\hat{P}_0$ , and  $\hat{P}_{-1} = \hat{P}_1^T$  are the new matrix coefficients.

**4.2 Algorithms for the fast Bayer's method**

The fast Bauer's method is based on representing the Cholesky factorization of a Toeplitz matrix iteratively row-by-row, which leads to the nonlinear matrix equation (NME) [89], [90]:

$$X^{(n+1)} = P_0 - P_1^T [X^{(n)}]^{-1} P_1 \quad (4.3)$$

where from the solution  $X^{(0)} = P_0$ , we find that

$$X^{(t)} = C_0^{(t)} [C_0^{(t)}]^T. \quad (4.4)$$

Since when  $n \rightarrow \infty$ ,  $X^{(n)} \rightarrow X$ , then

$$X = P_0 - P_1^T X^{-1} P_1 \quad (4.5)$$

On the basis of the previous theory are constructed *Algorithm 1* (Fig. 4.1) and *2* (Fig.4.2) for finding of scalar( matrix) spectral factors with exact values by Bauer's method for spectral factorization.

**4.3 Numerical methods for fast Bauer method**

The chapter considers the three methods solving the NME–FPI method, Newton method and GDARE.

**4.4 Fast Bauer method (scalar case)**

This section considers the fast Bauer method for scalar spectral factorization.

**4.5 Fast Bauer method (vector case)**

In this section using the fast Bauer method for matrix spectral factorization we obtain Alpert multiscaling and multiwavelet functions.

**4.6 Results and conclusions**

*Chapter 4* is devoted to developing Algorithms 1 and 2 for the fast Bauer method and solving them numerically according to three numerical methods. This is imposed by the main drawback of the classical Bauer method for spectral decomposition – the need to form Cholesky decomposition of a block Toeplitz matrix.

```

=====
Inputs:  $P_0, P_1, \dots, P_k$  (matrix coefficients of  $P(z)$ )
Outputs:  $C_0, C_1, \dots, C_k$  (matrix coefficients of  $H(z)$ )
Begin:
    If  $k > 1$ 
        Construct block matrices  $\hat{P}_0, \hat{P}_1$  to reduce the order to one,
         $k = 1$ ;
    end
Step 1: Find the matrix  $\hat{X}$  by solving  $(\hat{X} = P_0 - P_1^T \hat{X}^{-1} P_1)$  numerically;
Step 2: Find the matrix  $\hat{C}_0$  as the Cholesky factor of  $\hat{X}$  ( $\hat{X} = C_0 C_0^T$ );
Step 3: Find the matrix  $\hat{C}_1$  from  $\hat{C}_1 = \hat{P}_1 \hat{C}_0^{-T}$ ;
    If  $k > 1$ 
        Extract  $C_0, C_1, \dots, C_k$  from  $\hat{C}_0$  и  $\hat{C}_1$ ;
    end
End
=====

```

**Fig. 4.1** Algorithm 1: Fast Bauer's method

```

=====
Inputs:  $P_0, P_1, \dots, P_k$  (matrix coefficients of  $P(z)$ )
Outputs:  $C_0, C_1, \dots, C_k$  (matrix coefficients of  $H(z)$ )
Begin:
    If  $k > 1$ 
        Construct block matrices  $\hat{P}_0, \hat{P}_1$  so that  $k = 1$ ;
    End

|                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Using a suitable computer algebra system</b>                                                                                                     |
| <b>Step 1:</b> Set up a symmetric matrix $\hat{X}$ with symbol entries $x_{ij}$ ;                                                                   |
| <b>Step 2:</b> Set up and solve the nonlinear systems of equations:<br>$f(\hat{X}) = \hat{X} - \hat{P}_0 + \hat{P}_1^T \hat{X}^{-1} \hat{P}_1 = 0;$ |

Step 3: Find the matrix  $\hat{C}_0$  as the Cholesky factor of  $\hat{X}$  ( $\hat{X} = C_0 C_0^T$ );
Step 4: Find the matrix  $\hat{C}_1$  from  $\hat{C}_1 = \hat{P}_1^T \hat{C}_0^{-T}$ ;
    If  $k > 1$ 
        Extract  $C_0, C_1, \dots, C_k$  from  $\hat{C}_0$  и  $\hat{C}_1$ ;
    End
End
=====

```

**Fig. 4.2** Algorithm 2: Exact Bauer's method

The method is further complicated when finding a desired multiscaling function from a singular filter product, since despite the huge dimensions of the Toeplitz matrix ( $>10^6$ ) the convergence is even sublinear. The main advantage of BMB is the compilation and solution of NME with - FPI and Newton's methods. A major advantage and application of the developed *Algorithm 2* is finding desired orthogonal multiscaling functions with exact coefficients. This is verified by constructing orthogonal Alpert multifilter banks.

**CHAPTER 5****APPLICATIONS OF METHODS FOR CONSTRUCTIONS OF WAVELET AND MULTI-WAVELET FILTER BANKS****5.1 Applications of Bauer's methods for spectral factorization****5.1.1 Haar scaling function**

The Haar product filter is singular  $k = 1$  order para – Hermitian polynomial on the unit circle ( $z = -1$ ) with two double zeros,

$$p(z) = p_{-1}z^{-1} + p_0 + p_1z \quad (5.1)$$

where the coefficients are  $p_0 = 1, p_{-1} = \frac{1}{2}$ . After applying the exact Bauer's method for spectral factorization the spectral factor is:

$$h_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}. \quad (5.2)$$

An important characteristic and essential disadvantage of Bauer's method is the convergence of the diagonal value in block – band Toeplitz matrix:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{2n} \quad (5.3)$$

with an absolute error  $\varepsilon_{Haar} = \left| \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right|$  which means that to achieve the desired precision:

(a)  $\approx 10^{-9}$  the size of  $H_{n \times n}$  needs to be:

$$n = 10^4 \rightarrow \varepsilon_{Haar} = \left| \sqrt{1 + \frac{1}{10000}} - \left(1 + \frac{1}{20000}\right) \right| = 1.3 \times 10^{-9}.$$

(b)  $\approx 10^{-15}$  the size of  $H_{n \times n}$  needs to be:

$$n = 10^7 \rightarrow \varepsilon_{Haar} = \left| \sqrt{1 + \frac{1}{10^7}} - \left(1 + \frac{1}{2 \times 10^7}\right) \right| = 1.25 \times 10^{-15}.$$

Then, Bauer's method (classical version) is considered for spectral factorization of the Haar product filter with size  $n = 5-65 \times 10^3$  of block – band Toeplitz matrix. The numerical errors of the spectral factor and the product filter are shown in **fig.5.1** and are obtained by:

$$\begin{aligned} \varepsilon_h &= \|h(z) - h^{(n)}(z)\|_{\infty} \\ \varepsilon_p &= \|p(z) - h^{(n)}(z)h^{(n)}(z^{-1})\|_{\infty} \end{aligned} \quad (5.4)$$

where  $h^{(n)} = h_0^{(n)} + h_1^{(n)}z^{-1}$ .

**5.1.2 Daubechies scaling function**

The Daubechies 4 product filter

$$p(z) = p_3(z^{-3} + z^3) + p_2(z^{-2} + z^2) + p_1(z^{-1} + z) + p_0$$

is a singular  $k = 3$  order para – Hermitian polynomial on the unit circle with quadruple zeros  $z = -1$ ):

$$\begin{aligned}
p(z) &= h(z)h(z^{-1}) = \frac{1}{16}(-z^{-3} + 9z^{-1} + 16 + 9z - z^3) \\
&= -\frac{(1+z)^4(z^2 - 4z + 1)}{16}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

According to the exact Bauer's method the well-known spectral factor is:

$$h(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}}[(1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})z^{-1} + (3 - \sqrt{3})z^{-2} + (1 - \sqrt{3})z^{-3}]. \tag{5.6}$$

After applying Bauer's method for a Toeplitz matrix of size  $n = 58750$  the numerical error of the product filter is  $\varepsilon_p \approx 1.793 \times 10^{-10}$ , while of the spectral factor is  $\varepsilon_h \approx 1.534 \times 10^{-5}$  even for  $n = 65000$ .

### 5.1.3 Alpert multiscaling function

The Alpert matrix product filter is a singular  $k = 1$  order para - Hermitian polynomial on the unit circle ( $z = -1$ ) with quadruple zeros, i.e.  $\det P(z) = \frac{(1+z)^4}{16z^2}$ . After applying of Bauer's method for a size of Toeplitz matrix  $n > 10^4$  the error of matrix spectral factor is  $\varepsilon_H \approx 0.53 \times 10^{-6}$  for a Toeplitz matrix of size  $n > 10^4$ .

### 5.1.4 Fast Bauer method

#### 5.1.4.1 Scalar spectral factorization

##### A) Haar scaling function

The Haar product filter given in (5.1) has is with coefficients equal to  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = p_{-1} = 1/2$ . Then, the solution of the nonlinear scalar (matrix) equation (NME)

$$\begin{aligned}
x &= p_0 - p^2 x^{-1} \\
&= 1 - \frac{1}{4} x^{-1}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

is  $x = \frac{1}{2}$ . By using the Cholesky decomposition of the solution we find that

$$\begin{aligned}
x &= h_0 h_0 = h_0^2 \\
h_1 &= p_1^T h_0^{-1} = p_1 h_0^{-1}
\end{aligned}$$

which leads to the normalized Haar coefficients:

$$\begin{aligned}
h_0 &= \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
h_1 &= p_1 h_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

The fast Bauer method is fast, simple, and elegant. Moreover, the spectral factor can be found with exact values.

##### A) Daubechies 4 scaling function

Now, let us investigate the fast Bauer method for scalar spectral decomposition of higher order product filter. Such an example is the Daubechies 4 scaling function.

Obvious, the function is supported in the interval  $[0,3]$ . Therefore, in order to apply the fast Bauer method it is necessary to reduce the support of product filter to  $[0,1]$ . This means that the scalar product filter coefficients will be restructured into two matrix product coefficients, i.e.:

$$p(z) = \tilde{p}_1 z^{-1} + \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 z \tag{5.9}$$

където  $\tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_0 & p_1 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}$  и  $\tilde{p}_1 = \begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_3 & p_2 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$ .

The result is that finding scalar spectral factor with exact values becomes impossible. This is a result of the singularity of the matrix product filter with its quadruple zeros.

**5.1.4.2 Fast Bauer method for spectral factorization**

**(A) Using Algorithm 2**

The seven examples with different singularity (Table 5.4) of the scalar and matrix product filters are considered by applying the fast and the exact Bauer methods. The obtained spectral factors are with exact values. In addition, a new supercompact multiwavelet filter is found with smoothness  $S_{SUP} = 1.28$  which is better than  $CLS_{SUP} = 1.06$ .

The accuracy of the resulting matrix coefficients is calculated respectively:

- for coefficients of the scaling or the multiscaling function:

$$\varepsilon_H = \| C_0 - C_0^{(n)} \| \tag{5.10}$$

- for coefficients of the scalar or the vector product filter:

$$\varepsilon_P = \| P_0 - C_0^{(n)} [C_0^{(n)}]^T - C_1^{(n)} [C_1^{(n)}]^T \| \tag{5.11}$$

**Table 5.4** The characteristics of scalar case (example 2) and matrix cases (examples 1, 3–7)

Example	Singularity	Zeros of the unit circle
1	No	None
2	Yes	Two double
3	Yes	Two double
4	Yes	Quadruple
5	Yes	Quadruple
6	Yes	Quadruple
7	Yes	Decuple

**Example 1:** (Nonsingular para – Hermitian polynomial) [95].

This is nonsingular para – Hermitian matrix polynomial of order -2:

$$P(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} z^{-2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^2$$

which the determinant  $\det P(z) = \frac{(2z-1)(2-z)}{z}$  have zeros of  $\frac{1}{2}$  and  $2$ . Since the order is

greater than one a new  $4 \times 4$  matrix polynomial with matrix coefficients  $\hat{P}_0$  и  $\hat{P}_1$  is obtained. The

solution of NME  $X = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 145 & 8 & -34 \\ -2 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & -34 & 0 & 153 \end{bmatrix}$  leads to the matrix spectral factor with exact

coefficients:

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 17 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} z^{-1} + \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^{-2}.$$

**Example 2:** (*Haar scaling function*).

The scalar filter product

$$P(z) = z^{-1} + 2 + z = (1+z)(1+z^{-1}) = \frac{(1+z)^2}{z}$$

has double zeros ( $z = -1$ ). The solution of NME is  $x = 1$  which leads to nonnormalized Haar scaling function

$$H(z) = 1 + z^{-1}.$$

**Example 3:** (*Singular matrix polynomial*) [61].

The singular matrix polynomial

$$P(z) = \begin{bmatrix} 6 & 22 \\ 22 & 84 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 38 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 22 \\ 22 & 84 \end{bmatrix} z$$

for which  $\det P(z) = -\frac{(z+1)^2(z-1)^2}{z^2}$ , has two double zeros ( $z = \pm 1$ ), leads to the solution

$X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{bmatrix}$ , from which we construct the matrix spectral factor with exact values:

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} z.$$

**Example 4:** (*Integer Multiwavelet*) [32].

This is para – Hermitian matrix polynomial

$$P(z) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} z$$

for which  $\det P(z) = \frac{(1+z^{-1})^4}{8z^2}$ , has quadruple zeros ( $z = -1$ ). The solution of NME

$X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$  leads to the multiscaling function:

$$H(z) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

After multiplying of the spectral factor with  $C = \text{diag}(\sqrt{2}, 1)$  the well-known integer



multiscaling function is obtained [89]:

$$\tilde{H}(z) = \mathbf{C}H(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} z^{-1}$$

as its complementary function is the multiwavelet function

$$\tilde{G}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} z^{-1}.$$

**Example 5:** (A new supercompact multiwavelets).

The orthogonal CL multiscaling function [90]

$$H_{CL} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2+\sqrt{7}}{4} \\ 0 & \frac{2-\sqrt{7}}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{7}}{4} & 0 \\ \frac{2+\sqrt{7}}{4} & 0 \end{bmatrix} z^{-2}.$$

leads to the CL product matrix filter:

$$P_{CL}(z) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 1+\sqrt{7} \\ -(1+\sqrt{7}) & -\sqrt{7} \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & -(1+\sqrt{7}) \\ \sqrt{7}+1 & -\sqrt{7} \end{bmatrix} z$$

for which  $\det P_{CL}(z) = \frac{(4-\sqrt{7})(1+z)^4}{32z^2}$  and which has quadruple zeros on the unit circle. The

solution of the NME  $X = C_0 C_0^T$  is the symmetrical nonsingular matrix:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{7}+1 \\ \sqrt{7}+1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{7}+1 & \sqrt{8-2\sqrt{7}} \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{7}+1 & \sqrt{8-2\sqrt{7}} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Since, the square leads to two solutions

$$\begin{aligned} \sqrt{8-2\sqrt{7}} &= \sqrt{(1-\sqrt{7})^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}-1)} = \sqrt{(1-\sqrt{7})(1-\sqrt{7})}. \end{aligned}$$

then the two new orthogonal multiscaling functions are:

$$(M1) (\sqrt{7}-1): H(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{7}+1 & \sqrt{7}-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -\sqrt{7}-1 & \sqrt{7}-1 \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

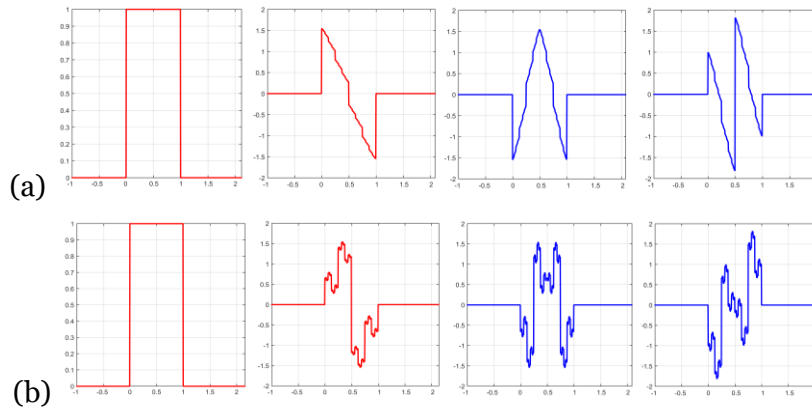
$$(M2) (1-\sqrt{7}): H(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{7}+1 & -(1-\sqrt{7}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -\sqrt{7}-1 & -(\sqrt{7}-1) \end{bmatrix} z^{-1} \right),$$

Their multiwavelet functions are found by QR decomposition:

$$(M1) \quad G(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -(1-\sqrt{7}) & -(1+\sqrt{7}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1-\sqrt{7} & -(1+\sqrt{7}) \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

$$(M2) \quad G(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -(1-\sqrt{7}) & 1+\sqrt{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1-\sqrt{7} & 1+\sqrt{7} \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

The pairs multiscaling and multiwavelet functions are shown in fig. 5.4.



**Fig. 5.4** The two new orthogonal supercompact multiscaling functions  $\Phi(t) = [\phi_0, \phi_1]^T$  (red) and multiwavelet functions  $\Psi(t) = [\psi_0, \psi_1]^T$  (blue; (a) (M1) (b) (M2))

**Example 6:** (Alpert multiscaling function).

The singular para – Hermitian product matrix polynomial

$$P(z) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} z$$

with  $\det P(z) = \frac{z^2(1+z)^4}{16}$  has quadruple zeros ( $z = -1$ ).

From  $X = P_0 - P_1^T X^{-1} P_1$  and Cholesky decomposition of the solution  $X = H_0 H_0^T$  is determined:

- first coefficient  $X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix};$

- second coefficient  $H_1 = P_1^T H_0^{-T} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

**Example 7:** (Legendre multiscaling function of order 5).

The singular para – Hermitian matrix polynomial with  $5 \times 5$  matrix coefficients  $P_0, P_1$ , the supercompact multfilter  $P(z) = P_0 + P_1 z^{-1}$ , where  $P_0 = I$  and

$$P_1 = \frac{1}{256} \begin{bmatrix} 128 & 64\sqrt{3} & 0 & -16\sqrt{7} & 0 \\ -64\sqrt{3} & -64 & 16\sqrt{15} & 16\sqrt{21} & -8\sqrt{3} \\ 0 & -16\sqrt{15} & -112 & -8\sqrt{15} & 24\sqrt{5} \\ -64\sqrt{7} & 16\sqrt{21} & 8\sqrt{35} & -40 & -39\sqrt{7} \\ 0 & 8\sqrt{3} & 24\sqrt{5} & 39\sqrt{7} & 53 \end{bmatrix} \quad \text{with } \det P(z) = \frac{(z+1)^{10}}{z^5 2^{25}} \quad \text{and ten}$$

zeros on the unit circle. The solution leads to the multiscaling function:

$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{32} \left( \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3} & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\sqrt{15} & 4 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 2\sqrt{21} & -2\sqrt{35} & 2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 6\sqrt{5} & 3\sqrt{7} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8\sqrt{3} & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{15} & 4 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{7} & 2\sqrt{21} & 2\sqrt{35} & 2 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 6\sqrt{5} & -3\sqrt{7} & 1 \end{bmatrix} z^{-1} \right)$$

The numerical errors for the product filter in **examples 1–7**  $\varepsilon_p$  and for the spectral factor  $\varepsilon_H$ , as a result of a fixed-point iteration and Newton’s method obtained with *Algorithm 1* fast Bauer method are shown in **fig.5.5** and **fig. 5.6**. The results show big differences in the convergence for the two methods.

**Б) Using built-in functions**

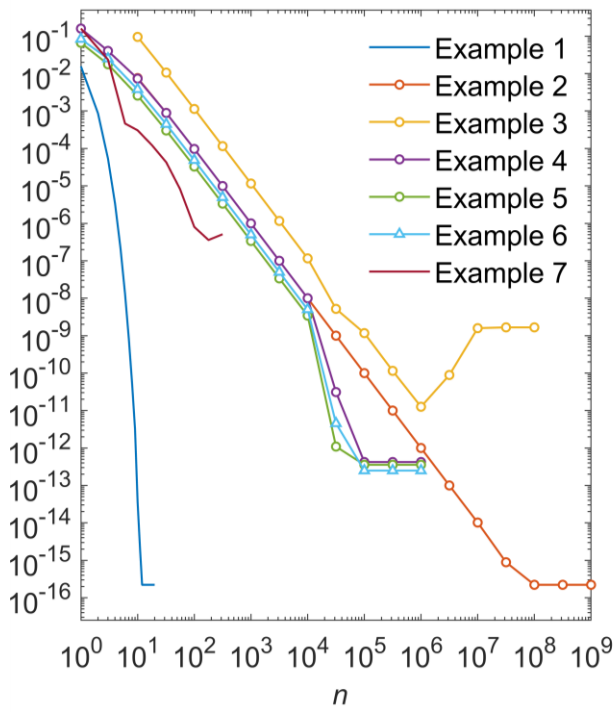
The results from the built – in functions ‘*dare*’ and ‘*idare*’ for solve of GDARE are:

**Maple** - The results of the numerical errors for solving of GDARE with ‘*dare*’ in *Maple* (**Table 5.6**) show a high precision of the spectral factorization. Further, obtaining of a high-precision spectral factor ( $\sim 10^{11}$ ) can be achieved only for nonsingular polynomial (*Example 1*). In cases of para – Hermitian matrix polynomials that possess multiple zeros on the unit circle the achieved precision is very low ( $\sim 10^4$ ) (*Examples 4–7*). Moreover, in cases of para – Hermitian matrix polynomials that possess double zeros or with different signs ( $z=\pm 1$ , *Example 3*) on the unit circle, the obtained solution is incorrect. Therefore, using the built-in function is not recommended.

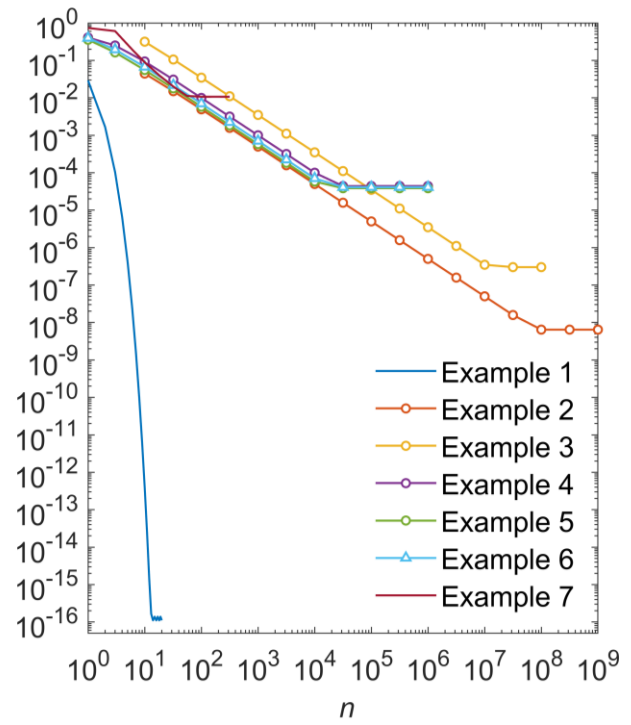
**Matlab** - Although achieving better accuracy (**табл. 5.7**) in comparison with *Maple*, for singular para – Hermitian matrix polynomials with multiple zeros, or with double zeros, or with different signs on the unit circle, only the R2018a version provided solutions. Only the precision of the solution of the NME and the spectral factor for **example 7** (with decuple zeros) is lower than *Maple*.

**Table 5.6** Errors  $\varepsilon_X$ ,  $\varepsilon_H$ , and  $\varepsilon_p$  for **examples 1–7**, using the ‘*dare*’ in Maple 17

Example	$\varepsilon_X$	$\varepsilon_H$	$\varepsilon_p$
<b>1</b>	2.35e-11	7.01e-11	3.29e-9
	$p_0 = 2, p_1 = 1$		
<b>2</b>	1.22e-8	6.10e-9	0
	$p_0 = 1, p_1 = 1/2$		
	6.10e-9	4.50e-9	5.55e-17
<b>3</b>	Incorrect solution $X$		
<b>4</b>	5.95e-4	5.95e-4	6.59e-10
<b>5</b>	1.69e-4	2.90e-4	6.59e-10
<b>6</b>	2.20e-4	5.95e-4	2.64e-10
<b>7</b>	2.61e-3	4.41e-2	7.82e-3

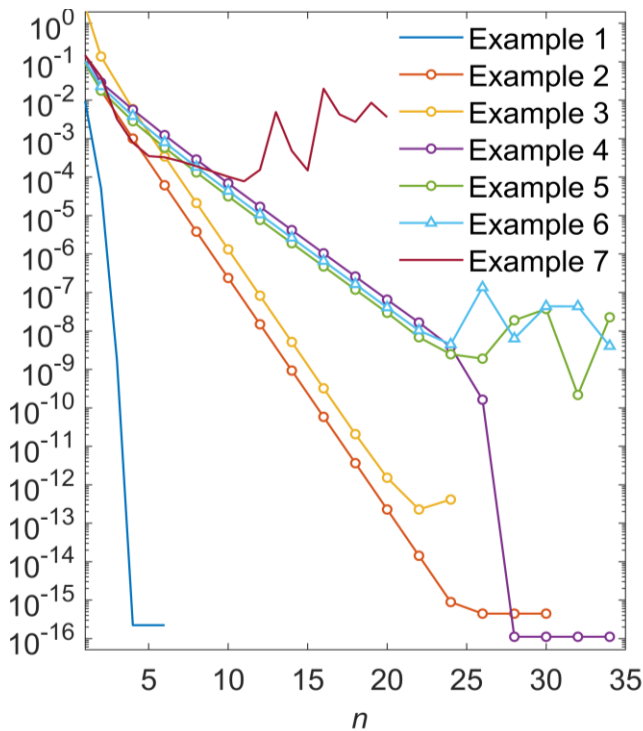


(a)

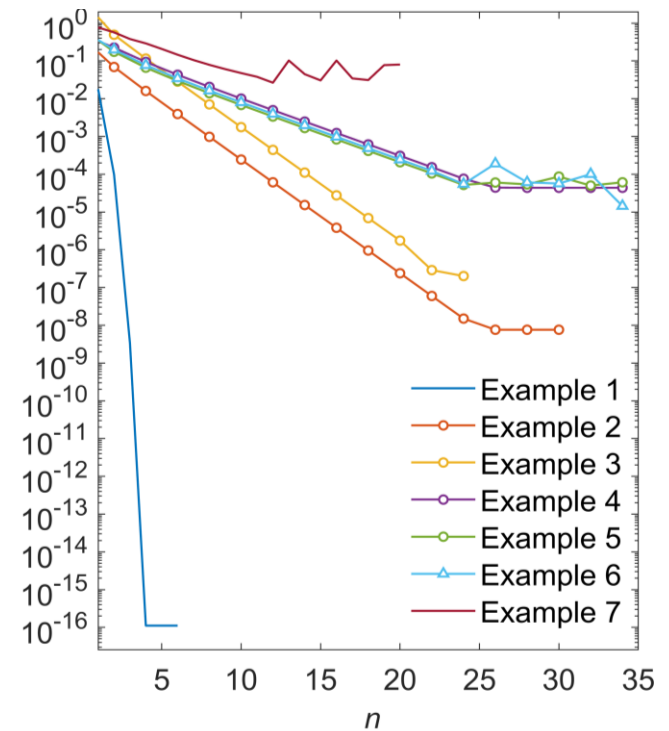


(b)

**Фиг. 5.5.** Log–log plots of the numerical errors obtained by fixed point iteration (FPI) applied to the fast Bauer method (FBM) for scalar and matrix spectral factorization of the product filter.  
 (a) the residuals  $\varepsilon_p$  (b) the errors  $\varepsilon_H$  of the spectral factor.



(a)



(b)

**Фиг. 5.6.** Log–log plots of numerical errors obtained by Newton method applied to the fast Bauer method (FBM) for scalar and matrix spectral factorization of the product filter;  
 (a) the residuals  $\varepsilon_p$  (b) the errors  $\varepsilon_H$  of the spectral factor.

Таблица 5.7

Numerical errors  $\varepsilon_X$ ,  $\varepsilon_H$ ,  $\varepsilon_P$  of examples 1–7 by using build-in functions ('dare' и 'idare') for 14 Matlab versions

Matlab verion	Example	$\varepsilon_X$	$\varepsilon_H$	$\varepsilon_P$
<b>R2011a (DARE)</b> <b>R2012a (DARE)</b>	<b>1</b>	1.78e-15	5.55e-17	5.90e-16 6.11e-16 ( <b>R2011a</b> )
	<b>2</b>	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions, Report = -1*		
		----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$		
		4.95e-09	3.50e-09	0
	<b>3</b>	1.49e-06	8.31e-07	5.68e-14
	<b>4</b>	No solutions. Report = -1*		
	<b>5</b>	No solutions. Report = -1*		
<b>6</b>	No solutions. Report = -1*			
	<b>7</b>	0.00105	0.0137	1.09e-10
<b>R2015a (DARE)</b> <b>R2016a (DARE)</b>	<b>1</b>	1.78e-15	5.55e-17	4.44e-16
	<b>2</b>	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No Solutions. Report = -1*		
		$p_0 = 1, p_1 = 1/2$		
		4.95e-09	3.50e-09	0
	<b>3</b>	1.49e-06	8.31e-07	5.69e-14
	<b>4</b>	No Solutions. Report = -1*		
	<b>5</b>	No Solutions. Report = -1*		
	<b>6</b>	No Solutions. Report = -1*		
	<b>7</b>	0.00111 ( <b>R2016a</b> )	0.0147 ( <b>R2016a</b> )	1.53e-11 ( <b>R2016a</b> )
<b>R2018a (DARE)</b>	<b>1</b>	7.11e-15	4.16e-17	1.78e-15
	<b>2</b>	$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions, Report = -1*		
		----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$		
		7.00e-09	4.95e-09	5.55e-17
	<b>3</b>	1.56e-06	7.98e-07	9.95e-14
	<b>4</b>	5.45e-05	5.45e-05	8.88e-16
	<b>5</b>	3.58e-05	6.16e-05	6.66e-14
<b>6</b>	4.32e-05	6.12e-05	4.44e-16	
	<b>7</b>	0.00108	0.01418	1.978e-11

Таблица 5.7 (continued)

Matlab verion	Example	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_H$	$\varepsilon_p$
	<b>1</b>	3.55e-15	1.11e-16	3.55e-15
		$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions. Report = -1*		
<b>R2019a (IDARE)</b>	<b>2</b>	----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$		
<b>R2019b (IDARE)</b>		5.55e-09	3.92e-09	0
<b>R2020a (IDARE)</b>	<b>3</b>	No solutions. Report = 3**		
<b>R2020b (IDARE)</b>	<b>4</b>	No solutions. Report = 3**		
<b>R2021a (IDARE)</b>	<b>5</b>	4.45e-05	7.64e-05	2.29e-13
<b>R2021b (IDARE)</b>	<b>6</b>	4.33e-05	6.12e-05	8.88e-16
<b>R2022a (IDARE)</b>	<b>7</b>	0.00101	0.0131	9.50e-11 (R2022a,b) 1.46e-10
	<b>1</b>	5.33e-15	8.88e-16	3.55e-15
		$p_0 = 2, p_1 = 1$ No solutions. Report = 3**		
	<b>2</b>	----- $p_0 = 1, p_1 = 1/2$		
		No solutions. Report = 3**		
<b>R2021a</b>	<b>3</b>	8.54e-07	6.44e-07	1.56e-13
<b>Update 4 (IDARE)</b>	<b>4</b>	No solutions. Report = 3**		
	<b>5</b>	No solutions. Report = 3**		
	<b>6</b>	4.73e-05	6.69e-05	8.88e-16
	<b>7</b>	9.87e-04	0.01277253	2.97e-10

**Legend:**

\*Report -1 – meant “the associated symplectic pencil has eigenvalues on or very near the unit circle”;

\*\*Report 3 – means “The symplectic spectrum has eigenvalues on the unit circle”;

**5.1.5 Comparative Analysis of Bauer’s methods**

The main advantage of Bauer's method is the ability to find a spectral factor, and the main disadvantage is the need for the Cholesky decomposition of an  $n \times n$  Töpletz matrix of large dimensions (more than  $n=65 \times 10^3$ ). A major advantage of the fast Bauer method in first-order product filter decomposition is the avoidance of the Toeplitz matrix decomposition, which makes the method fast, simple, and elegant. The other important advantage is the exact values of the spectral factor and the product filter. This allows for simplified hardware schemes to implement filter or multi-filter banks. A major drawback of Bauer's fast method is that, due to the strong influence of unit axis roots in scalar spectral decomposition, it is not guaranteed to find a spectral factor with exact values (Daubeschies 4 scaling function).

## 5.2 Applications of orthogonal multifilter banks

### 5.2.1 The lifting scheme of Alpert multiwavelet filter bank with diadic approximation of $\sqrt{3}$ and applied to 2D signals

The influence of 2- and 3-bits quantization of  $\sqrt{3} = a/b$  in the lifting scheme is considered for balanced and non balanced Alpert multiwavelet filter bank. PSNRs for 3-bits in balanced and nonbalanced multifilter lead to high-quality images, while 2-bits quantization lead to big errors. Hence, for nonbalanced filter bank and 2-bits quantization for all decomposition levels  $J > 1$  the obtained images have a mesh structure as well as for balanced filter bank for  $J \geq 4$  artifacts appear. Therefore, 3-bits quantization is necessary to achieve high-quality image for two types balancing.

### 5.2.2 Comparative analysis of three orthogonal multifilters for denoising of gray-levels image

Signal denoising is one of the most common applications. It is the shrinking, suppressing, or removal, if possible of the noise.

In this research is consider an input signal  $s$  with AWGN,  $e \sim N(0, \sigma^2)$  and obtain the denoising signal  $\hat{s}$ . The technique for denoising the signal  $s$  (gray level images) is the multiwavelet transform that possesses the important property that the input signal energy is concentrated in several wavelet coefficients, the noise energy in subbands with Gaussian distribution. The 'hard' and 'soft' threshold values are selected. The highest PSNR for 'hard' threshold is obtain for denoising with Alpert multifilter, while for 'soft' threshold – GHM.

### 5.2.3 Comparative analysis of orthogonal scalar and vector filters for image compression of astronomical image from scanned photograph plates

The Haar – like, Daubechies - like multiwavelet filter banks [86], [87] with its scalar versions and GHM multifilter are compared for compression of astronomical images from scanned photograph plates. The results shows better quality of compression for such a type images with Haar – and Daubechies like multiwavelets. Extremely effective for lossless compression for images with highly non-smooth areas of uniform intensity is the Haar – like multiwavelet filter bank to 5 decomposition level. A disadvantage of scalar Daubechies filter bank is the existence of structure dependence in the astronomy image from scanned photograph plates.

## 5.3 Results and conclusions

Chapter 5 shows fast Bauer method compared with the classical method, and the finding of scalar or matrix spectral factor without Cholesky decomposition of  $n \times n$  Toeplitz matrix and with exact coefficients.

To avoid unwanted defects in image processing of gray-level images it is quite enough the 3-bit quantization of the coefficient  $\sqrt{3}$  with balanced or nonbalanced Alpert multiwavelet filter bank.

The balanced Alpert multiwavelet filter bank, despite its shorter length and smaller coding gain, achieves a higher PSNR compared to GHM and CL multifilters for image denoising of some test gray levels images. Moreover, for gray image 'Lizard' the balanced and nonbalanced Alpert filter achieve better PSNR.

Compression of astronomy images from scanned photograph plates is achieved by using of multifilter version of scalar filters - Haar – like or Daubechies - like multiwavelet filter banks.

## CONCLUSION

The dissertation investigates problems related to new methods for developing scaling or multiscaling functions satisfying orthogonal or non-orthogonal conditions.

Four explicit and simple methods have been developed and investigated to prove the hypothesis that multiwavelength filter banks can be constructed from different basis functions (polynomials, splines) and that Bauer's method of spectral decomposition can be used to derive desired multiwavelength filter banks.

The contributions are in the field of wavelet theory. It is possible to consider and apply other polynomials and spline functions not considered in the dissertation.

A big attention needs to be paid to the development of Bauer's method for the matrix spectral decomposition of low degree singular matrix polynomials that avoids the Cholesky decomposition of large Toeplitz matrices. From a mathematical point of view - it solves multidimensional singular matrix polynomials, and from an engineering point of view - it solves the problem of finding orthogonal multiscaling functions with desired smoothness.

Two algorithms of Bauer's spectral decomposition method for singular matrix polynomials are developed for the first time. Its numerical errors using the fixed point and the Newton numerical methods were studied, as well as solutions of NME for 14 versions of Matlab ('*dare*' and '*idare*') and Maple 17 ('*dare*').

Moreover, the obtained matrix spectral factors are with exact values. One example is the Alpert matrix product filter which is constructed for the first time.

Scalar and multiwavelet filter banks of Haar and Daubechies, Haar – like and Daubechies - like, CL, Alpert, and GHM for denoising and compression of gray-level images are considered.

The process of design is based on basic matrix algebra so that it can be easily and conveniently used by both students and researchers.

## FUTURE DEVELOPMENT

Modern signal processing is undergoing rapid development in the analog and discrete domains. In particular, the wavelet theory is part of basic research in many fields. Therefore, a new direction is the development and generalization of the theory of spectral matrix decomposition for the multivariable case. This can lead to improved denoising, compression, or mixed signal processing in the big-data area.

Another new direction is the implementation of the lifting scheme, and software or hardware implementations of the orthogonal multiwavelet filter banks.

In this scientific study, the scientific results are applied in the processing of gray-level test images. The investigation and proof of the advantages of the obtained new multi-filter banks in color photos or video processing is another task for future research.



## AUTHOR CONTRIBUTIONS

### Scientific results

1. Three elegant, simple and fast methods for deriving the matrix recursion coefficients of scalar and vector functions are constructed: basis change, brute force and inner product .
2. For first time a two-channels Alpert matrix product filter is constructed.
3. Two new orthogonal supercompact multiscaling functions are obtained by using fast Bauer method for matrix spectral factorization and their complementary orthogonal supercompact multiwavelet functions are obtained.

### Scientific - applied results

1. By using the three methods and Bauer's method of spectral factorization scaling or multiscaling functions from  $B$ -spline, qudtrac  $B$ -spline, cubic and quintic Hermitian spline and Legendre polynomials are designed.
2. Two new algorithms for fast and exact Bauer methods are constructed.
  - (a) *Algorithm 1* – fast Bauer's method;
  - (б) *Algorithm 2* – exact Bauer's method;

The author has constructed two numerical methods (based on the fixed-point iterations technique and based on the Newton method) for solving of singular NMEs. Comparitive analysis of build-in functions '*dare*' и '*idare*' in Maple and Matlab for solving of singular NMEs by Generalized Discrete Time Algebraic Riccati Equation (GDARE) of Seven examples are detail considered in detail.

3. A novel lifting scheme for the Alpert multiwavelet filter bank with two types quantization of coefficient  $\sqrt{3}$  is constructed. It is applied in filter banks to gray-level images without additional processing.
4. The multiplierless modules for analysis and syntesis of a perfectly restorative bio-orthogonal  $5/3$  filter bank on Xilinx's Virtex and Spartan series are implemented.

## AUTHOR PUBLICATIONS

**Kolev V.**, Wavelet and multiwavelet orthogonal filters, Proceedings of university of Rouse', vol.46, book.3.1, pp.97 – 101, 2007, (*in Bulgarian*).

**Kolev V.**, *Universal representation of orthogonal wavelet and multiwavelet filters*, 2<sup>nd</sup> scientific conf. with inter. participations, College“Telematics”, St. Zagora, pp.197–214, 2008.

**Kolev V.**, *Orthogonal Multifilters Image Processing of Astronomical Images from Scanned Photographic Plates*, ACM Inter. Conf. Proc. Series 471, pp. 490 – 495, 2010.

**Kolev V.**, Cooklev T., Keinert F., *Design of a simple orthogonal multiwavelet filter by matrix spectral factorization*, Circuits, Systems and Signal Processing, vol. 39, pp. 2006–2041, 2020.

**Kolev V.**, Cooklev T., Keinert F., *Bauer's Spectral Factorization Method for Low Order Multiwavelet Filter Design*, Journal of Comp. and Applied Math., vol. 441, 115713, 2024.

## REFERENCES

- [1] Богданова Б., Анализ на финансови времеви редове чрез трансформация с вълнички, Монография, Ди Ем Ай Дивелопмънт ЕООД, София, 2015. ISBN 978-954-939-930-1.
- [2] Богданова Б., Недев Б., Анализ на цикличните компоненти на борсовия индекс S&P500 чрез трансформация с вълнички, Икономически и социални алтернативи, брой 4, стр. 95 – 105, 2019.
- [3] Велчев Ю., Алгоритми за компресия на електрокардиографски сигнали, ТУ-София, EUT+ Academic Press, 2022, ISBN: 978-619-92237-2-7
- [4] Манчева В., Даскалов П., Уейвлит базиран подход за синтез на признаци за класифициране на здрави и заразени с Фузариум царевични зърна, Научни трудове на Русенски университет, том 50, серия 3.1, стр. 208 – 215, 2011.
- [5] Методиев К., Определяне на когнитивното натоварване на оператор БЛА чрез измерване разширението на зеницата, Proceedings of 17<sup>th</sup> Intern. Scientific Conference Space, Ecology, Safety, 20–22 October 2021, Sofia, Bulgaria, стр. 139 – 144.
- [6] Недев Б., Сплайн-функциите – Теория и приложения, Годишник на Стопанския факултет на СУ „Св. Климент Охридски, том 19, по. 1, pp.129-146, 2020.
- [7] Трифонов Т., Иванов И., Статистически анализ и моделиране чрез уейвлети, сп. Статистика, бр.2, стр. 91-101, 2005.
- [8] Йорданов С., Иванов С., Тодоров Т., Михалев Г., Интелигентна система за окачествяване на хранителни продукти базирана на ESP32 и газови сензори, сп. Информатика и иновативни технологии, по. 2-3, стр. 53–63, 2019.
- [9] Турсунов Д. А., Применение сплайн-вейвлетов для решения интегро-дифференциальных уравнений, Известия АлтГУ., по.1, 2011.
- [10] Турсунов Д. А., Применение кубических мультвейвлетов к численному решению дифференциальных уравнений второго порядка с условием Неймана, Вестник ОшГУ., по 3., 2012.
- [11] Турсунов Д.А., Шумилов Б.М., Кудуев А.Ж., Турсунов Э.А., Мультвейвлеты седьмой степени, ортогональные с производными второго порядка. Вестник ОшГУ, по. 3, 2012.
- [12] Anderson B., Continuity of the spectral factorization operation, Math. Appl. Comput., vol.4, no.2, pp. 139 – 156, 1985.
- [13] Узунов А, Детекция на говор в системи за разпознаване на диктори, Дисертация, ИИКТ- БАН, 2020.
- [14] Anderson B., Hitz K., Diem N., Recursive algorithm for spectral factorization, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 21, no.6, pp. 742 – 750, 1974.
- [15] Alpert B., A class of bases in  $L^2$  for the sparse representation of integral operators, SIAM J. Math. Anal., vol. 24, no.1, pp. 246 - 262, 1993.
- [16] Alpert B., Beylkin G., Gines D., and Vozovoi L., Adaptive solution of partial differential equations in multiwavelet bases, J. Comput. Phys., vol. 182, no. 1, pp.149-190, 2002.
- [17] Ahlberg, Nielson, and Walsh, The Theory of Splines and Their Applications, 1967.
- [18] Arnold W.I., Laub A.J., Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic riccati equations, Proc. IEEE, vol. 72, pp. 1746 – 1754, 1984.
- [19] Birkhoff D., Fluid dynamics, reactor computations, and surface representation, in “A History of Scientific Computation”, S. Nash, Ed., 1990.
- [20] Barclay S., Continuity of the spectral factorization mapping, J. Lond. Math. Soc., vol. 2, no. 70, pp. 763–779, 2004.

- [21] Bartels, Beatty, and Barsky, An Introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling, 1987.
- [22] Battle G., A block spin construction of ondelettes, part I: Lemarid functions, *Comm. Math. Phys.*, vol. 110, pp. 601 – 615, 1987.
- [23] Bauer F.L., Ein direktes iterations verfahren zur Hurwitz-zerlegung eines polynoms, *Archiv Elektrische Uebertragung*, vol. 9, pp. 285–290, 1955.
- [24] Bauer F.L., Beitrage zur entwicklung numerischer verfahren fur programmgesteuerte rechenanlagen, II. Direkte faktorisierung eines polynoms. Sitzung Bericht Bayerischen Akademische Wissenschaften, pp. 163–203, 1956.
- [25] Beylkin G., Coifman R., Rokhlin V., Fast wavelet transforms and numerical algorithms. I, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 44, pp. 141 – 183, 1991.
- [26] Birkhoff G. and de Boor C., Piecewise polynomial interpolation and approximation, *Approximation of Functions* (H. L. Garabedian, ed.), Elsevier, New York, pp. 164 – 190, 1965.
- [27] Boche H. & Pohl V., Calculating the spectral factorization and outer functions by sampling-based approximations – Fundamental limitations, *Journal of Approximation Theory*, vol. 257, 105450, 2020.
- [28] Bogert B. P., Healy J. R. and Tukey J. W., The quefrency analysis of time series for echoes cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum, and saphe cracking, *Proc. of the Symposium on Time Series Analysis*, pp. 209 -243, 1963.
- [29] Callier F.M., On polynomial spectral factorization by symmetric extraction, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 30, no. 5, pp. 453 – 464, 1985.
- [30] Charoenlarnopparut C., One-dimensional and multidimensional spectral factorization using Gröbner basis approach. in *Asia-Pacific Conference on Communications (2007)*, pp. 201 – 204, 2007.
- [31] Chen X. and Parks T. W., Design of optimal minimum phase FIR filters by direct factorization, *Signal Processing*, vol. 10, pp. 369 – 383, 1986.
- [32] Cheung K.-W., Cheung C.-O., Po L.-M., Novel multiwavelet-based integer transform for lossless image coding, in *ICIP'99*, vol. 1, pp. 444–447, Kobe, Japan, 1999.
- [33] Childers D.G., Skinner D.P., Kemerait R.C., The cepstrum: a guide to processing, *Proc. of the IEEE*, vol. 65, no 10, pp. 1428 – 1443, 1977.
- [34] Chui C., *Introduction in wavelets*, Elsevier, Academic Press, 2001.
- [35] Chui C.K. and Lian J., A study on orthonormal multiwavelets, *J. Appl. Numer. Math.*, vol. 20, pp. 272 – 298, 1996.
- [36] Chui C. K, and J. Wang, A cardinal spline approach to wavelets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 113, no. 3, pp. 785 – 793, 1991.
- [37] Cohen A., Daubechies I., P.Vial, Wavelets on the interval and fast wavelet transforms, *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, vol.1, pp. 54 – 81, 1993.
- [38] Cooklev T., Nishihara A., Kato M. and Sabalatsh M., Two - channel multifilter banks and multiwavelets, *IEEE Int. Conf. ASSP*, pp. 2769 – 2773, 1996.
- [39] Cotronei M., Montefusco L. B., and Puccio L., Multiwavelet analysis and signal processing, *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, vol. 45, no. 8, pp. 970 – 987, 1998.
- [40] Cui L. and Cong R., Construction for a class of interpolation multiscaling functions with dilation factor  $a \geq 3$ , *Comp. and Math. with Appl.*, vol. 56, pp. 2948 – 2956, 2008.
- [41] Dahmen W., Wavelet methods for PDEs—some recent developments, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 128, pp. 133 – 185, 2001.
- [42] Davis P., B-splines and Geometric design, *SIAM News*, vol. 29, no. 5, 1996.

- [43] Daubechies I., Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [44] Daubechies I., Cohen A., Plonka G., Regularity of refinable function vectors, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol.3, no. 3, pp. 295 – 324, 1997.
- [45] Dijkema T.J., Schwab C., and Stevenson R., An adaptive wavelets method for solving high-dimensional elliptic PDEs, *Constr. Approx.*, vol. 30, pp. 423 – 455, 2009.
- [46] Djokovic I. and Vaidyanathan P. P., On optimal analysis/synthesis filters for coding gain maximization, *IEEE Ttrans. On Signal Processing*, vol. 44, no. 5, 1996.
- [47] Donoho D.L., Dyn N., and Levin D., Smooth Multiwavelets Duals of Alpert Bases by Moment-Interpolating Refinement, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol.9, pp. 166 – 203, 2000.
- [48] Donoho D.L., Johnstone I.M., Ideal spatial adaption via wavelet shrinkage, *Biometrika*, vol. 81, no. 3, pp. 425 – 455, 1994.
- [49] Donovan G.C., Geronimo J.S., and Hardin D.P., Orthogonal polynomials and the construction of piecewise polynomials smooth wavelets, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 30, pp. 1028-1056, 1999.
- [50] Donovan G.C., Geronimo J.S., Hardin D.P., and Massopust P.R., Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions, *SIAM J. Math. Anal.*, vol.27, pp. 1158– 1192, 1996.
- [51] Donovan G.C., Geronimo J.S., and Hardin D.P., Intertwining multiresolution analyses and the construction of piecewise polynomial wavelets, *SIAM J. Math. Anal.*, vol.27, pp. 1791–1815, 1996.
- [52] Donovan G., Geronimo J. S., Hardin D. H., A class of orthogonal multiresolution analyses in 2D, in “Mathematical methods for curves and surfaces”, Edited by M. Daehlen, T. Lyche, L. L. Schumaker, pp.99 – 110, 1995.
- [53] Dritschel M.A., On factorization of trigonometric polynomials, *Integral Equ. Oper. Theory*, 49(1), pp. 11– 42, 2004.
- [54] Du B., Xu X., Dai X., Minimum-phase FIR precoder design for multicasting over MIMO frequency selective channels. *J. Electron. (China)*, vol. 30, no. 4, pp. 319 – 327, 2013.
- [55] Garnett J.B., Bounded Analytic Functions, Academic Press, 1981.
- [56] Georgiou T.T., Khargonekar P.P., Spectral factorization of matrix-valued functions using interpolation theory, *IEEE Trans. Circuit. Syst.*, vol.36, no.4, pp.568 – 574, 1989.
- [57] Geronimo J. S., Hardin D. H. and Massopust P. R., Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions, *J.Approx. Theory*, vol. 78, pp. 373–401, 1994.
- [58] Goodman T.N.T., Micchelli CA, Rodriguez G, Seatzu S., Spectral factorization of Laurent polynomials, *Advances in Computational Mathematics*, vol. 7, pp. 429 – 445, 1997.
- [59] Ephremidze L., Janashia G., Lagvilava E., A new efficient matrix spectral factorization algorithm., *SICE Annu. Conf.* 2007, pp. 20 – 23, 2007.
- [60] Ephremidze L., Janashia G., and Lagvilava E., A simple proof of the matrix-valued, Fejer-Riesz theorem, *Journal of Fourier Analysis and Applic.*, 15(1), pp.124-127, 2009.
- [61] Ephremidze L., Saied F., Spitkovsky I., On the algorithmization of Janashia-Lagvilava matrix spectral factorization method. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 64(2), pp.728–737, 2018.
- [62] Frazier M. W., An Introduction to wavelets through linear algebra, 1999.
- [63] Hardin D.P., Kessler B., and Massopust P.R., Multiresolution analyses and fractal functions, *J. Approx. Theory*, vol. 71, pp. 104–120, 1992.
- [64] Hardin D. P., Marasovich J.A., Biorthogonal multiwavelets on  $[-1,1]$ , *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 7, pp. 34–53, 1999.
- [65] Hardin D. P., and Roach D. W., Multiwavelet prefilters I: orthogonal prefilters preserving approximation order  $p \leq 2$ , *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, vol.45, no. 8, pp.1106 - 1112, 1998.

- [66] Heil C., Strang G., and Strela V., Approximation by translates of refinable functions, *Numer. Math.*, vol.73, no.1, pp. 75 - 94, 1996.
- [67] Heisenberg W., Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik* (in German), vol. 43, no. 3 – 4, pp. 172 – 198, 1927.
- [68] Hildebrandt K., Schulz C., von Tycowicz C., Polthier K., Interactive spacetime control of deformable objects, *ACM Trans. on Graph.*, vol. 31, no. 4, pp. 71:1 – 71:8, 2012.
- [69] Hsung T.C., Sun M.C., Lun D.P.K., Siu W.C., Symmetric prefilters for multiwavelets, *IEE Proc.-Vision, Image and Signal Proc.*, vol. 150, no. 1, pp. 59 –68, 2003.
- [70] Hsung T.-C., Lun D. P., Shum Y.-H., Ho K. C., Generalized discrete multiwavelet transform with embedded orthogonal symmetric prefilter bank, *IEEE Trans. Signal Proc.*, 1(55), pp. 5619-5629, 2007.
- [71] Fejér L., Über trigonometrische polynome. *J. Reine Angew. Math.(Crelles J.)*, vol.146, pp. 53–82, 1916.
- [72] Jacob B., Winkin J., Zwart H., Continuity of the spectral factorization on a vertical strip, *Systems Control Lett.*, vol. 37, pp. 183 – 192, 1999.
- [73] Jia R.-Q., Liu S.-T. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval, *Advances Computational Mathematics*, vol. 25. 2006.
- [74] Jiang Q., On the regularity of matrix refinable functions, *SIAM J. Math. Anal.*, vol.29, pp. 1157–1176, 1998.
- [75] Jiang Q., On the design of multifilter banks and orthogonal multiwavelet bases, *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 46, no. 12, pp. 3292 - 3303, 1998.
- [76] Femandes F. and Burrus S., Multiwavelet systems with disjoint multiscaling functions, *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 3, pp.1205-1208, 1999.
- [77] Femandes F. and Burrus S., *M*-band multiwavelet systems, *Proc. IEEE ICASSP*, March, 1999.
- [78] Fischer R.F.H., Sorted spectral factorization of matrix polynomials in MIMO communications. *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, no.6, pp. 945 – 951, 2005.
- [79] Gan L., Ma K.-K., On minimal lattice factorizations of symmetric-antisymmetric multifilterbanks, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 53, no. 2, pp. 606 – 621, 2005.
- [80] Hardin D. P., Hogan T. A, and Sun Q., The matrix-valued Riesz lemma and local orthonormal bases in shift-invariant spaces, *Advances in Computational Mathematics*, 20(4), pp.367-384, 2004.
- [81] Hansen M., Christensen L.P.B., Winther O., Computing the minimum-phase filter using the QL factorization, *IEEE Trans. Signal Process.*, 58(6), pp. 3195 – 3205, 2010.
- [82] Kalathil S., Elias E., Prototype filter design approaches for near perfect reconstruction cosine modulated filter banks:a review, *J. Signal Process. Syst.*, 81(2), pp.183–195, 2015.
- [83] Kemerait R., Childers D., Signal detection and extraction by cepstrum techniques, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, no.6, pp. 745 – 759, 1972.
- [84] Kishore A., Chaitali C., A VLSI architecture for lifting-based forward and inverse wavelet transform, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(4), pp.966–977, 2002.
- [85] **Kolev V.**, Multiplierless modules for forward and backward integer wavelet transform, In *Proceedings of the 4th international conf. on Computer systems and technologies: e-Learning*, pp. 284-289. 2003.
- [86] **Kolev V.**, Уейвлет и мултиуейвлетни ортогонални филтри, *Научни трудове на Русенски университет, том 46, серия 3.1, стр. 97 – 101, 2007.*
- [87] **Kolev V.**, *Universal* representation of orthogonal wavelet and multiwavelet filters, *Втора научна конференция с международно участие, Висше училище – колеж “Телематика”, стр. 197–214, 2008.*
- [88] **Kolev V.**, Orthogonal multifilters image processing of astronomical images from scanned photographic plates, *Proc. of the 11th Inter.Conf. on Comp. Systems and Technologies and Workshop for PhD Students*

in Computing on Inter. Conf. on Comp. Systems and Technologies, ACM Inter. Conf. Proc.Series 471, pp.490–495, 2010.

- [89] **Kolev V.**, Cooklev T., Keinert F., Design of a simple orthogonal multiwavelet filter by matrix spectral factorization, *Circuits, Systems and Signal Proc.*, 39(4),pp.2006–2041, 2020.
- [90] **Kolev V.**, Cooklev T., Keinert F., Bauer's spectral factorization method for low order multiwavelet filter design, *Journal of Comp. and Applied Math.*, vol. 441, 115713, 2024.
- [91] Koosis P., *Introduction to spaces*, Cambridge University Press, 1980.
- [92] Konstantinov M., Pasheva V., Petkov P., Numerical Issues in using MATLAB, *Числени аспекти при използване на MATLAB*, Union of Bulgarian Mathematicians, 41(1), pp. 239 – 246, 2012.
- [93] Konstantinov M., Todorov V., Pelova G., Boneva J., Using MATLAB in technical universities, *Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians Albena*, April 6–10, pp. 347 – 353, 2010.
- [94] Krein M.G., Integral equations of the half–line with kernel depending upon he difference of the arguments, *Uspechi Mat. Nauk.*, 13(5), pp. 3–120, 1958 (*Russian*); English translation, AMS translations, vol. 22, pp. 163 – 288. 1962.
- [95] Kucera V., *Discrete linear control: The polynomial approach*, John Wiley, 1979.
- [96] Lebrun J. and Vetterli M., Balanced multiwavelets: Theory and design, *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 46, no. 4, pp. 1119 – 1125, 1998.
- [97] Lebrun J., and Vetterli M., High-order balanced multiwavelets: theory, factorization, and design, *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol.49, no. 9, pp. 1918 – 1930, 2001.
- [98] Lewis A. S. and Knowles G., A 64 Kb/s video codec using the 2-D wavelet transform, in *Proc. Data Compression Conf.*, Snowbird, UT, 1991.
- [99] Li B. and Peng L., Balanced multiwavelets with interpolatory property, *IEEE Trans. Image Proc.*, vol.20, no. 5, pp. 1450–1457, 2011.
- [100] Li Y. and Yang S., Construction of paraunitary symmetric matrix and parameterization of symmetric and orthogonal multiwavelets filter banks, *Acta Math. Sinica, Chinese Series*, vol.53, no. 2, pp. 279 – 290, 2010.
- [101] Lian J., Armlets and balanced multiwavelets: flipping filter construction, *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 53, issue 5, pp. 1754 – 1767, 2005.
- [102] Malyshev A.N., On the acceleration of an algorithm for polynomial factorization. *Dokl. Math.*, vol. 88, no.2, pp. 586 – 589, 2013.
- [103] Malyshev A.N., Sadkane M., The Bauer-type factorization of matrix polynomials revisited and extended. *Comput. Math. Math. Phys.*, 58(7), pp. 1025 – 1034, 2018.
- [104] Massopust P., Ruch D., and Van Fleet P., On the support properties of scaling vectors, *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, vol.3, no. 3, pp.229 – 238, 1996.
- [105] Meyer Y., Ondelettes sur l'intervalle, *Rev. Mat. Iberoamericana*, vol.7, pp.115–133, 1991.
- [106] Micchelli C. A., Sauer T., Regularity of multiwavelets, *Adv.Comp.Math.*,vol.7, pp. 455–545, 1997.
- [107] Mohammadi F. and Hosseini M.M., A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 8, pp. 1787 – 1796, 2011.
- [108] <http://www.xilinx.com/webpack/index.htm#MXE>
- [109] Moir T.J., Toeplitz matrices for LTI systems, an illustration of their application to Wiener filters and estimators. *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 49, no.4, pp. 800 – 817, 2018.
- [110] Oppenheim A.V., *Discrete– time signal processing*, Prentice Hall, NJ, 1989.

- [111] Orszag S. A., Spectral methods for problems in complex geometries, *Journal of Computational Physics*, vol.37, pp.70 - 92, 1980.
- [112] Plonka G. and Strela V., Construction of multiscaling functions with approximation and symmetry, *SIAM J. Math. Anal. Appl.*, vol. 29, pp. 481 - 510, 1998.
- [113] Pommaret J.F., Quadrat A., Generalized Bezout identity, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, vol. 9, pp. 91 – 116, 1998.
- [114] Riesz F., Über ein problem des Herrn Carathéodory. *J. Reine Angew. Math (Crelles J.)*, vol.146, pp. 83–87, 1916.
- [115] Rissanen J. and Barbosa L., Properties of infinite covariance matrices and stability of optimum predictors, *Information Sciences*, vol. 1, pp.221 - 236, 1969.
- [116] Rissanen J, Kailath T., Partial realization of random systems, *Automatica*, vol. 8, pp. 389–396, 1972.
- [117] Rissanen J., Algorithms for triangular decomposition of block Hankel and Toeplitz matrices with application to factoring positive matrix polynomials, *Mathematics of Computation*, vol.27, pp. 147–154, 1973.
- [118] Rieder P. and Nossek J., Smooth multiwavelets based on two scaling functions, *Proc. of the IEEE Inter. Sym. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 309 – 312, 1996.
- [119] Rieder P., Parameterization of symmetric multiwavelets, *Proc.ICASSP*,vol.3, pp. 2461-2465, 1997.
- [120] Rosenblum M., and Rovnyak J., *Hardy classes and operator theory*, Oxford University Press, 1985.
- [121] Rudin W., The extension problem for positive-definite functions. *Ill. J. Math.*, 7(3), pp.532 – 539, 1963.
- [122] Sayed A. H., Kailath T., A survey of spectral factorization methods, *Numerical Linear Algebra with Applications*, vol.8, no.6 - 7, pp. 467 – 496., 2001.
- [123] Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.*, 4(1), pp. 45 – 99 and no.2, pp.112 – 141, 1946.
- [124] Shannon C.E., Communication in the presence of noise, *Proc. IRE*, 37(1), pp.10–21, 1949.
- [125] Shen L. and Tan H., On a family of orthonormal scalar wavelets and related balanced multiwavelets, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, issue 7, pp. 1447 - 1452, 2001.
- [126] Shen L. X., Than H.H., and Than J.Y., Symmetric-antisymmetric orthogonal multiwavelets and related scalar wavelet, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 8, pp. 258 - 279, 2000.
- [127] Smith M. J. T. and Barnwell III T. P., Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders, *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 34, no. 3, pp. 434 – 441, 1986.
- [128] Soman K.P., Ramachandran K.I, and Resmi N.G., *Insight into wavelets: From theory to practice*, New Delhi, 3Ed., 2010.
- [129] Strang G. and Nguyen T., *Wavelet and Filter banks*, Cambridge Press, 1996.
- [130] Strang G. and Strela V., Short wavelets and matrix dilation equations, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.45, no. 1, pp. 108 – 115, 1995.
- [131] Strang G. and Strela V., Orthogonal multiwavelets with vanishing moments, *J. Optical Engineering*, vol.33, no. 7, pp. 2104 - 2107, 1994.
- [132] Strela V., *Multiwavelets: Theory and Applications*, MIT, 1996.
- [133] Strela V., Walden A. T., Orthogonal and biorthogonal multiwavelets for signal denoising and image compression, *SPIE Proceedings*, vol. 3391, pp.96 – 107, 1998.
- [134] Sweldens W., The lifting scheme: a construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 29, no. 2, pp. 511 – 546, 1998.
- [135] Tan H. H., Shen L. X., and Tham J. Y., New biorthogonal multiwavelets for image compression, *Signal Process.*, vol. 48, pp. 45–65, 1999.



- [136] Tham J., Shen L., Lee S., and H. Tan, Good multifilter properties: A new tool for understanding multiwavelets, Inter. Conf. on Imaging Science Systems and Technology, pp. 52 – 59, 1998.
- [137] Tham J., Shen L., Lee S., and Tan H., A General approach for analysis and application of discrete multiwavelet transforms, IEEE Trans. on Sig. Proc., vol. 48, no. 2, pp. 457 – 464, 2000.
- [138] Trenas M. A., Opez J. L, and Zapataa E. L., Configurable architecture for the wavelet packet transform, Journal of VLSI Signal Processing, vol.32, no.3, pp.255–273, 2002.
- [139] Vaidyanathan P. P., Multirate systems and filter banks, Prentice-Hall, NJ, 1993.
- [140] Wasin S. and Jianzhong W., Estimating the support of a scaling vector, SIAM J. Matrix Analysis and Applications, vol.18, no. 1, pp. 63-73, 1997.
- [141] Wang Z., McWhirter J.G., Weiss S., Multichannel spectral factorization algorithm using polynomial matrix eigenvalue decomposition, in 49th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, pp. 1714 – 1718, 2015.
- [142] Wilson G. Factorization of the covariance generating function of a pure moving average process. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 6, pp. 1 – 7, 1969.
- [143] Wua G., D. Lib, Xiaoa H. and Liuc Z., The  $M$  - band cardinal orthogonal scaling function, Appl. Math. and Comp., vol. 215, no. 9, pp. 3271 – 3279, 2010.
- [144] Xia X. G., Geronimo J. S., Hardin D. P., and Suter B.W., Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms, IEEE Trans. on Signal Process., 44(1), pp. 25 - 35, 1996.
- [145] Yang S.Z., Cheng Z.X., and Wang H.Y., Construction of biorthogonal multiwavelets, Journal Math. Anal. Appl., vol. 276, pp. 1 – 12, 2002.
- [146] Yousefi S. A., Numerical solution of Abel's integral equation by using Legendre wavelets, Applied Mathematics and Computation, vol. 175, no. 1, pp. 574 – 580, 2006.
- [147] Yousefi S. A., Legendre wavelets method for solving differential equations of Lane–Emden type, Applied Mathematics and Computation, 181(2), pp. 1417 - 1422, 2006.
- [148] Yin S.S., Zhou Y., Chan S.C., An efficient method for designing of modulated filter banks with causal stable IIR filters, J. Signal Process. Syst., vol. 78, no.2, pp. 187 – 197, 2015.
- [149] Youla D.C., Kazanjian N.N., Bauer-type factorization of positive matrices and the theory of matrix polynomials orthogonal on the unit circle, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 25, no. 2, pp. 57–69, 1978.
- [150] Young D. M., Garrett Birkhoff and applied mathematics, Notices of the AMS, vol. 44, no. 11, pp. 1446 - 1449, 1997
- [151] Zhou D.-X., Interpolatory Orthogonal multiwavelets and refinable Functions, IEEE Trans. Signal Processing, vol.50, no. 3, pp. 520 – 527, 2002.
- [152] Paley R.E.A.C., and Wiener N., Fourier transforms in the complex domain, vol. 19, AMS, 1934.
- [153] <https://www.xilinx.com/support/download/index.html/content/xilinx/en/downloadNv/vivado-design-tools/archive-ise.html>



**БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ**

## **АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ**

за присъждане на образователна и научна степен “доктор” по докторска програма „Информатика”

### **МЕТОДИ ЗА ПОСТРОЯВАНЕ НА УЕЙВЛЕТНИ И МУЛТИУЕЙВЛЕТНИ ФИЛТЪРНИ БАНКИ**

*Васил Стефанов Колев*

**Ръководител: Доц. Румен Андреев**

**Научно жури:**

Проф. Огнян Кунчев

Проф. Александър Бекярски

Проф. Иван Гарванов

Проф. Пенчо Маринов

Проф. Даниела Борисова



**Институт по информационни и  
комуникационни технологии**

**Секция „Комуникационни и компютърни системи”**

## УВОД

### Актуалност на проблема

От края на 80-те години на миналия век уейвлетните функции се наложиха като незаменим инструмент в геодезията, в числения анализ, в теорията на операторите, при обезшумяване и компресия на  $N$ -D сигнали, извличане на обекти от астрономически изображения, машинно обучение, сортиране на данни, търсене в база данни, анализ на времеви редове, компютърна медицина и др. Съществуват различни техни обобщения: уейвлетни пакети (wavelet packets), риджлети (ridgelets), кривалети (curvelets), сланлети (slantlets), кадри (frames) и др.

От началото на 90-те години съществува обобщение на скаларните уейвлети – това са мултиуейвлетите съдържащи повече от една функции и притежават едновременно свойствата – къса основа, симетрия, и изчезващи моменти от висока степен.

Важна подобласт са ортогоналните мултиуейвлетни филтри, чието разработване изисква мултимащабираща функция да удовлетворява редица условия. Въпреки ограниченията и възникващите трудности, съвременните технологии налагат прилагане им, което води разработване на нови методи и алгоритми за тяхното развитие.

### Мотивация

Съществена трудност е съставянето на методи и алгоритми за разработване на ортогонални мултимащабиращи функции удовлетворяващи по-горе изброени свойства.

Друго голямо предизвикателство е получаването на мултимащабиращи функции като спектрален фактор на спектрално разлагане на произведения на сингулярни матрични филтри с еднократни или многократни нули. Нещо повече, спектралното разлагане на такъв мултифилтър е с големи грешки или дори невъзможно.

Ето защо *основния изследователски въпрос* е свързан с разширяване на уейвлетната и мултиуейвлетната теория и нейното изследване. В този научноизследователски труд са разработени *четири метода* за разработване на скаларни или векторни мащабиращи функции от полиноми и сплайни:

- ❖ *Директен метод* ;
- ❖ *Метод на смяна на базиса*;
- ❖ *Метод на външното скаларно произведение*;
- ❖ *Бърз метод на Байер за спектрално разлагане*.

Първите три метода се основават на базисни функции от полиноми или от различни типове сплайни. Те могат да са експоненциални функции, Лежандър полиноми в интервал  $[-1,1]$  или  $[0,1]$ , кубични или квинтик Ермитови (Hermite) полиноми за интервалите  $[0,1]$  и  $[0,2]$ , Чебишев полиноми от 1 и 2 род, Хаар и Уолш функции, и др.

Четвъртият метод е разработен за получаване на мащабиращи (мултимащабиращи) функции от скаларно (матрично) спектрално разлагане притежаващи едновременно свойствата – ортогоналност, нулеви моменти, компактен носител, и гладкост. За тази цел е разработен бърз и

точен метод на Бауер за спектрално разлагане, позволяващ спектрални фактори да са точни стойности.

### **Научна постановка на изследването**

*Обект* на настоящата дисертация са мултимащабиращи и мултиуейвлетни функции.

*Предмет* на научното изследване е разработване на мултимащабиращи и мултиуейвлетни функции и възможни приложения в различни (мулти)филтри.

**Цел на дисертационния труд** е от направения анализ на състоянието на разглежданата научна област да се разработят методи за построяване на уейвлетни и мултиуейвлетни филтърни банки.

### **Хипотеза**

Идеята за търсене на нови методи за разработване мултуейвлетни филтърни банки е свързана със следната хипотеза, която има два аспекта:

- (а) Възможност за получаване им от различни базисни функции (полиноми, сплайни) и чрез прилагане метода на Бауер за спектрално разлагане.
- (б) Методите да бъдат явни, прости, и сходимы, както и получените филтърни банки (при възможност) да са по-добри характеристики.

### **Реализацията на хипотезата се доказва чрез верифициране на следните твърдения:**

- (а) Разработване на методи за построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции от полиноми и сплайни;
- (б) Алгоритми за бърз и точен метод на Бауер;

### **Методология на изследването**

Изпълнението на дисертационния труд е съобразено с основните методи за постигане на научно познание - анализ, синтез, сравнение, обобщение, и експериментални изследвания.

Направен е обзор и анализ на методите за разработване на уейвлетни и мултиуейвлетни филтърни банки от гледна точка на математиката и инженерни приложения. На базата на този критичен анализ е поставена целта на научното изследване и е формулирана основната хипотеза.

Разработени са следните методи за построяване на банки.

- ❖ *Директен метод* ;
- ❖ *Метод на смяна на базиса*;
- ❖ *Метод на външното скаларно произведение*;
- ❖ *Бърз метод на Байер за спектрално разлагане*.

Главни предимства на първите два метода е, че са прости и явни, докато другите са с по-голяма изчислителна сложност.

Избран и обоснован е емперичния подход за прилагането на методите. За неговата реализация са създадени алгоритми, построени са три численни метода, и са проведени

експерименти. Разработени и изследвани са филтърни банки за обработка на 1D и 2D сигнали чиито резултати са систематизирани и анализирани.

### **Основни задачи на изследването:**

1. Да се направят проучване, обзор и критичен анализ на съществуващи методи за построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции;
2. Да се очертаят изследователски възможности при разработване на нови методи за построяване на филтърни банки;
3. Да се предложат нови методи за разработване на мащабиращи и мултимащабиращи функции от полиноми и сплайни;
4. Да се дефинират и разработят методи на спектрално разлагане;
5. Да се разработят алгоритми за бърз и точен метод на Бауер;
6. Да се синтезира лифтинг схема на филтърната банка на Алперт и проведат експериментални изследвания с разработените методи за построяване на уейвлетни и мултиуейвлетни филтърни банки.

### **Участие в проекти**

*Част от приложените резултати* в настоящото дисертационно изследване са постигнати и пряко свързани с работата на автора в рамките на следния научно-изследователски проект:

Проект *'Астроинформатика: Обработка и анализ на дигитализирани данни и web-базирано приложение'*, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на МОН по договор № ДО-02-275 (2008 г. – 2012 г.)

### **Структура на съдържанието**

Дисертацията се състои от 5 глави, увод, заключение, и списък на цитираната литература.

В *Увода* са посочени темата, обекта и предмета на дисертационния труд, както и водещата хипотеза. Описана е накратко актуалността на темата и мотивацията за извършване на дисертационното изследване. Поставена е целта и методологията на изследователската работа, както и задачите, чрез които тя да бъде постигната.

*Глава 1* е посветена на съществуващи методи за разработване на уейвлетни и мултиуейвлетни филтърни банки. Тя включва теория на базисни функции за полиноми, сплайни, спектрално разлагане, и построяване на скаларни (векторни) филтърни банки.

В *Глава 2* се разработват три метода за построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции от полиноми или сплайн функции – *метод на смяна на базиса, директен метод, и метод на скаларното произведение.*

*Глава 3* описва съществуващи методи за спектрално разлагане. Разработено е задължително условие на гладкост на произведение на матричен филтър. Разработена е мащабиращата функция на Добеши 4 по метод на корени на полиномите. Описана е базова теория за метода на Бауер. Разработено е произведението на филтър на Алперт.

В Глава 4 се разработват алгоритми за бърз метод на Бауер и решаване им с три численни метода. За тази цел са разработени *Алгоритъм 1* и *2* и са построени Алперт ортогонална мултифилтърни банки.

Глава 5 е посветена на:

- (1) Сравнителен анализ на четирите метода за разработване на мащабиращи и мултимащабиращи функции, на методите на Бауер за мащабиращи функции на Хаар, Добеши 4, и мултимащабираща функция на Алперт;
- (2) Експериментално изследване на бързия и точен метод на Бауер за мащабиращите функции на Хаар и Добеши 4;
- (3) Изследване на точния метод на БМБ чрез прилагане на *Алгоритъм 2* за скаларен и шест матрични полиноми;
- (4) Изследване на точния метод на БМБ чрез използване на вградени софтуерни функции за седем примера;
- (5) Разработване на лифтиг схема на филтър на Алперт в ортогонална мултифилтърна банка за анализ и възстановяване на изображение с ниво на сиво с различно квантуване на коефициента  $\sqrt{3}$ . Направен е сравнителен анализ на 3 ортогонални мултифилтърни банки за обезшумяване на изображения с ниво на сиво с размер  $256 \times 256$  и  $512 \times 512$  пиксела и адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) с дисперсия ( $\sigma = 10, 20$ );
- (6) Сравнителен анализ на ортогонални скаларни и векторни филтри за компресия на изображения от сканирани фотографски плаки.

## ГЛАВА 1

# ПРЕГЛЕД И АНАЛИЗ НА МЕТОДИТЕ ЗА ПОСТРОЯВАНЕ НА УЕЙВЛЕТНИ И МУЛТИУЕЙВЛЕТНИ ФИЛТЪРНИ БАНКИ

### 1.1 Въведение

В теория за обработка на сигнали, уейвлети (wavelets) се наричат бързо затихващи функции във времето, или накратко - бързо затихващи вълнички. Чрез математическите операции, трансляция (translation) и свиваване/разширяване (dilation), те образуват (пълни) множество от измерими функции [43], [34], притежаващи свойствата – ортогоналност, нулеви моменти, компактен носител, и гладкост. Възникването им е породено от възможността за анализ на нестационарни сигнали което изисква честотната характеристика на филтър да зависи от времето. Те се използват чрез базис от функции за построяване на филтърни банки с малък брой коефициенти, изчезващи моменти и добри апроксимационни свойства. Определяне едновременно на пространствените и честотните особености за даден сигнал се използва за анализ на локални кратковременни сигнали - сигнали с пикове, отсъствие на сигнал, прекъсвания на сигнал, стъпаловидни сигнали и т.н. Тези уникални свойства на уейвлетите ги прави предпочитани пред трансформацията с Фурие функции и привлекателни за компресия на сигнали [3], за икономиката [1], [2], [6], [7], при обработка на говор [13], изображения [4], [5], хранително вкусова промишленост [8] и др.

Важен вид мултифилтри са интерполиращите, чиито коефициенти са точно дискретните стойности на входния сигнал. Техен недостатък е, че не могат да бъдат симетрични/асиметрични.

Важен вид са балансираните мултифилтри и по – новите ‘армлет’ (armlet) мултиуейвлети [40], [96], [97], [99], [100], [101], [127], [136].

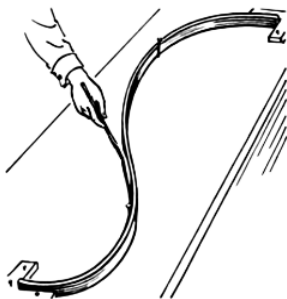
Друг тип мултиуейвлетни филтърни банки са биортогоналните съдържащи основни и дуални мултифилтри [64], [145].

Главно предимство на мултифилтърната теория е осигоряване възстановяване на сигнал (за сметка на ортогоналността), добра ефективност (за сметка на гладкостта), и висока степен на апроксимация (за сметка на голям брой нулеви моменти) [57], [130]. Симетрията на функциите позволява симетрично разширяване границите на сигнали. Ортогоналността води до независими подленти (subbands). Изчезващи моменти от по–висока степен води до представяне на полиноми от по–висока степен с по–малък брой коефициенти. Тези свойства дават гъвкавост линейни пространства при построяване на частично линеен полином (*piecewise polynomial*), например ортогоналната Хаар филтърна банка с компактна основа [49]. Разширяването на такова линейно пространство с полиноми от по–висока степен води до пространство от частично линейни полиноми на  $n$ -степен с целочислени възли и ортогонален базис. Такова е пространството от  $n$ -степенни Лежандър частично линейни полиноми и техните целочислени трансляции в интервал  $[-1,1]$ . Те са използвани за решаване на интегрални уравнения, ОДУ, ЧДУ, и в числения анализ [47], [45].

## 1.2. Теория на сплайни и Лежандър полиноми

### 1.2.1 Сплайн функции

Думата "сплайн" се свързва с апроксимация на гладки, частично - линейни полиномиални функции. Тя е използвана за първи път от Шьонберг (Schoenberg) в [123]. Главната идея е възникнала в авиационната и корабостроителната промишленост от Robin Forrest като "гълбарник или таванско стая (lofting)" [21], защото е използвана за построяване на самолетни шаблони чрез поставяне на тънки дървени дъски през точки поставени на пода на голямо дизайнерско таванско помещение, **фиг.1.1**.



**Фиг.1.1** Пример за сплайн (Монтиране на тънка дървена дъска през точки)

От гледна точка на математиката, 'сплайн' е *частично линейна (piecewise linear)* функция състояща се от полиномиални функции чиято гладкост зависи от броя производни. По-общо, *сплайн* е множество от всички части на полином с определени условия за гладкост необходим за построяването на функция в интервал  $[a, b]$ . Сплайни с полиноми от ниска степен се наричат *частично-линейни* и са използвани като интерполиращи функции. Сплайн функции от трета степен са кубичните Ерминови сплайн функции които са често използвани поради  $C^2$  непрекъснатост на функциите преминаващи през две точки със зададени производни.

#### 1.2.1.1 Линеен B - сплайн (функция "Шапка")

Линейният B – сплайн (съкратено от базисен сплайн) с коефициенти  $a$  и  $b$

$$L(t) = at + b. \quad (1.1)$$

води до построяване на частично линейната функция "Шапка" (Hat). Тя навсякъде е нулева с изключение на тясната си основа (носител) и средната точка 1. Използва се като линеен интерполант и/или краен елемент. Мащабиращата функция от функцията "Шапка" се състои от три коефициента  $h_0, h_1, h_2$  с равноотдалечени възли на разстояние и се описва с двумащабното уравнение:

$$\phi(t) = h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t - 1) + h_2\phi(2t - 2) \quad . \quad (1.2)$$

#### 1.2.1.2 Кубичен Ермитов сплайн

Ермитовите сплайн функции принадлежат към клас от непълни (*defective*) <sup>(A)</sup> сплайни. Най – често използван е кубичния сплайн състоящ се от полином на степен  $\leq 3$  с две непрекъснати производни за всеки подинтервал и притежава:

<sup>(A)</sup> Разликата между степента на сплайн и неговата гладкост се нарича *дефект на сплайн*. Например, частично линейна непрекъсната функция (нейната графика е многогълна линия) е сплайн от степен едно с дефект 1.



- Непрекъснатост на възел  $C^2$ ;
- Минимална крива за  $n$  частично - линейни кубични функции за  $n+3$  точки ;
- Лесно определяне на позицията и производните в началните и крайните точки;
- Добра гладкост с малък брой операции;

Кубичният Ермитов сплайн (КЕС) се използва за интерполация с непрекъснати първи и (възможно прекъсната) втора производна на възлите, за интерполиращи и биортогонални мултиуейвлети филтърни банки. КЕС е полином от трета степен

$$H(t) = at^3 + bt^2 + ct + d ,$$

за две крайни точки и производни (или тангенти) в тези точки. Сегмент в 1D е показан на **фиг.1.2(а)** и 3D на **фиг. 1.2(б)**. Това е еквивалентно на интерполация на две точки чрез параметрична кубична крива:

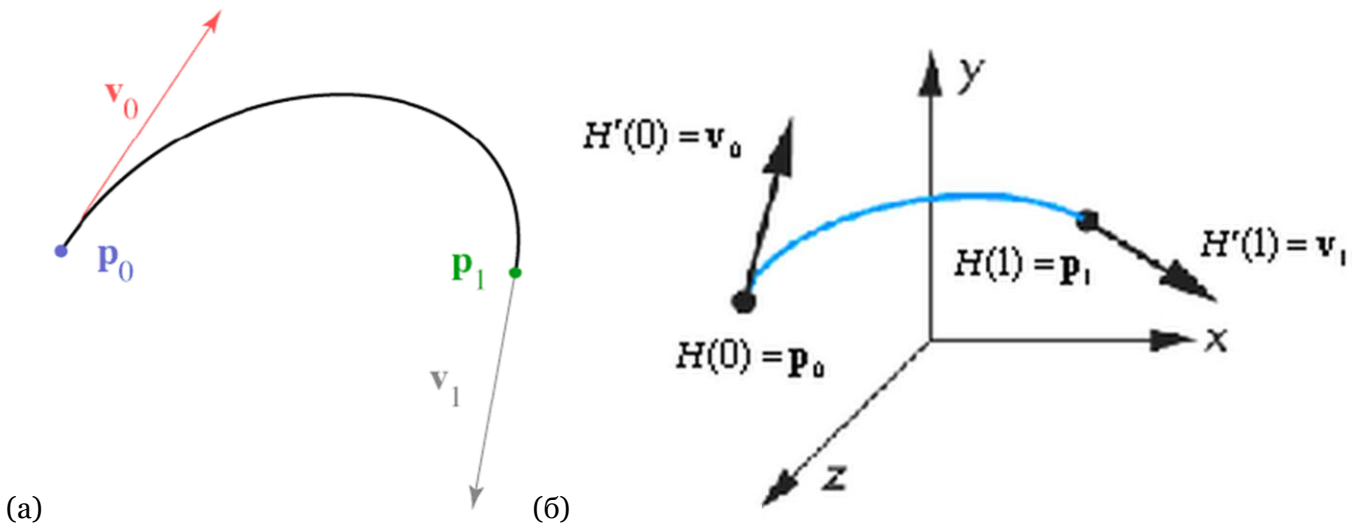
$$\begin{aligned} H(0) &= \mathbf{p}_0 & H'(0) &= \mathbf{v}_0 \\ H(1) &= \mathbf{p}_1 & H'(1) &= \mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

където  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}_1$  са крайните точки,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_1$  са производните на функцията в точките по косинус направление.

Мултимащабиращата функция на кубичен Ермитов сплайн се определя от четири матрични коефициенти  $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 z^{-1} + \mathbf{C}_2 z^{-2} + \mathbf{C}_3 z^{-3}]$$

и може да се използва като краен елемент с  $(2r-1)$  степен частично-линейни полиноми и  $(r-1)$  непрекъснати производни.



**Фиг. 1.2** Кубични Ермитови криви; (а) Сегмент със ограничения: крайни точки  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$  и тангенти (производни)  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ ; (б) Определяне на крайните точки и техните производни;

### 1.2.2 Лежандър полиноми

Лежандър полиномите са полиноми по  $t$ -степен, т.е.  $1, t, \dots, t^i$  и за интервал  $[-1, 1]$  образуват неортогонален базис:

$$\phi_r(t) = \sqrt{r + \frac{1}{2}P_r(t)}. \quad (1.4)$$

където:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, \\ P_1(t) &= t, \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \quad \text{за } m = 1, 2, 3, \dots \\ (m+1)P_{m+1}(t) &= (2m+1)tP_m(t) - mP_{m-1}(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Важно приложение на Лежандър полиномите е възпроизвеждането на полиноми. Например, едночления полином  $x^2$  се представя с първите три Лежандър полиноми:

$$x^2 = c_0P_0(t) + c_1P_1(t) + c_2P_2(t) \quad (1.6)$$

където коефициентите са  $c_0 = \frac{1}{3}$ ,  $c_1 = 0$ , и  $c_2 = \frac{2}{3}$ .

Друго важни приложения са в мултиуейвлетната теория за интервал  $[0,1]$  където Алперт за пръв път е построил ортогонална мултимасшабираща функция от първите два Лежандър полинома  $P_0(t)$  и  $P_1(t)$ :

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 + C_1 z^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

където  $C_0$  и  $C_1$  са  $2 \times 2$  матрични коефициенти.

### 1.3. Теория на скаларни и векторни филтърни банки

#### 1.3.1 Скаларни филтърни банки

##### 1.3.1.1 Обща теория

Обща структура на  $M$ -канална филтърна банка е показана на **фиг.1.3**. Филтърни банки състоящи се от мащабиращи и уейвелтни функции се нарича *дискретна уейвлетна трансформация* (ДУТ).

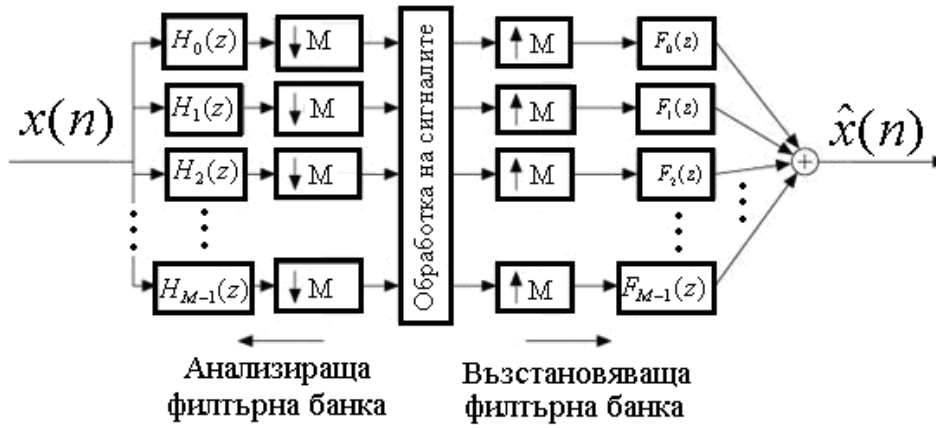
За опростяване на входно – изходната връзка на филтърната банка е разгледана 2-канална филтърна банка. За входен сигнал  $x(n)$  тя се описва чрез матричното уравнение:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \frac{1}{2} [H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)] X(z) + \frac{1}{2} [H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)] X(-z) \\ &= T(z)X(z) + S(z)X(-z) \end{aligned} \quad (1.8)$$

което в матричен вид е:

$$\hat{X}(z) = \begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}.$$

Произведението  $H_0(z)F_0(z)$  се нарича *произведение на скаларен (матричен) филтър* (scalar (matrix) product filter), полулентов или автокорелационен филтър. Такъв филтър е в основата за намиране чрез спектрално разлагане на мащабиращи или мултимасшабиращи функции. От гледна точка на математиката това е *пара-Ермитов скаларен (матричен) полином*.



Фиг.1.3. Структура на  $M$  – канална скаларна филтърна банка

### 1.3.1.2 Построяване на мащабиращи и уейвлетни функции чрез параметър

Построяването на ортогонални филтърни банки чрез параметър е изследвано в [86], [129], [139]. То се състои от произведения от унитарни матрици:

$$H_p(z) = \prod_{i=0}^{L-1} \begin{pmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_L & \sin \phi_L \\ -\sin \phi_L & \cos \phi_L \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

където  $\phi_i \in [0, 2\pi]$  и  $\phi_L \in [0, \pi]$ , чиято структура се нарича *решетъчна структура* (lattice structure).

Друга структура на ортогонална филтърна банка чрез параметър която води до директно получаване на коефициентите на мащабиращи и уейвлетни филтри е предложената в [86]:

$$\begin{bmatrix} c_0^K & d_0^K \\ c_1^K & d_1^K \\ c_2^K & d_2^K \\ \vdots & \vdots \\ c_{N-1}^K & d_{N-1}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_K & & & \\ & \cos \phi_K & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cos \phi_K \\ & & & & \cos \phi_K \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \text{ за } K \geq 2 \quad (1.10)$$

където  $I$  е единична матрица, и разработена от автора универсално разлагане на унитарна

матрица чрез матрица на Якоби  $J(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$  в [87]:

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = J(\alpha)J(\beta), \quad (1.11)$$

където  $\beta - \alpha = \phi \bmod 2\pi$ . Това е еквивалентно на разлагането с тридиагонални матрици:

$$\begin{aligned} R(\phi) &= I - A\left(\frac{\phi}{2}\right)B\left(\frac{\phi}{2}\right)A^T\left(\frac{\phi}{2}\right) = \\ &= I - \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & \sin \frac{\phi}{2} \\ 1 & -\cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2\cos \frac{\phi}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \frac{\phi}{2} & -\cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Предимство на предложената параметризация и разлагането на триъгълни матрици е възможността за хардуерна реализация чрез лифтинг схемата. Автора в [87], [88] е построил

ортогонални мултимащабиращи и мултиуейвлетни функции на базата на горните структури и ортогонални мащабиращи и уейвлетни преместени функции

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &= \phi_0(t) \\ \phi_1(t) &= \phi_0(t-2)\end{aligned}\tag{1.13}$$

Примери за прилагане на структурата за директно получаване на коефициентите на мащабиращи и уейвлетни филтри са показани за Хаар и Добеши филтърна банки.

### 1.3.1.3 Свойства на мащабиращи и уейвлетни функции

По – важни свойства на мащабиращите и уейвлетните функции са:

- ❖ За дефиниране на сигнали във временната област се използва функцията  $\delta(t)$  и комплексни синусоиди в честотната.
- ❖ *Принцип на Хайзенберг (принцип на неопределеност (Uncertainty))* - Открит е за първи път през 1927г. от немския физик Вернер Хайзенберг в квантовата механика като време-честотен анализ [67]. Той гласи, че едновременното определяне местоположението на функция по време и честота е несъвместимо и тяхното произведение е  $< \frac{1}{4\pi}$ . Ако сигнал

$f(t)$  е с единична енергия  $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = 1$  в пространството  $L^2$ , тогава  $f^2(t)$  и  $|F^2(f)|^2$  могат да бъдат разглеждани като плътностни вероятности, а произведението на техните дисперсии  $\sigma_f^2$  и  $\sigma_t^2$  като мярка на обхвата е:

$$\sigma_f^2 \sigma_t^2 \geq \frac{1}{(4\pi)^2}.$$

- *Стръмност (Flatness)* - Това свойство определя възможността за бърз преход на честотна характеристика от лентата на пропускане към лентата на непропускане. Това води към минимална преходна характеристика като идеалния случай е 0.
- *Симетричност* - Функцията  $f(x)$  е симетрична около точка  $a$  ако

$$f(a+x) = f(a-x)\tag{1.14}$$

и асиметрична ако

$$f(a+x) = -f(a-x).\tag{1.15}$$

- *Изчезващи моменти (vanishing moments)* – Уейвлетна функция с  $n$ -изчезващи моменти удовлетворява условието:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \text{ за } 0 \leq k < n.\tag{1.16}$$

и е ортогонална на  $n-1$  степен полиноми.

### 1.3.1.4 Кратномащабен анализ (КМА) [153]

Ключово понятие в уейвлетната теория е вложената (вместената) структура наречена *кратномащабен анализ* (КМА) или *многомащабен анализ* (ММА) (multiresolution analysis (MRA)) състояща се от по – груби и по – финни пространства  $V_j$ :

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots, \in L^2(R)$$

← По - грубо пространство                      По-финно пространство →

КМА притежава следните свойства:

1. *Мащабиране (Scaling)* - За всяко  $j$ ,

$$\text{функцията } f(t) \in V_j \text{ единствено ако } f(2t) \in V_{j+1};$$

2. *Обединение (Inclusion)* - За всяко  $j$  е в сила

$$V_j \subseteq V_{j+1};$$

3. *Пълнота (Completeness)* - Обединението на подпространствата  $V_j$ 's е пълтно в  $L^2$ :

$$\text{closure}\left\{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j\right\} = L^2(R);$$

4. *Уникалност (Uniqueness)* – Подпространствата  $V_j$  не се пресичат:

$$\left\{\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j\right\} = \{0\}.$$

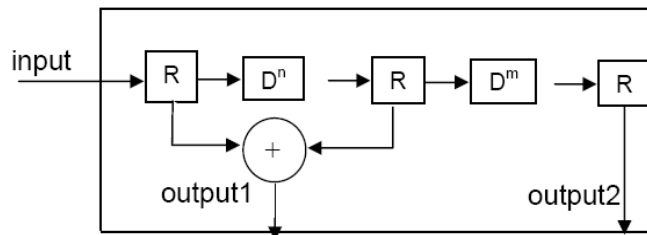


Следователно, разлагането на функция  $f(t)$  на мащабиращи и уейвлетни коефициенти за ниво  $j$  се описва с уравнението:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\phi(t-n) + \sum_{j=1}^J \sum_{n=0}^{N-1} g_{2^j+n}(n)\psi(2^j t-n). \tag{1.17}$$

**1.3.2 Разработване на модули без множител за скаларна филтърна банка**

Нова архитектура на 5/3 филтърна банка състояща се от авторски *модули без множител* (multiplierless modules) е разработена в [85]. Всеки модул (за анализ и за възстановяване) съдържат две програмируеми закъснения ( $D^m$  и  $D^n$ ), 3 регистри (R), и 1 суматор (фиг.1.4).

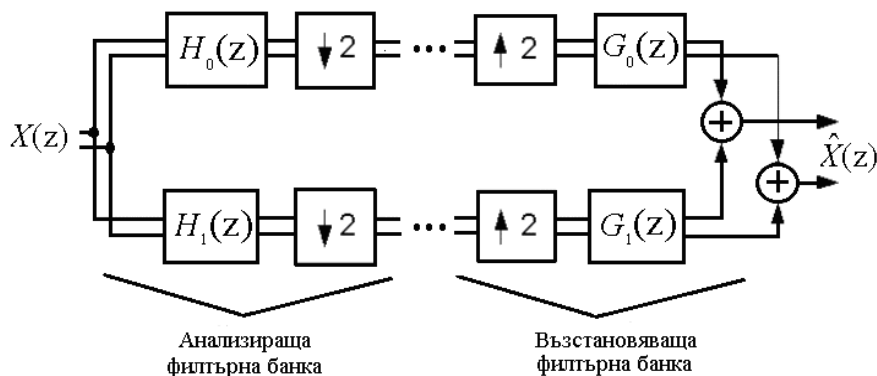


**Фиг.1.4** Авторска обща структура на скаларна филтърна банка

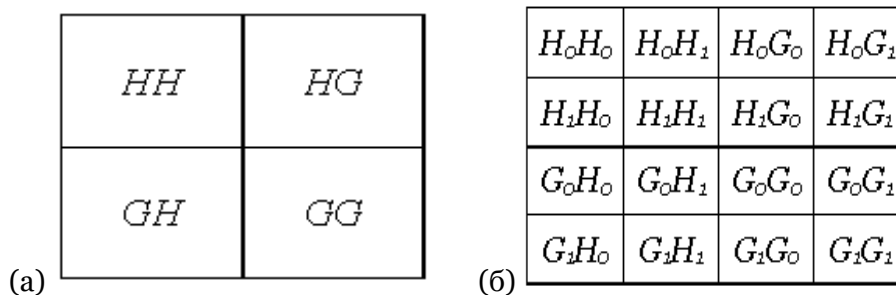
**1.3.3 Векторни филтърни банки (Мултифилтри)**

**1.3.2.1 Обща теория**

Векторните филтърни (мултифилтърни) банки се състоят от четири мултифилтъра, два за анализ и два за възстановяване (синтез). Те са обобщение на скаларни уейвлетни филтърни банки тъй като се състоят от  $r$ -мащабиращи  $\Phi = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_r]^T$  и  $r$ -уейвлетни филтри  $\Psi = [\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_r]^T$  притежаващи едновременно свойствата - ортогоналност, симетрия, компактна основа, и изчезващи моменти.Пример за двуканална мултифилтърна банка е показана **фиг. 1.5**. Главна особеност на мултифилтрите е необходимостта от *векторизация на входния сигнал*.



**Фиг. 1.5** Двуканална мултифилтърна банка



**Фиг. 1.6** Разлагане на изображение на 1 ниво чрез; (а) скаларен двулентов филтър

$$\begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 & H_1 \\ G_0 & G_1 \end{bmatrix} \quad (4 \text{ подленти}); \quad (б) \text{ двулентов мултифилтър } (16 \text{ подленти})$$

Най – простата векторизация е повтарянето на редове, но това увеличава двойно броя на стойностите.

Друга векторизация е разделянето на четни и нечетни последователности, която е съвместима със симетричното разширение на входния сигнал.

В сравнение със скаларната, броя на получените подленти при разлагане чрез векторна филтърна банка е по-голям. Например, при разлагане на изображение за едно ниво чрез скаларна филтърна банка получените подленти (подизображения) са четири, **фиг. 1.6(а)**, докато за мултифилтър са шестнадесет, **фиг. 1.6(б)**.

Векторна филтърна банка се описва с матричното уравнение:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) = & \frac{1}{2} [G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)]X(z) \\ & + \frac{1}{2} [G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)]X(-z) \end{aligned} \quad (1.18)$$

където,

$X(z)$  е входния векторен сигнал,

$H_r(z)$  - са анализиращи мултифилтри,  $r = 0,1$

$G_r(z)$  - са възстановяващи (синтезиращи) мултифилтри,  $r = 0,1$

$\hat{X}(z)$  - изходния векторен сигнал.

### 1.3.2.2 Свойства на мултимасщабиращата функция

В тази подглава са разгледани най – важните свойства за мултимасщабираща функция:

**A.** Възпроизвеждане на дискретни полиноми

**B.** Пре – и пост – филтрация

**C.** Балансиране

**D.** Основа на мултифилтри

**E.** Симетрия/антисиметрия на мултимасщабиращите и мултиуейвлетните функции

### 1.4. Теория на спектрално разлагане

Спектралното разлагане е процес на определяне на минимално фазова функция принадлежаща на  $P(e^{j\omega})$  който е произведение от два фактора  $H(z)$ , и  $H^*(z)$  като един от тях трябва да бъде определен, т.е.

$$P(e^{j\omega}) = H(z)H^*(z).$$

В теорията на спетралното разлагане най–важна теоремата на Фейер–Рис (Fejér-Riesz) за положително определени функции. Важността на тригонометричните полиноми допускащи единствено положителни реални стойности първи отбелязва Фейер в [71], а Рис я доказва в [114]. Така, според теоремата на Фейер– Рис тригонометричен полином  $v(z) \geq 0$  и  $z \in T$  :

$$v(z) = \sum_{k=-N}^N v_k z^k \quad (1.55)$$

е спектрално разложен

$$v(z) = p(z)p^*(z) \quad (1.56)$$

на спектрален фактор  $p(z) = \sum_{k=0}^N p_k z^k$  и неговия комплексно–спрегнат на  $p^*(z)$  с коефициенти

удовлетворяващи равенството  $\bar{v} = v_{-k}$  за всички  $k$ . Спектралният фактор е уникален до множител с унитарна константа  $U(z)$  [59], [60], т.е.,

$$p_{new}(z) = p(z)U(z). \quad (1.57)$$

Теоремата на Фейер–Рис не разглежда спектрално разлагане на многопроменливи полиноми ([53] за контрапримери). От практическо значение за 1D спектрално разлагане е **Теорема 3.2** в [121], и за 2D е **Теорема 6.2** в [53], и за произволна размерност **Теорема 3.1** в [121].

### 1.5 Теория на базисни функции от сплайни

В подглавата са разгледани разработавнето на, линеен  $B$  – сплайн, Ермитови сплайн за интервал  $[0,1]$ , кубичен Ермитов сплайн, и квинтик (*Quintic*) Ермитов сплайн.

### 1.6. Резултати и изводи

На основата на представените проблеми авторът предлага разработване и разширяване на уейвлетната и мултиуейвлетната теория. От направения обзор следва, че скаларни или векторни филтърни банки могат да се разработват чрез полиноми на Бернщайн (Bernstein), на Лежандър, на кубичен и квинтик Ермитови полиноми, както и чрез линейни и квадратичен  $B$  сплайни. Това е разгледано в следващата **Глава 2**.

**ГЛАВА 2****РАЗРАБОТВАНЕ НА МЕТОДИ ЗА ПОСТРОЯВАНЕ НА МАЩАБИРАЩИ И МУЛТИМАЩАБИРАЩИ ФУНКЦИИ ОТ ПОЛИНОМИ И СПЛАЙНИ**

В тази глава се разработват три метода за директно построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции както и техните допълващи уейвлетни(мултиуейвлетни) функции от полиноми и сплайни. Техните матрични коефициенти са получени от Лежандър полиноми, линеен и квадратичен  $B$ -сплайн, кубичен и квинтик Ермитов сплайн. За опростяване получаването на функции с основа по-голяма от  $[0,1]$  е разработен алгоритъм за пренареждане на коефициентите на функции с основа  $[0,3]$  на  $[0,1]$ .

Важна особеност е, че за разлика от методите на спектрално разлагане (представени в **Глава 3 и 4**), тези методи водят до директно получаване на мащабиращи или мултимащабиращи функции.

**2.1 Методи за построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции****2.1.1 Метод чрез смяна на базиса**

Метода чрез смяна на базиса за построяване на мащабиращи или мултимащабиращи функции се състои в построяване на матрица от коефициентите на базисните функции. Тя е произведение на мащабираща  $\phi(t)$  или мултимащабираща  $\Phi(t)$  функция с неособенна матрица  $A$ , т.е.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Например, за мултимащабираща функция  $\Phi(t)$  това е новата функция:

$$\tilde{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_k AC_k \Phi(2t - k). \quad (2.1)$$

Тъй като единичната матрица  $I = A^{-1}A$ , тогава функцията  $\tilde{\Phi}(t)$  е:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(t) &= \sqrt{2} \sum_k (AC_k A^{-1}) A \Phi(2t - k) \\ &= \sqrt{2} \sum_k \underline{H}_k \Phi(2t - k) \end{aligned} \quad (2.2)$$

е с нови матрични коефициенти:

$$\underline{H}_k = AC_k A^{-1} \in T. \quad (2.3)$$

и основа  $\text{supp } \Phi(t) = \text{supp } \tilde{\Phi}(t)$ . За скаларна функция новите скаларни коефициенти са:

$$\underline{h}_k = Ah_k A^{-1}. \quad (2.4)$$

**2.1.2 Директен метод**

Метода се изразява в приравняване на базисната функция с мащабиращата или мултимащабираща функция за определен интервал.



**А) Мащабираща функция “Шапка”****Интервал [0,1]**

Мащабиращото уравнение се описва с три коефициента:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \left( h_0 \phi(2t) + h_1 \phi\left(2t - \frac{1}{2}\right) + h_2 \phi(2t - 1) \right).$$

**Скаларен коефициент  $h_0$** 

Първият коефициент лежи в подинтервал [0,1/4]. Чрез приравняването на функцията ‘Шапка’ с с мащабиращото уравнение  $\phi(t) = L_0(t) = 2t$  се получава уравнението:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sqrt{2} h_0 \phi(2t) \\ 2t &= \sqrt{2} h_0 2(2t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

чието решение е  $h_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

**Скаларен коефициент  $h_1$** 

Вторият коефициент лежи в подинтервала [1/4,3/4]. Чрез приравняването на функцията ‘Шапка’

$$\begin{aligned} \phi(t) &= L_0(t) = 2t \\ \phi(2t - 1) &= L_0\left(2t - \frac{1}{2}\right) = 2\left(2t - \frac{1}{2}\right) \\ \phi(2t) &= L_1(2t) = 2 - 2(2t) \end{aligned}$$

с мащабиращото уравнение

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sqrt{2} (h_0 \phi(2t) + h_1 \phi(2t - 1)) \\ 2t &= \sqrt{2} \left( h_0 L_1(2t) + h_1 L_0\left(2t - \frac{1}{2}\right) \right) \\ 2t &= \frac{1}{2} L_1(2t) + \sqrt{2} h_1 L_0\left(2t - \frac{1}{2}\right) \\ 2t &= \frac{1}{2} (2 - 2(2t)) + \sqrt{2} h_1 (2\left(2t - \frac{1}{2}\right)) \\ 4t - 1 &= \sqrt{2} h_1 (4t - 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

получаваме втория коефициент  $h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Скаларен коефициент  $h_2$** 

Третият коефициент лежи в подинтервала [3/4,1]. Чрез приравняването на функцията ‘Шапка’

$$\begin{aligned} \phi(t) &= L_1(t) = 2 - 2t \\ \phi(2t - 1) &= L_1(2t - 1) = 2 - 2(2t - 1) \end{aligned}$$

с мащабиращото уравнение

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \sqrt{2}h_2\phi(2t-1) \\
L_1(t) &= \sqrt{2}h_2L_1(2t-1) \\
2-2t &= \sqrt{2}h_2(2-2(2t-1)) \\
&= 2\sqrt{2}h_2(2-2t)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

получаваме третия коефициент  $h_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

### 2.1.3 Метод чрез външното скалярно произведение

Метода чрез външното скалярно произведение използва интеграл на скалярни произведения в зависимост от лежащите базисни функции (леви или десни) за определен интервал. Недостатък на метода е неговата изчислителна сложност.

#### А) Мащабираща функция “Шапка”

Мащабиращата функция “Шапка” е с основа  $[0, 2]$ :

$$\phi(t) = \sqrt{2}(h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t-1) + h_2\phi(2t-2)) \in T$$

където между скалярните коефициента,  $h_0$ ,  $h_1$  и  $h_2$  съществува следната зависимост:

- коефициент  $h_0$  зависи от  $h_1$ ;
- коефициент  $h_1$  зависи от  $h_0$  и  $h_2$ ;
- коефициент  $h_2$  зависи от  $h_1$ .

За удобство интервала  $[0,2]$  се разделя два подинтервала  $[0,1]$  и  $[1,2]$  (фиг.2.3(а)) както и базисните функции се разделят на (леви) и (десни) (фиг.2.3(б)):

- (леви) (отбелязани с  $L$ ) за интервал  $t \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned}
\phi_L(t) &= L_0(t) = t \\
\phi_L(2t) &= 2t \\
\phi_L(2t-1) &= 2t-1 \\
\phi_L(2t-2) &= 2t-2
\end{aligned} \tag{2.8}$$

- (десни) (отбелязани с  $R$ ) за интервал  $t \in [1,2]$ :

$$\begin{aligned}
\phi_R(t) &= L_1(t) = 2-t \\
\phi_R(2t) &= 2-(2t) \\
\phi_R(2t-1) &= 2-(2t-1) = 3-2t \\
\phi_R(2t-2) &= 2-(2t-2) = 4-2t
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Върху мащабиращото уравнение  $\phi(t)$  се прилага дясно умножение с функциите  $\phi(2t)$ ,  $\phi(2t-1)$ , и  $\phi(2t-2)$  за всеки скаларен коефициент. По този начин се образуват три скалярни произведения зависими помежду си:

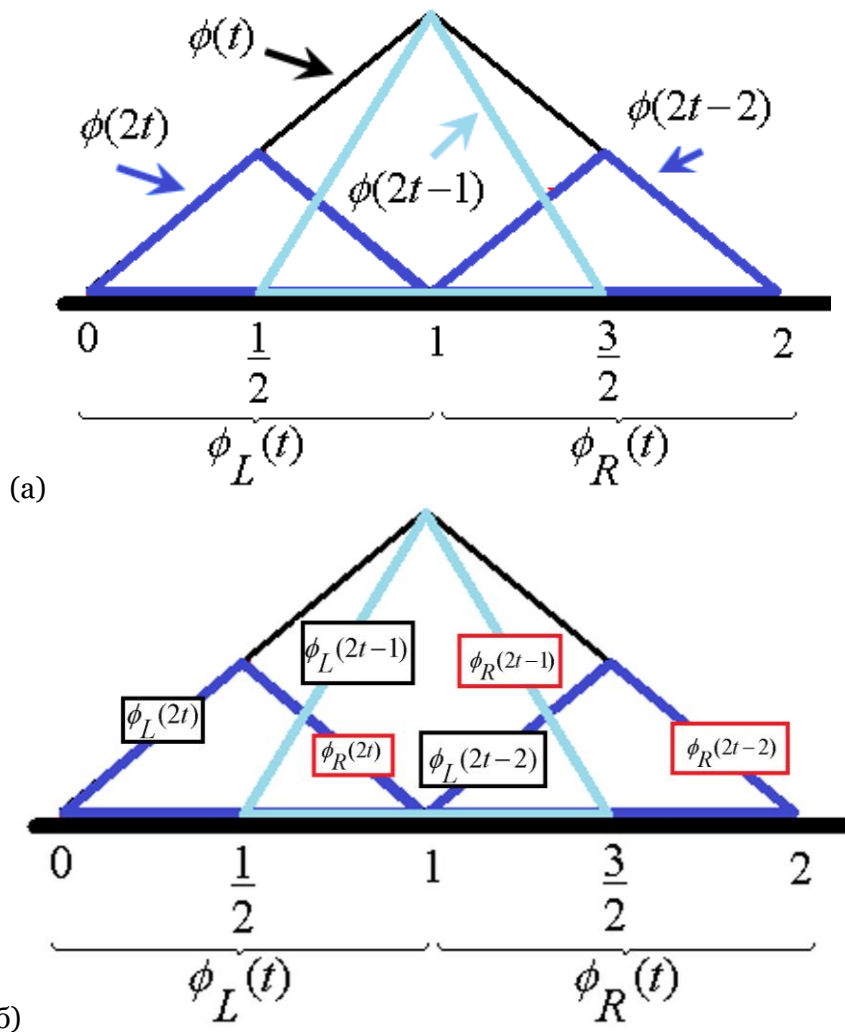
$$\begin{aligned}
 h_0 &\rightarrow \langle \phi(t), \phi(2t) \rangle \\
 &= \sqrt{2} [h_0 \langle \phi(2t), \phi(2t) \rangle + h_1 \langle \phi(2t-1), \phi(2t) \rangle + h_2 \langle \phi(2t-2), \phi(2t) \rangle] \\
 h_1 &\rightarrow \langle \phi(t), \phi(2t-1) \rangle \\
 &= \sqrt{2} [h_0 \langle \phi(2t), \phi(2t-1) \rangle + h_1 \langle \phi(2t-1), \phi(2t-1) \rangle + h_2 \langle \phi(2t-2), \phi(2t-1) \rangle] \\
 h_2 &\rightarrow \langle \phi(t), \phi(2t-2) \rangle \\
 &= \sqrt{2} [h_0 \langle \phi(2t), \phi(2t-2) \rangle + h_1 \langle \phi(2t-1), \phi(2t-2) \rangle + h_2 \langle \phi(2t-2), \phi(2t-2) \rangle]
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Тъй като  $\phi(2t-2)$  не лежи в интервала на  $[0,1]$ (**фиг. 2.1(а)**), тогава  $\phi(2t-2) = 0$  и скаларното произведение

$$\langle \phi(2t-2), \phi(2t) \rangle = 0.$$

Подобно, функцията  $\phi(2t)$  не лежи в интервала на  $[1,2]$ ,  $\phi(2t) = 0$  (**фиг. 2.1(а)**) и скаларното произведение:

$$\langle \phi(2t), \phi(2t-2) \rangle = 0.$$



**Фиг. 2.1** Машабираща функция “Шапка” (а) Линейния сплайн разделен на (леви)  $\phi_L(t)$  и (десни)  $\phi_R(t)$  (б) Базисни функции разделени на (леви)  $\phi_L(t)$  и (десни)  $\phi_R(t)$   $\phi_L(2t - \bullet)$  (в черно) и десни  $\phi_R(2t - \bullet)$  (в червено);

Следователно, неизвестните коефициенти се получават от системата:

$$[a, b, c] = \sqrt{2}[h_0, h_1, h_2] \begin{bmatrix} q & r & 0 \\ r & q & r \\ 0 & r & q \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

където

$$a = \langle \varphi(t), \varphi(2t) \rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_L(t) \varphi_L(2t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_L(t) \varphi_R(2t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t(2t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t(2-2t) dt = \frac{1}{4}$$

$$b = \langle \varphi(t), \varphi(2t-1) \rangle = \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_L(t) \varphi_L(2t-1) dt + \int_1^{\frac{3}{2}} \varphi_R(t) \varphi_R(2t-1) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t(2t-1) dt + \int_1^{\frac{3}{2}} (2-t)(3t-1) dt = \frac{5}{12}$$

$$c = \langle \varphi(t), \varphi(2t-2) \rangle = \int_1^{\frac{3}{2}} (2-t)(2t-2) dt + \int_{\frac{3}{2}}^2 (2-t)(4t-2) dt = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{1}{2} \langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \varphi_L(t) \varphi_L(t) dt + \int_1^2 \varphi_R(t) \varphi_R(t) dt \right) = \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{1}{2} \langle \varphi(2t), \varphi(2t) \rangle = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \varphi_L(2t) \varphi_L(2t-1) dt + \int_1^2 \varphi_R(2t) \varphi_R(2t-1) dt \right) = \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{1}{2} \langle \varphi(2t-1), \varphi(2t-1) \rangle = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \varphi_L(2t-1) \varphi_L(2t-1) dt + \int_1^2 \varphi_R(2t-1) \varphi_R(2t-1) dt \right) = \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{1}{2} \langle \varphi(2t-2), \varphi(2t-2) \rangle = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \varphi_L(2t-2) \varphi_L(2t-1) dt + \int_1^2 \varphi_R(2t-2) \varphi_R(2t-1) dt \right) = \frac{1}{3}$$

$$r = \langle \varphi(2t), \varphi(2t-1) \rangle = \langle \varphi(2t-1), \varphi(2t) \rangle = \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_R(2t) \varphi_L(2t-1) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2-2t)(2t-1) dt = \frac{1}{12}$$

$$r = \langle \varphi(2t-1), \varphi(2t-2) \rangle = \langle \varphi(2t-2), \varphi(2t-1) \rangle = \int_1^{\frac{3}{2}} \varphi_R(2t-1) \varphi_L(2t-2) dt = \int_1^{\frac{3}{2}} (3-2t)(2t-2) dt = \frac{1}{12}$$

Решение на системата (2.11) са трите скаларни коефициента:

$$[h_0, h_1, h_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \left( \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

## 2.2 Методи за построяване на уейвлетни и мултиуейвлетни функции

Методите за построяване на мащабиращи и мултимащабиращите функции се използват чрез заместване на базисните функции в:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_0^{N-1} G_N \varphi(2t-N) \in T \quad (2.12)$$

за построяване на уейвлетни и мултиуейвлетни функции.

За построяване на ортогонална мултиуйвлетна функция е необходимо предварително определени базисни функции ортогонални на мащабиращата или мултимащабиращата функция. Такив пример е филтър на Алперт.

За неортогонална мултиуйвлетна филтърна банка базисните функции са биортогонални на мултимащабиращата функция. Такива примери са кубичния и квинтик  $B$  – сплайни.

### **2.3 Резултати и изводи**

Представените в *Глава 2* резултати са следствие на изпълнението на изследователски задачи 2 и 3 на дисертацията. Описани са разработването на три метода за директно построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции с коефициенти от Лежандър полиноми, линеен и квадратичен  $B$  – сплайни, кубичен и квинтик Ермитов сплайни.

#### **Научни резултати, получени при изпълнение на задача 2 и 3:**

1. Разработени са три метода за директно получаване на скаларни и векторни функции: метод чрез смяна на базиса [т. 2.1], директен метод [т. 2.2], и метод чрез външното скаларно произведение [т. 2.3].

#### **Научно–приложни резултати получени при изпълнение на задача 2 и 3:**

1. Разработено е намаляване основата мащабиращи и мултимащабиращи функции от интервал  $[0,3]$  и  $[0,2]$  на  $[0,1]$  [т. 2.1.2].
2. Построени са мащабиращи и мултимащабиращи функции от линеен  $B$  – сплайн [т. 2.1.3.1, т. 2.2.1, и т. 2.3.1], квадратичен  $B$  – сплайн (т. 2.1.2.1, т. 2.1.3.2), кубичен Ермитов сплайн [т. 2.1.2.2, т. 2.1.3.3, т. 2.2.2, и т. 2.3.2], квинтик Ермитов сплайн (т. 2.1.3.4), и Лежандър полиноми [т. 2.1.3.5, т. 2.2.3, и т. 2.3.3] чрез използване на разработените метод чрез смяна на базиса, директен метод, и метод чрез външното скаларно произведение.

#### **Следното твърдение доказва постигането на заложеното в хипотезата:**

- а. Разработени са методи за построяване на мащабиращи и мултимащабиращи функции от полиноми и сплайни.

**ГЛАВА 3****РАЗРАБОТВАНЕ НА МЕТОДИ ЗА СПЕКТРАЛНО РАЗЛАГАНЕ**

В теорията на сигналите процеса на определяне на минималната фазова функция, принадлежаща към даден спектър на мощност, се нарича *спектрална факторизация*, тъй като спектърът на мощността е продукт на два фактора,  $H(z)$ , и  $H^*(z)$ , всеки от които трябва да бъде определен.

В теорията на уейвлетите спектър на мощност е пара – Ермитов полином който се нарича *филтър на произведение*.

В **глава 3** се разработват методи на спектрално разлагане - метод на корени на полиномите, метод на квадратични уравнения, Кепстрален метод, и метод на Бауер. За разлика от другите методи метод на Бауер изисква предварително построено произведението на скаларен (матричен) филтър, т.е. скаларен (матричен) пара–Ермитов полином. За получаване на матричен спектрален фактор (мултимасщабираща функция) с желани свойства е необходимо детерминанта да удовлетворява определени условия. Такъв пример е намирането на *Алперт филтър на произведение*.

**3.1 Разработване на произведение на матричен филтър**

Най–важната част при използване метода на спектрално разлагане е разработването на произведение на пара-Ермитов скаларен (матричен) полином (автокорелационна функция)  $P(z)$  удовлетворяващ задължителното условие за гладкост на желани мащабиращи (мултимасщабиращи) функции. Той е сингулярен и се състои от  $r \times r$  матрични коефициенти на степени  $z, z^{-1}$  с реални коефициенти от пръстена  $\mathbb{R}^{r \times r}[z, z^{-1}]$ . За намирането на желани функции произведението на скаларен (матричен) филтър  $P(z) \in \mathbb{R}^{r \times r}[z, z^{-1}]$  е необходимо да удовлетворява условието за полулентов филтър:

$$P(z) + P(-z) = 2I \quad (3.1)$$

където  $P_0 = I$ , и  $P_{2k} = 0, k \neq 0$ . За простота е разгледано разработването на произведение на двуканален матричен филтър на степен  $m = 1$  [89]:

$$P(z) = P_1^T + P_0 + P_1 z, \in \mathbb{R}^{2 \times 2}[z, z^{-1}] \quad (3.2)$$

с условие за гладкост:

$$\det P(z) = \left( \frac{1 + z^{-1}}{2} \right)^k Q(z) \quad (3.3)$$

където  $Q(z)$  е линейно–фазов полином на  $k$  – четна степен. По-голямата гладкост означава по–висока степен на  $P(z)$  с  $k$  – нули на единичната окръжност, т.е.  $|z|=1$  и множителя  $(1 \pm z^{-1})^k$  в (3.3).

### 3.2 Метод на квадратичните уравнения

Този метод на спектрално разлагане използва решаване на квадратични уравнения. В резултат на това произведението на скаларен (матричен) филтър  $p(z)$  се разлага на спектрален фактор  $h(z^{-1})$  и неговия Ермитово спрегнат  $h^*(z^{-1})$  [129]:

$$\begin{aligned} p(z) &= p_{-k}z^{-k} + \dots + p_{-2}z^{-2} + p_{-1}z^{-1} + p_0 \\ &\quad + p_1z + p_2z^2 + \dots + p_kz^k \\ &= h(z^{-1})h^*(z^{-1}) = h(z)h(z^{-1}) \\ &= (h_0 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots + h_kz^{-k})(h_0 + h_1z + h_2z^2 + \dots + h_kz^k) \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.3 Метод на корени на полиномите

Метод на корени на полиномите [31], [129] се изразява в разлагане на произведение на скаларен филтър  $p(z)$  (3.4) на неговите корени:

$$\begin{aligned} p(z) &= h(z)h(z^{-1}) \\ &= p_k \prod_{i=1}^m (z - z_i) \left(z - \frac{1}{z_i}\right) \prod_{i=1}^{k-m} (z - z_i)^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

където  $p_k \neq 0$  и комплексно спрегнатия  $z^*$  е корен когато  $z$  също е корен.

Главно предимство на метода е специалната структура на разлагания полином.

Главен недостатък е възможността от прилагане му върху полиноми от ниска степен, обикновено за  $k \leq 10$ .

### 3.4 Кепстрален метод

Кепстралният (Cepstral) метод на спектрално разлагане се основава на бързата Фурие трансформация (БФТ). Той изисква предвидени хардуерни или софтуерни рерурси [28], [33], [83], [94], [110]. Използва се за построяване на несиметрични мащабиращи функции. Главната идея е логаритъма на произведението на филтър:

$$\begin{aligned} \log p(z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} l_n z^{-n} \\ &= \left(\frac{l_0}{2} + \sum_1^{\infty} l_n z^{-n}\right) + \left(\frac{l_0}{2} + \sum_1^{\infty} l_n z^n\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Резултата е сума от два полинома по степените  $z^k$  и  $z^{-k}$  като коефициентите се изчисляват рекурсивно:

$$\begin{aligned} h_0 &= \exp\left(\frac{1}{2}l_0\right) \\ h_n &= l_n h_0 + \frac{n-1}{n} l_{n-1} h_1 + \dots + \frac{1}{n} l_1 h_{n-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

За да намерим коефициентите  $h_0, h_1, \dots, h_n$  е необходимо намирането на  $n+1$  коефициенти  $l_0, l_1, \dots, l_n$ .

### 3.5 Метод на Бауер

В основата на метода на Бауер е лемата на Фейър–Риз за матричния случай, която се прилага в математиката [29] и в теорията на управлението [60],[80],[120], [122].

**Лема на Фейър– Риз (Матричен Случай):**

Ако пара–Ермитов матричен полином  $A(z) = \sum_{k=-L}^L A_k z^k$  е положително определен за всички  $z \in \mathbb{T}$ ,

тогава съществува  $n \times n$  полином удовлетворяващ матричното равенство:

$$A(z) = U(z)U^*(z). \tag{#}$$

където  $U(z) = \sum_{k=0}^L U_k z^k$ . Тогава разлагането на произведение на скаларен  $p(z)$  (матричен  $P(z)$ ) филтър

$$\begin{aligned} p(z) &= p_{-k}z^{-k} + p_{-k+1}z^{-k+1} + \dots + p_0 + \dots + p_{k-1}z^{k-1} + p_k z^k, & p_{-k} &= p_k \\ P(z) &= P_{-k}z^{-k} + P_{-k+1}z^{-k+1} + \dots + P_0 + \dots + P_{k-1}z^{k-1} + P_k z^k, & P_{-k} &= P_k^T \end{aligned} \tag{3.8}$$

е еквивалентно на Холески разлагане на безкрайна блоково лентова матрица

$$T_{n \times n} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & P_{-k} & P_{-k+1} & \dots & P_{k-1} & P_k & & \\ & & P_{-k} & P_{-k+1} & \dots & P_{k-1} & P_k & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = FF^T \tag{3.9}$$

където Холески фактора е блоково лентова матрица:

$$F = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & C_k^{(n)} & \dots & C_1^{(n-1)} & C_0^{(n-1)} & & \\ & & C_k^{(n)} & \dots & C_1^{(n-1)} & C_0^{(n-1)} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

В [23], [24] е описано спектрално разлагане чрез класическия метод Бауер чрез построяване на  $(n + 1) \times (n + 1)$  блокова лентова Тьоплецова матрица с  $P_{-1} = P_1^T$ :

$$\begin{aligned} T_{n \times n} = F_{n \times n} F_{n \times n}^T &= \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_k & & & \\ P_{-1} & P_0 & P_1 & \dots & P_k & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ P_{-k} & & & \ddots & & & P_k \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \ddots & P_1 \\ & & & P_{-k} & \dots & P_{-1} & P_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_0^{(0)} & & & & & & \\ C_1^{(1)} & C_0^{(1)} & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ C_k^{(m)} & & & C_0^{(m)} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & C_k^{(n)} & \dots & C_1^{(n)} & C_0^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^{(0)} & & & & & & \\ C_1^{(1)} & C_0^{(1)} & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ C_k^{(m)} & & & C_0^{(m)} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & C_k^{(n)} & \dots & C_1^{(n)} & C_0^{(n)} \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \tag{3.11}$$

От последния ред на матрицата  $F_{n \times n}$  се определя спектралния фактор:

$$H^{(n)}(z) = C_0^{(n)} + C_1^{(n)}z^{-1} + \dots + C_k^{(n)}z^{-k}.$$



### **3.6 Резултати и изводи**

Представените в *Глава 3* резултати са следствие от изпълнението на изследователска задача 4 на дисертацията. Тя включва обзор на методите на спектрално разлагане - метод на корени на полиномите, метод на квадратични уравнения, Кепстрален метод, и метод на Бауер. Разработена е мултимащабираща функция с желани свойства и предварително зададена детерминантата. Разработено е авторско произведение на филтър на Алперт.

#### **Научни резултати, получени при изпълнение на задача 4:**

1. Разработено е авторско произведение на филтър на Алперт [т. 3.1].

## ГЛАВА 4

## РАЗРАБОТВАНЕ НА АЛГОРИТМИ ЗА БЪРЗ И ТОЧЕН МЕТОД НА БАУЕР

За да бъдат получени матрични коефициенти по метода на Бауер за спектрално разлагане са разработени детайлно алгоритми за решаване на НМУ. Затова тази глава е посветена на построяването на два численни алгоритъма - *Алгоритъм 1* и *Алгоритъм 2* чиито прилагане води до решения на НМУ с точни стойности. Също така са показани са разликите между класическия и бърз метод на Бауер.

Спектралното разлагане на произведение на филтър с основа по-голяма от  $[0,1]$  увеличава изчислителната сложност. За тази цел е предложено коефициентите на произведение с основа  $[0,N]$  да се пренаредят на основа  $[0,1]$ .

#### 4.1 Обща теория на бърз метод на Бауер

Предимствата на бързия метод на Бауер (БМБ) е избягване построяването и разлагането на Тьоплецова матрица с огромни размери и възможността спектралните фактори да бъдат с точни коефициенти чрез *символни изчисления* с *Matlab* [92], [93] и *Maple* [90].

За тази целта степента на произведението на филтъра е необходимо да бъде понижена на  $k=1$ . За целта коефициентите  $P_k$  в произведението на филтър на  $k$ -степен

$$P(z) = P_{-k}z^{-k} + P_{-k+1}z^{-k+1} + \dots + P_0 + \dots + P_{k-1}z^{k-1} + P_kz^k, \quad P_{-1} = P_1^T \in \mathbb{R}^{r \times r}[z, z^{-1}]. \quad (4.1)$$

се пренареждат в два коефициента  $\hat{P}_0$ , и  $\hat{P}_{-1} = \hat{P}_1^T$ ,

$$\hat{P}(z) = \hat{P}_{-1}z^{-1} + \hat{P}_0 + \hat{P}_1z. \quad (4.2)$$

#### 4.2 Построяване на алгоритъм за бърз метод на Бауер

В класическия метод на Бауер за спектрално разлагане главен недостатък Холески разлагане на лентова Тьоплецова матрица  $T_{n \times n}$  с огромни размери ( $>10^6$ ) състояща се от коефициентите на произведението на скаларен (матричен) филтър. Метода се усложнява за сингулярно произведение на филтър, което води до подлинейна сходимост и спектрални фактори с големи грешки. Това води до разработването на бърз метод на Бауер за скаларно (матрично) спектрално разлагане [90].

За описание на метода е разгледано произведение на матричен филтър на степен  $k=1$ . Ако допуснем, че е зададена началната стойност за първия коефициент  $C_0^0$  на мащабиращата функция тогава, първия коефициент на произведението на филтъра е:

$$P_0 = C_0^0 [C_0^0]^T. \quad (4.3)$$

От друга страна, стойностите на матричните коефициенти  $C_0^{(n)}$  и  $C_1^{(n)}$  са известни след  $n$ -итерация, тогава втория коефициент

$$C_1^{(n+1)} = P_1^T [C_0^{(n)}]^{-T} \quad (4.4)$$

получен чрез итерациите за  $P_1 = C_0^{(n)} [C_1^{(n+1)}]^T$  се замества в първия коефициент:

$$P_0 = C_1^{(n+1)} [C_1^{(n+1)}]^T + C_0^{(n+1)} [C_0^{(n+1)}]^T \quad (4.5)$$

с което се построява нелинейно матрично уравнение (НМУ):

$$\begin{aligned} C_0^{(n+1)} [C_0^{(n+1)}]^T &= P_0 - C_1^{(n+1)} [C_1^{(n+1)}]^T \\ &= P_0 - P_1^T [C_0^{(n)}]^T [P_1^T [C_0^{(n)}]^T]^T \end{aligned} \quad (4.6)$$

или

$$C_0^{(n+1)} [C_0^{(n+1)}]^T = P_0 - P_1^T [C_0^{(n)}]^T [C_0^{(n)}]^{-1} P_1 \quad (4.7)$$

Това е бърз метод на Бауер [89], [90] в НМУ за  $n$  - итерации разработен от автора:

$$X^{(n+1)} = P_0 - P_1^T [X^{(n)}]^{-1} P_1 \quad (4.8)$$

където

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= P_0 \\ X^{(n)} &= C_0^{(n)} [C_0^{(n)}]^T \end{aligned} \quad (4.9)$$

Чрез (4.8) и (4.9) съставени *Алгоритъм 1* - за изчисляване на бърз метод на Бауер и *Алгоритъм 2* (Фиг. 4.1) - за изчисляване на точен метод на Бауер (Фиг. 4.2).

=====

**Inputs:**  $P_0, P_1, \dots, P_k$  (Скаларни (Матрични) коефициенти на  $P(z)$ )

**Outputs:**  $C_0, C_1, \dots, C_k$  (Скаларни (Матрични) коефициенти на  $H(z)$ )

**Begin:**

**If**  $k > 1$

Построяване на блоково матрици  $\hat{P}_0$  и  $\hat{P}_1$  за понижаване степента на произведението на скаларен (матричен) филтър на  $k=1$ ;

**End**

**Step 1:** Намиране на матрицата  $\hat{X}$  чрез численно решаване на

$$\hat{X} = P_0 - P_1^T \hat{X}^{-1} P_1;$$

**Step 2:** Намиране на матрицата  $\hat{C}_0$  като Холески разлагане, т.е.

$$\hat{X} = C_0 C_0^T;$$

**Step 3:** Намиране на матрицата  $\hat{C}_1$  чрез  $\hat{C}_1 = \hat{P}_1 \hat{C}_0^{-T}$ ;

**If**  $k > 1$

Извличане на  $C_0, C_1, \dots, C_k$  от  $\hat{C}_0$  и  $\hat{C}_1$ ;

**End**

**End**

=====

**Фиг. 4.1 Алгоритъм 1:** Бърз метод на Бауер

=====  
**Inputs:**  $P_0, P_1, \dots, P_k$  (Скаларни (Матрични) коефициенти на  $P(z)$ )  
**Outputs:**  $C_0, C_1, \dots, C_k$  (Скаларни (Матрични) коефициенти на  $H(z)$ )  
**Begin:**  
     **If**  $k > 1$   
         Построяване на блоково матрици  $\hat{P}_0$  и  $\hat{P}_1$  за понижаване  
         степената на произведение на скаларен (матричен) филтър  
         на  $k=1$ ;  
     **End**

Използване на символна алгебра
<p><b>Step 1:</b> Построяване на симетричната матрица <math>\hat{X}</math> чрез символни стойности <math>x_{ij}</math>;</p> <p><b>Step 2:</b> Построяване и решаване на НМУ чрез нелинейна система от уравнения:</p> $f(\hat{X}) = \hat{X} - \hat{P}_0 + \hat{P}_1^T \hat{X}^{-1} \hat{P}_1 = 0;$

**Step 3:** Намиране на матрицата  $\hat{C}_0$  чрез Холески разлагане на  $\hat{X}$  ;  
**Step 4:** Намиране на матрицата  $\hat{C}_1$  чрез  $\hat{C}_1 = \hat{P}_1^T \hat{C}_0^{-T}$  ;  
     **If**  $k > 1$   
         Извличане на  $C_0, C_1, \dots, C_k$  от  $\hat{C}_0$  и  $\hat{C}_1$  ;  
     **End**  
**End**

=====  
**Фиг. 4.2 Алгоритъм 2:** Точен метод на Бауер

Всяко решение  $X^{(n)}$  за  $n \rightarrow \infty$  е решение на НМУ за  $n$ -итерация, т.е. граничните стойности водят до НМУ:

$$X = P_0 - P_1^T X^{-1} P_1 \tag{4.10}$$

с крайните стойности на коефициентите на матричния фактор:

$$\begin{aligned} C_0 &\leftarrow X = \lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)} \\ C_1 &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_1^T [C_0^{(n)}]^{-T} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Следователно, скаларения (матричния) спектрален фактор е:

$$H(z^{-1}) = C_0 + C_1 z^{-1} \tag{4.12}$$

### 4.3 Методи за решаване на НМУ в БМБ

В тази глава са изследвани трите метода за решаване на НМУ:

4.3.1 Метод на фиксираната точка

4.3.2 Метод на Нютон

4.3.3 Чрез използване на ОДАУР

### 4.4 Бърз метод на Бауер (Скаларен случай)

В тази глава е изследван скаларния случай на БМБ.

### 4.5 Бърз метод на Бауер (Векторен случай)

В тази глава е изследван векторния случай на БМБ.

#### **4.6 Резултати и изводи**

Представените в *Глава 4* резултати са следствие от изпълнението на изследователски задачи 4 и 5 на дисертацията. Тя е посветена на разработване на *Алгоритъм 1* и *Алгоритъм 2* за численното решаване на БМБ. Това е наложено от факта, че класическият метод за спектрално разлагане на сингулярно произведение на скаларен (матричен) филтър изисква построяване на блокова лентова Тьоплецова матрица с огромни размери ( $>10^6$ ) и нейното Холески разлагане.

При разработването и изследването на метода БМБ са използвани численните решения на НМУ по метода на неподвижната точка, метода на Нютон, и обобщеното дискретно алгебрично уравнение на Рикати.

Главното предимство на разработения *Алгоритъм 2* е възможността мултимасщабиращите функции да бъдат с точни коефициенти, следователно и мултиуейвлетните функции, и да удовлетворяват желани мултифилтърни свойства. Това е верифицирано чрез разработването мултифилтър на Алперт.

#### **Научно – приложни резултати, получени при изпълнение на задача 4 и 5:**

- 1.** Разработени е алгоритъм за понижаване степента на произведението на матрични филтри [т.4.1].
- 2.** Разработени са *два авторски алгоритъма* за бърз метод на Бауер;
  - (а) *Алгоритъм 1* - за изчисляване на бърз метод на Бауер [т.4.2].
  - (б) *Алгоритъм 2* - за изчисляване на точен метод на Бауер [т.4.2].
- 3.** Разработени са *два авторски численни метода* за решаване на НМУ за БПБ и е представена тяхната изчислителна сложност [т.4.3.1] и [т.4.3.2].
- 4.** Приложен е класическият и бърз метод на Бауер за спектрално разлагане на произведението на скаларен филтър [т.4.4] и произведението на матричен филтър на Алперт [т.4.5.1].
- 5.** Разработен са *два авторски варианта* за намиране на симетрични уейвлетни функции на Алперт. [т.4.5.2].

#### **Следните твърдения доказват постигането на заложеното в хипотезата:**

- (б) Разработване на *Алгоритъм 1* и *Алгоритъм 2* за бърз и точен Метод на Бауер;

**ГЛАВА 5****ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ НА РАЗРАБОТЕНИТЕ МЕТОДИ ЗА ПОСТРОЯВАНЕ НА УЕЙВЛЕТНИ И МУЛТИУЕЙВЛЕТНИ ФИЛТЪРНИ БАНКИ**

Главата е посветено на експериментално изследване на класическия и бърз метод на Бауер за спектрално разлагане и сравнителен анализ чрез 7 примера, както и построяване мащабиращите функции на Хаар, Добеши4, и мултимащабиращата функция на Алперт. Сравнени са различни приложения на ортогонални мултиуейвлет филтъра за обработка на тествачи изображения с ниво на сиво и изображения от сканирани фотографски плаки. Извършено е експериментално изследване на разработени от автора модули без умножение за биортогонална 5/3 филтърна банка проектирани и реализирани върху препрограмируема интегрална схема.

**5.1 Експериментално изследване и сравнителен анализ на класическия и бърз метод на Бауер за спектрално разлагане****5.1.1 Експериментално изследване на класическия метод на Бауер за скалярно спектрално разлагане (мащабираща функция на Хаар)**

Произведението на филтъра на Хаар е сингулярен скаларен пара–Ермитов полином с двойна нула на единичната окръжност ( $z = -1$ ) на степен  $k = 1$ ,

$$p(z) = \frac{1}{2} z^{-1} + 1 + \frac{1}{2} z \quad (5.1)$$

Спектралното разлагане произведението (5.1) води до спектралния фактор с точни коефициенти:

$$h_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}. \quad (5.2)$$

Сходимостта на метода на Бауер за спектралното разлагане зависи от сингулярността на произведението (5.1). Това се очевидно от абсолютната грешка получена за коефициента в диагонала на  $n \times n$  блоково лентовата Тьоплецова матрица за ред  $n \rightarrow 1$

$$\varepsilon_{\text{Haar}} = \left| \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right| \quad (5.3)$$

**5.1.2 Експериментално изследване на класическия метод на Бауер за скалярно спектрално разлагане (мащабираща функция на Добеши 4)**

Произведението на филтър на Добеши 4 е сингулярен скаларен пара–Ермитов полином с четворна нула на единичната окръжност ( $z = -1$ ) на степен на степен  $k = 3$ :

$$\begin{aligned} p(z) &= h(z)h(z^{-1}) \\ &= \frac{1}{16} (-z^{-3} + 9z^{-1} + 16 + 9z - z^3). \\ &= -\frac{(1+z)^4(z^2 - 4z + 1)}{16} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Спектралното разлагане води до добре известния минимално фазов Добеши 4 филтър:

$$h(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})z^{-1} + (3 - \sqrt{3})z^{-2} + (1 - \sqrt{3})z^{-3}]. \quad (5.5)$$

Минималната грешка на произведението на филтъра  $\varepsilon_P \approx 1.793 \times 10^{-10}$  е постиганата за  $n=58750$ , докато минималната грешка за спектралния фактор  $\varepsilon_P \approx 1.534 \times 10^{-5}$  е постиганата за  $n=65000$ .

### 5.1.3 Експериментално изследване на класическия метод на Бауер за матрично спектрално разлагане (мултимащабираща функция на Алперт)

Произведението на филтъра на Алперт е сингулярен матричен пара–Ермитов полином  $P(z) \in C^{2 \times 2}[z, z^{-1}]$  с четирикратна нула на единичната окръжност и степен  $k = 1$ :

$$P(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} z, \quad (5.6)$$

Грешката на произведението на матричния филтър намалява с пик на  $n=20375$  до стойност  $\varepsilon_P \approx 0.699 \times 10^{-15}$ , след което се увеличава до  $\varepsilon_P = 6.19879 \times 10^{-12}$  за  $n=22500$  отново намалява до  $\varepsilon_P \approx 0.5967 \times 10^{-15}$  за  $n=32500$ .

### 5.1.4 Експериментално изследване на БМБ

#### 5.1.4.1 Скаларно спектрално разлагане

##### 5.1.4.1 Скаларно спектрално разлагане

##### А) Мащабираща функция на Хаар

Произведението на филтъра на Хаар (5.1) води до нелинейното уравнение

$$\begin{aligned} x &= p_0 - p^2 x^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} x^{-1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

с  $x = \frac{1}{2}$ . Първият скаларен коефициент се намира от Холески разлагане на  $x = h_0^2$ :

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.8)$$

Следователно, втория скаларен коефициент е

$$h_1 = p_1 h_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.9)$$

Очевидно, БМБ е прост и елегантен метод за спектрално разлагане с точни стойности на спектралния фактор.

#### 5.1.4.2 Приложения на БМБ за спектрално разлагане

##### (А) на Алгоритъм 2

#### 5.1.4.2 Приложения на БМБ за спектрално разлагане

##### (А) Чрез прилагане на Алгоритъм 2

Бързият и точния метод на Бауер са изследвани за седем примери - шест сингулярни или несингулярни произведения на матрични полиноми, и един пример на

произведение на скаларен филтър (табл. 5.1). Всички спектрални фактори са получени с точни стойности.

В един от примерите е разработен нов ортогонален суперкомпакт мултифилтър с по-добра Соболева гладкост  $S_{SUP} = 1.28$  отколкото СЛ мултифилтър  $S_{SUP} = 1.06$ . Грешките на мащабираща функция и произведение на филтъра се изчисляват с:

$$\begin{aligned} \varepsilon_H &= \| C_0 - C_0^{(n)} \| \\ \varepsilon_P &= \| P_0 - C_0^{(n)} [C_0^{(n)}]^T - C_1^{(n)} [C_1^{(n)}]^T \| \end{aligned}$$

**Таблица 5.1**

Характеристики на произведенията на филтрите – сингулярност и нули на единичната окръжност за примери 1–7

Пример	Сингулярност	Нули на единичната окръжност
1	Не	Няма
2	Да	Две двойни ( $z = -1$ )
3	Да	Две двойни ( $z = \pm 1$ )
4	Да	Четирикратна ( $z = -1$ )
5	Да	Четирикратна ( $z = -1$ )
6	Да	Четирикратна ( $z = -1$ )
7	Да	Десетократна ( $z = -1$ )

**Пример 1:** Произведение на несингулярен филтър

Несингулярният пара-Ермитов матричен полином [95]:

$$P(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} z^{-2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^2$$

е с детерминанта  $\det P(z) = \frac{(2z-1)(2-z)}{z}$  и корени  $\frac{1}{2}, 2$ . Намалването на основата на

полинома води до НМУ с  $4 \times 4$  матрици  $\hat{P}_0$  и  $\hat{P}_1$  чието решение е

$$X = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 145 & 8 & -34 \\ -2 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & -34 & 0 & 153 \end{bmatrix}$$

Прилагайки същите стъпки както за предните спектрални разлагания е получен матричният спектрален фактор с точни коефициенти:

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 17 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} z^{-1} + \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^{-2}$$

**Пример 2:** Мащабираща функция на Хаар (Ненормализирана)

Произведението на филтър на Хаар е пара-Ермитов скаларен полином:



$$P(z) = z^{-1} + 2 + z = (1+z)(1+z^{-1}) = \frac{(1+z)^2}{z}$$

с двойна нула на  $z=-1$ . Тъй като решението на НМУ е  $X=1$ , спектралния фактор е ненормализирана Хаар мащабираща функция:

$$H(z) = 1 + z^{-1}.$$

### Пример 3: Сингулярен матричен полином

Сингулярния пара-Ермитов матричен полином [61]

$$P(z) = \begin{bmatrix} 6 & 22 \\ 22 & 84 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 38 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 22 \\ 22 & 84 \end{bmatrix} z$$

е с  $\det P(z) = -\frac{(z+1)^2(z-1)^2}{z^2}$  и две двойни нули  $z = \pm 1$ . Решението на НМУ  $X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{bmatrix}$

води до матричния спектрален фактор с точни стойности:

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} z.$$

### Пример 4: Целочислен мултифилтър [32]

Произведението на целочислен матричен филтър е пара-Ермитовия матричен полином:

$$P(z) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} z$$

с  $\det P(z) = \frac{(1+z^{-1})^4}{8z^2}$  и четирикратна нула. Решението  $X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$  води до

ортогоналната мултимащабираща функция:

$$H(z) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

Целочисленната мултимащабираща функция се получава чрез произведение с матрицата

$$C = \text{diag}(\sqrt{2}, 1) [89]:$$

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} z^{-1}$$

Следователно, допълващата целочисленната мултиуейвлетна функция е:

$$G(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} z^{-1}.$$

### Пример 5: Нови суперкомпактни мултифилтри [90]

Произведение на матричния CL (Чуи – Лиан) филтър

$$P_{CL}(z) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 1+\sqrt{7} \\ -(1+\sqrt{7}) & -\sqrt{7} \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & -(1+\sqrt{7}) \\ \sqrt{7}+1 & -\sqrt{7} \end{bmatrix} z$$

е с  $\det P_{CL}(z) = \frac{(4 - \sqrt{7})(1+z)^4}{32z^2}$  и четирикратна нула. То е получено от СЛ мултимасщабираща функция в [35]:

$$H_{CL} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2+\sqrt{7}}{4} \\ 0 & \frac{2-\sqrt{7}}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{7}}{4} & 0 \\ \frac{2+\sqrt{7}}{4} & 0 \end{bmatrix} z^{-2}.$$

Решението НМУ за  $P_{CL}$  е несингулярна матрица  $X = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{7}+1 \\ \sqrt{7}+1 & 4 \end{bmatrix}$ . Първият коефициент е получен чрез Холески разлагане на  $X$  (Приложение 3).

$$C_0 = \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{7}+1 & \sqrt{8-2\sqrt{7}} \end{bmatrix}.$$

Тъй като стойността  $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$  може да се представи с два различни множителя:

$$\begin{aligned} \sqrt{8-2\sqrt{7}} &= \sqrt{(1-\sqrt{7})^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}-1)} = \sqrt{(1-\sqrt{7})(1-\sqrt{7})} \end{aligned}$$

тогава получените ортогонални мултимасщабиращи функции са две:

$$(M1) \ (\sqrt{7}-1): \ H(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{7}+1 & \sqrt{7}-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -\sqrt{7}-1 & \sqrt{7}-1 \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

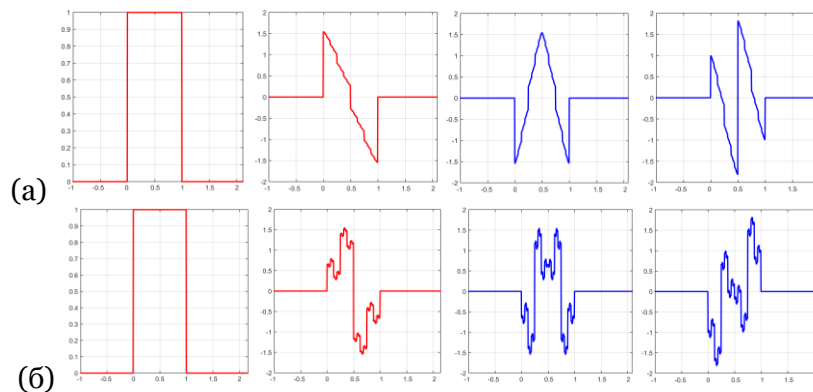
$$(M2) \ (1-\sqrt{7}): \ H(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{7}+1 & -(1-\sqrt{7}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -\sqrt{7}-1 & -(\sqrt{7}-1) \end{bmatrix} z^{-1} \right)$$

като допълващите ортогонални мултиуейвлетни функции са:

$$(M1) \quad G(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -(1-\sqrt{7}) & 1+\sqrt{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1-\sqrt{7} & 1+\sqrt{7} \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

$$(M2) \quad G(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -(1-\sqrt{7}) & -(1+\sqrt{7}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1-\sqrt{7} & -(1+\sqrt{7}) \end{bmatrix} z^{-1} \right).$$

На **фиг. 5.1** са показани новите два мултимасщабиращи и мултиуейвлетни функции.



**Фиг.5.1** Авторски ортогонални суперкомпактни мултимасщабираща  $\Phi(t) = [\phi_0, \phi_1]^T$  (червено) и мултиуейвлетна функция  $\Psi(t) = [\psi_0, \psi_1]^T$  (синьо); (а) (П1) (б) (П2)

**Пример 6:** Мултимасщабираща функция на Алперт

Произведението на сингулярния матричен филтър на Алперт е пара–Ермитовия полином

$$P(z) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} z$$

с  $\det P(z) = \frac{z^2(1+z)^4}{16}$  и четирикратна нула. Решението на НМУ,  $X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$  чрез

Холески разлагане води първия матричен коефициент:

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Вторият матричен коефициент:

$$C_1 = P_1 C_0^{-T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

**Пример 7:** (Лежандър полином на степен 5)

Произведението на матричен филтър от Лежандър полином на степен 5 е сингулярния пара–Ермитов матричен полином:

$$P(z) = P_0 + P_1 z^{-1},$$

където  $P_0 = I$ ,  $P_1 = \frac{1}{256} \begin{bmatrix} 128 & 64\sqrt{3} & 0 & -16\sqrt{7} & 0 \\ -64\sqrt{3} & -64 & 16\sqrt{15} & 16\sqrt{21} & -8\sqrt{3} \\ 0 & -16\sqrt{15} & -112 & -8\sqrt{15} & 24\sqrt{5} \\ -64\sqrt{7} & 16\sqrt{21} & 8\sqrt{35} & -40 & -39\sqrt{7} \\ 0 & 8\sqrt{3} & 24\sqrt{5} & 39\sqrt{7} & 53 \end{bmatrix}$ , детерминанта

$\det P(z) = \frac{(z+1)^{10}}{z^5 2^{25}}$  и десеткратна нула на единичната окръжност. Решението на НМУ

$$X = \frac{1}{256} \begin{bmatrix} 128 & -64\sqrt{3} & 0 & 16\sqrt{7} & 0 \\ -64\sqrt{3} & 128 & -16\sqrt{15} & 0 & 8\sqrt{3} \\ 0 & -16\sqrt{15} & 128 & -16\sqrt{15} & 0 \\ 16\sqrt{7} & 0 & -16\sqrt{35} & 128 & -21\sqrt{7} \\ 0 & 8\sqrt{3} & 0 & -21\sqrt{7} & 128 \end{bmatrix}$$

води до ортогоналната мултимасщабираща функция

$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{32} \left( \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3} & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\sqrt{15} & 4 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 2\sqrt{21} & -2\sqrt{35} & 2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 6\sqrt{5} & 3\sqrt{7} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8\sqrt{3} & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{15} & 4 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{7} & 2\sqrt{21} & 2\sqrt{35} & 2 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 6\sqrt{5} & -3\sqrt{7} & 1 \end{bmatrix} z^{-1} \right)$$

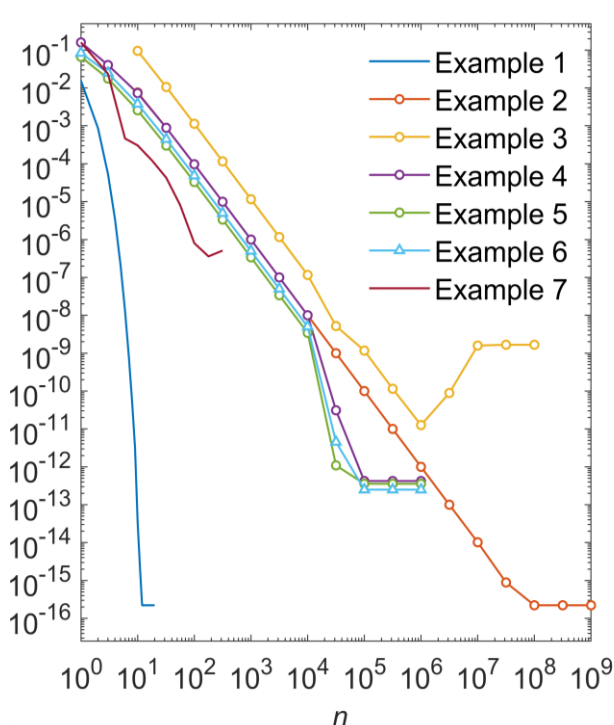
Численните грешки получени от ‘Алгоритъм 1’ за БМБ по метода на неподвижната точка и метода на Нютон за производението на филтър  $\varepsilon_p$  и спектралния фактор  $\varepsilon_H$  за **примери 1–7** са показани на **фиг.5.2** и **фиг.5.3** с изчислителна сложност за двата численни метода на **табл.5.2**. Резултатите и за двата метода показват че сходимоста е подлинейна.

Относно броя на итерации за разлагане на сингулярни скаларни или матрични пара-Ермитови полиноми, метода на Нютон изисква няколко, докато метода на неподвижната точка изисква минимум няколко хиляди. Численни грешки за **примери 1 – 7** на филтър произведение  $\varepsilon_p$  и на спектралния фактор  $\varepsilon_H$  получени по метода на фиксираната точка и метода на Нютон при използване на *Алгоритъм 1* за БМБ на спектрално разлагане показани на **Фиг. 5.2** и **Фиг. 5.3**. Резултатите показват големите разлики в сходимоста на дват метода и необходимите итерации.

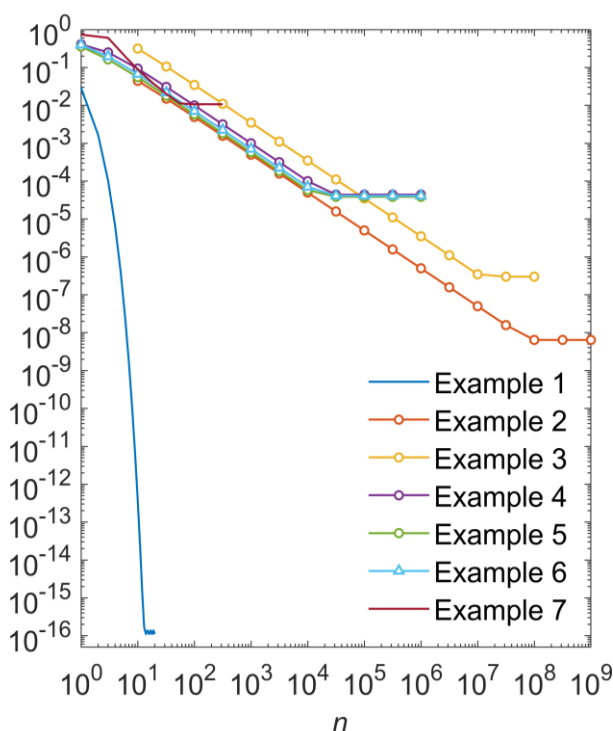
**Таблица 5.2**

Изчислителна сложност на БМБ чрез метода на неподвижната точка и метода на Нютон за  $m$  - степенно произведение на филтър с  $r \times r$  матрични коефициенти

Метод	Изчислителна сложност	Итерации
Метод на неподвижната точка	$O((mn)^3)$	<b>Хиляди</b> (не по – малко $5 \times 10^3$ )
Метод на Нютон	$O((mn)^6)$	<b>Няколко</b> (по – малко от 50)

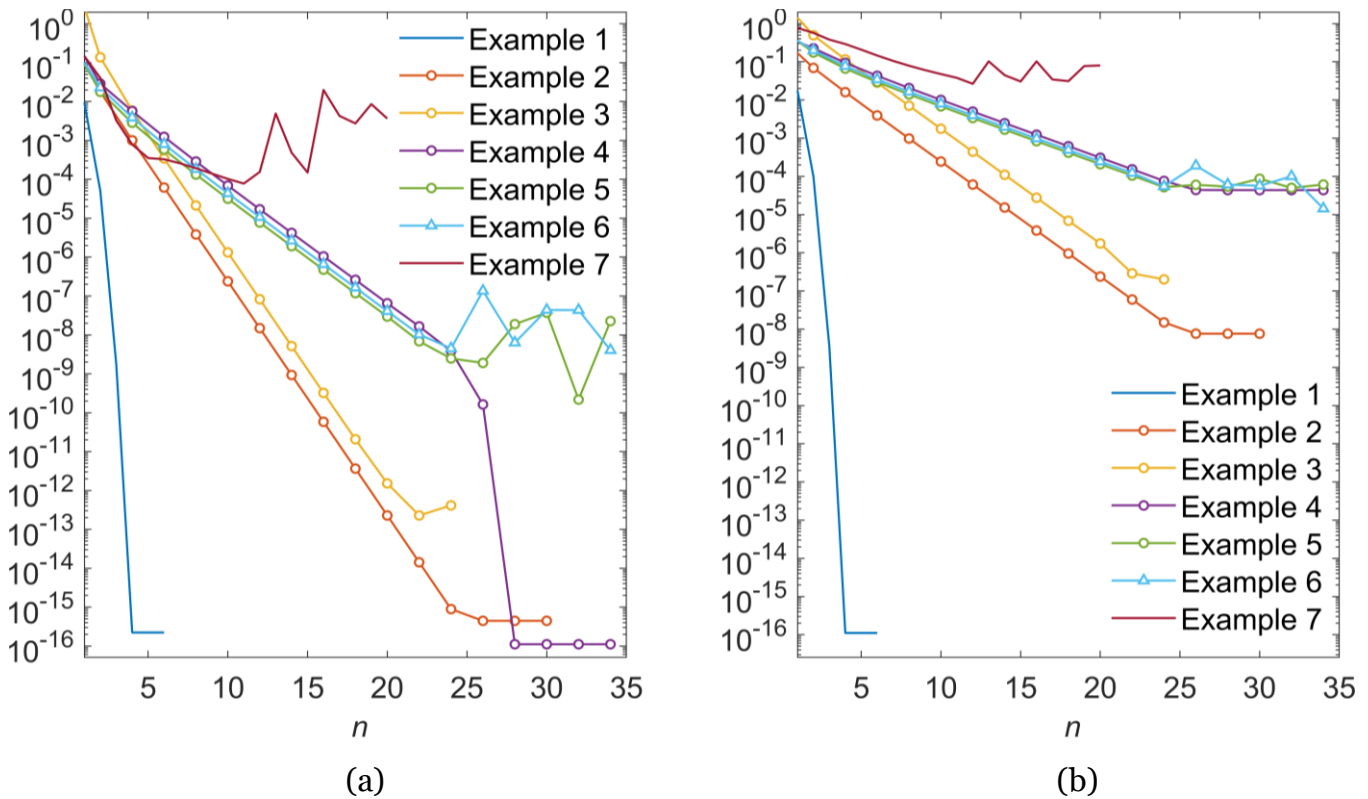


(a)



(b)

**Фиг. 5.2.** Численни грешки на БМБ по метод на фиксираната точка за скаларно и матрично спектрално разлагане в  $\log$ – $\log$  формат; (a)  $\varepsilon_p$  на филтър произведение; (b)  $\varepsilon_H$  на спектралния фактор;



**Фиг. 5.3.** Численни грешки на БМБ по метод на Нютон за скалярно и матрично спектрално разлагане в *semi-log* формат; (a)  $\varepsilon_p$  на филтър произведение; (b)  $\varepsilon_H$  на спектралния фактор;

### Б) Чрез използване на вградени софтуерни функции

Бързият и точния метод на Бауер са изследвани за седем примери за решаване на НМУ чрез обобщеното дискретно алгебрично уравнение на Рикати (ОДАУР). Използвани са вградените софтуерни функции за символно пресмятане в *Maple* ('*dare*') и *Matlab* ('*dare*' и '*idare*').

*Maple* - Численните грешки от *Maple* показват, че спектрално разлагане с висока точност се постигна единствено за несингулярен матричен полином ( $\sim 10^{11}$ ) (Пример 1). В случай на сингулярни пара-Ермитови матрични полиноми с многократни нули на единичната окръжност точността е  $\sim 10^4$  (Примери 4-7), а случай с двойни нули или различни знаци (т.е.  $z=\pm 1$ , Пример 3) решението на НМУ е с неправилни стойности. Следователно, използване на вградената функция ('*dare*') в *Maple* е не препоръчително.

*Matlab* - Численните грешки от *Matlab* показват по-добра точност в R2018a, където се решават примери 1-6 като точността е по-добра от от *Maple*. Единствено за пример 7 точността е по-ниска от *Maple*.

### 5.1.5 Сравнителен анализ на методите на Бауер

Както бе споменато в предишните глави главен недостатък на класическия метод на Бауер е необходимостта от Холески разлагането на Тьоплецова матрица с големи размери (повече от  $n=65 \times 10^3$ ). Това е породено от факта, че спектралното разлагане е приложено върху произведения на филтри с кратни и/или многократни нули на единичната окръжност.

Главните предимства на БМБ е избягване от построяване на Тьоплецова матрица и получаване на спектралния фактор с точни стойности.

Главен недостатък на БМБ е подлинейната сходимост при разлагане на пара – Ермитови полиноми с кратни и/или многократни нули, което не гарантира получаването на спектрален фактор (произведение на Добеши 4 функция).

## 5.2 Приложение на ортогонални мултифилтърни банки

### 5.2.1 Разработване и приложение на лифтинг схема на филтър на Алперт. Диадична апроксимация на $\sqrt{3}$ за 2D сигнали

При разработването на хардуерна реализация на мултифилтър е необходимо входния сигнал да се преобразува във векторен както и филтърните коефициенти да бъдат кватувани, т.е. да бъде направена диадична апроксимация. Подходяща структура за реализация на мултифилтър е лифтинг схемата [134]. Тя е разработена за построяване на мултифилтър на Алперт от автора за пръв път в [89].

Лифтинг схемата на анализиращата част с входен вектор  $x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  се описва чрез уравненията:

$$\begin{aligned} y_0 &= t_0 \\ y_1 &= t_1 \\ y_2 &= -\frac{1}{2}t_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}t_1 + t_2 \\ y_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}t_0 + \frac{1}{2}t_1 - \sqrt{3}t_2 + t_3 \end{aligned} \quad , \quad \text{където} \quad \begin{aligned} t_0 &= x_0 + x_2 \\ t_1 &= x_1 - x_3 \\ t_2 &= x_2 + \sqrt{3}x_3 \\ t_3 &= 4x_3 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Лифтинг схемата за възстановяващата част с изходен вектор  $\hat{x} = \{\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$  се описва чрез уравненията:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= t_0 - \hat{x}_2 \\ \hat{x}_1 &= t_1 + \hat{x}_3 \\ \hat{x}_2 &= t_2 - \sqrt{3}\hat{x}_3, \\ \hat{x}_3 &= \frac{t_3}{4} \end{aligned} \quad , \quad \text{където} \quad \begin{aligned} t_0 &= y_0 \\ t_1 &= y_1 \\ t_2 &= y_2 + \frac{1}{2}t_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}t_1 \\ t_3 &= y_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}t_0 + \frac{1}{2}t_1 + \sqrt{3}t_2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

### 5.2.2 Сравнителен анализ на три ортогонални мултифилтри за обезшумяване на изображения с ниво на сиво

Обезшумяването е от най-честите обработки на сигнали. Това е процес на намаляване или отстраняване на адитивен бял Гаусов шум (АБГШ),  $e \sim N(0, \sigma^2)$  към оригинален сигнал  $s$  и получаване на обезшумен сигнал  $\hat{s}$ . Запазване характеристиките на оригиналния сигнал изисква прилагане на подходяща техника за обезшумяване, например, мултиуейвлетната трансформация  $\Theta$ . Тя концентрира енергията на входния сигнал в няколко уейвлетни коефициента, а енергията на шума в подлентите, която е с Гаусово разпределение. Това дава възможност при зададен праг “мек” или “твърд” малките уейвлетни коефициенти да бъдат намалени или анулирани.

Мултиуейвлетна трансформация  $\Theta$  с пре-филтър  $M$  и сигнал с шум  $\tilde{s} = s + \varepsilon$  се описва с:

$$\Theta M \tilde{s} = \Theta M s + \Theta M \varepsilon \quad (5.12)$$

чиято корелация между уейвлетните коефициенти с техните съседни чрез блокове  $Y_j$  е:

$$\tilde{\mathbf{d}}_k^j = \mathbf{d}_k^j + \mathbf{f}_k^j. \quad (5.13)$$

чрез скаларните стойности  $\omega_k^j = \sqrt{(\tilde{\mathbf{d}}_k^j)^T Y_j^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_k^j}$  върху, които се прилагат [48]:

$$\begin{aligned} \text{➤ мек праг} \quad \tilde{\mathbf{d}}_k^j &= \begin{cases} \mathbf{d}_k^j \frac{\omega_k^j - \lambda}{\omega_k^j}, & \omega_k^j \geq \lambda \\ 0, & \omega_k^j < \lambda \end{cases} \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \text{➤ твърд праг} \quad \tilde{\mathbf{d}}_k^j &= \begin{cases} \mathbf{d}_k^j, & \omega_k^j \geq \lambda \\ 0, & \omega_k^j < \lambda \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Обезшумяването с мек праг води до по-гладки контури и намален ефекта на псевдо–Гибс феномена. Обезшумяването с твърд праг запазва детайлните коефициентите на високите честоти, задържа по–добре локалните характеристеки на контурите в изображението, и е удобен за шум с внезапни промени. Недостатък е появата на псевдо–Гибс феномен.

В това изследване правилата се сравняват два прага “мек” и “твърд”. Най – висок *PSNR* е получен за твърд праг с мултифилтър на Алперт, докато за мекия праг – с GNM мултифилтър.

### 5.2.3 Сравнителен анализ на ортогонални скаларни и векторни филтри за компресия на астрономически изображения от сканирани фотографски плаки

Чрез използване на скаларните филтърни банки на Хаар и Добеши 4 са построени векторните Хаар–подобен (Haar-like) и Добеши 4– подобен (Daubechies 4-like), които са приложени за компресия на астрономически изображения от сканирани фотографски плаки (СФП) [88]. Качеството на компресия е сравнено чрез СКГ и ПСШН.

Компресия с добро качество е постигнато с векторните Хаар– и Добеши 4–подобни филтърни банки. Изключително ефективна компресия е Хаар–подобна филтърна банка до 5 нива на разлагане за изображения със силно негладки области с равномерна интензивност.

В заключение, компресия на астрономически изображения от СФП чрез декорелация с мултифилтри зависи от пре- и пост-филтрацията, балансираността, дължината на мултифилтрите, и притежаването на добри мултифилтърни свойства.

### 5.3 Експериментално изследване на модули без умножение за 5/3 филтърна банка реализирани върху препрограмируема интегрална схема

Авторските модули без умножение са използвани за разработване на биортогонална 5/3 филтърна банка с перфектно възстановяване реализирана върху препрограмируема логическа интегрална схема (ПЛИС) (*Field programmable gate array* (FPGA)) на фирмата Xilinx от сериите Virtex и Spartan които имат интегриран софтуер за проектиране на цифров хардуер.

Хардуерните характеристики на модулите за анализ и възстановяване са показани на **табл.5.3**. Те са тествани за два сигнала с различни дължини за едно ниво на разлагане и възстановяване [85]. Грешките при възстановяване са нулеви константи, което доказва, че филтърната банка е перфектно възстановяваща.

**Табл. 5.3** Хардуерни FPGA характеристики на модулите без умножение за анализ и възстановяване на биортогонална 5/3 филтърна банка [85]

Модул Анализ	Модул Възстановяване
<b>FPGA:</b> Virtex E xcv200e-pq240-8	<b>FPGA:</b> Spartan2 xc2s150-fg256-6
# Work frequency (MHz):100	# Work frequency (MHz) :100
# Registers : 30	# Registers : 21
8-bit register : 30	9-bit register : 21
# Adders/Subtractors : 5	# Adders/Subtractors : 6
8-bit subtractor: 1	9-bit adder : 6
8-bit adder: 4	

#### 5.4 Резултати и изводи

Представените в *Глава 5* резултати са следствие на изпълнението на изследователски задача 6 на дисертацията. Те показват, че *бързия метод на Бауер* за разлика от класическия намира скаларен (матричен) спектрален фактор с точни стойности без Холески разлагане на  $n \times n$  Тьоплецова матрица с големи размери.

За избягване на нежелани дефекти при обработка на изображение с ниво на сиво с балансиран или небалансиран мултифилтър е напълно достатъчно 3-битово квантуване на коефициента  $\sqrt{3}$ .

При обезшумяване на тестови изображения с ниво на сиво балансирания мултифилтър на Алперт, въпреки по-късата си дължина и по-малкия КУ, постига по-високо *ПСШН* в сравнение с GNM и CL мултифилтри. Нещо повече, за изображение 'Lizard' и балансирания и небалансирания филтър на Алперт показват най-добри *ПСШН*.

Компресията на астрономически изображение на СФП чрез скаларната филтърна банка на Добеши 4 води нисък *ПСШН* поради зависимостта от структурата на цялото изображение.

Компресията с Хаар – подобен (Haar - like) и Добеши – подобен (Daubechies - like) мултифилтърни банки постигат по-високи *ПСШН* за астрономически изображение на СФП с равномерна интензивност и съдържащи локални обекти с големи области.

#### Научно – приложни резултати, получени при изпълнение на задача 6:

1. Разработени са два нови авторски суперкомпактни ортогонални мултифилтри [т.5.1.4.2(A)].
2. Разработена и изследвана е авторска лифтинг схема на мултифилтър на Алперт с 2- и 3-битово квантуване на  $\sqrt{3}$  за изображение с ниво на сиво [т.5.2.1].

#### Приложни резултати, получени при изпълнение на задача 6:

1. Изследвани са численните грешки за двата метода на Бауер на мащабиращите функции на Хаар, Добеши4, и мултимащабираща функция на Алперт. [т.5.1]
2. Изследван е БМБ за седем пара-Ерминови полинома чрез използване на числени методи (на неподвижната точка и на Нютон). [т. 5.1.4.2 (A)].
3. Изследвани са численните грешки при решаване НМУ чрез ОДАУР за 14 версии на Matlab ('dare' и 'idare') и Maple 17 ('dare'). [т. 5.1.4.2 (B)]



4. Разработена и изследвана е авторска лифтинг схема на мултифилтърна банка на Алперт с различно квантуване на коефициента  $\sqrt{3}$  за анализ и възстановяване на изображение с ниво на сиво [т.5.2.1].
5. Изследвани са ортогоналните мултифилтърни банки на CL, GNM, и Алперт за обезшумяване на изображения с ниво на сиво с размер  $256 \times 256$  и  $512 \times 512$  пиксела с адитивен бял Гаусов шум (АБГШ) и дисперсия ( $\sigma = 10, 20$ ). [т.5.2.2]
6. Изследвани са скаларни филтърни банки на Хаар и Добеши, мултифилтрите на Хаар – подобен (Haar-like), Добеши–подобен (Daubechies-like), и GNM при компресия на астрономически изображения от сканирани фотографски плаки (СФП). [т.5.2.3]
7. Реализирани са модулите без умножение върху препрограмируема интегрална схеми на фирмата Xilinx от сериите Virtex и Spartan за перфектно възстановяваща биортогонална  $5/3$  филтърна банка [т.5.3];

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В дисертацията са изследвани проблеми свързани с нови методи за разработване на мащабиращи или мултимашабиращи функции.

Разработени и изследвани са четири явни и прости метода доказващи хипотезата, че мултфилтърните банки може да бъдат построени от различни базисни функции (полиноми, сплайни) и произведения на матричен филтър чрез спектрално разлагане. Представеният анализ на разработените и приложени методи са нова област на развитие на уейвлетната теория. Той дава възможност да се прилагат и други полиноми и сплайн функции неразгледани в дисертационния труд.

Голямо внимание е обърнато на разработването на бързия метод на Бауер за спектрално разлагане на пара-Ермитови полиноми чрез който се избягва Холески разлагане на Тъоплецова матрица с големи размери. Той е полезен за решаване на многомерни сингулярни пара-Ермитови матрични полиноми както и за намиране на ортогонални мултимашабиращи функции с желана гладкост. Това е доказано с изследване на численните грешки на *Алгоритма 1* и *2* получени по метода на неподвижната точка, метода на Нютон, за 14 версии на Matlab ('*dare*' и '*idare*'), и Maple 17 ('*dare*').

За обезшумяване и компресия на изображения с ниво на сиво и астрономически изображения от сканирани фотографски плаки (СФП) са изследвани скаларните филтърни банки на Хаар и Добеши, ортогонални мултифилтърни банки на Хаар – подобен (Haar - like), Добеши – подобен (Daubechies - like), CL, Алперт, и GNM.

За да може да бъдат лесни и удобни за прилагане, както от студенти така и от научни работници, разработването на четирите метода се основава на основни познания по матричен и функционален анализ, елементарна теория на филтърни банки, и базови познания по Matlab и Maple.

## **ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА БЪДЕЩО РАЗВИТИЕ**

Съвременната обработка на сигнали претърпява бързо развитие както в аналоговата така и в дискретната област. В частност уейвлетната теория е основа в много научни изследвания в много области.

Ето защо, ново направление за бъдещо развитие са разработените три директни методи за построяване на мултифилтри както и бързия метода на Бауер за спектрално разлагане на многопроменливи пара–Ермитови матрични полиноми. Включването им в смесени системи за обработка като дълбоко обучение (deep learning), размита логика (fuzzy logic), и др. може да доведе до подобряване на обезшумяването, компресията, или анализа на едномерни/многомерни сигнали в областта на големите данни.

Друго ново направление за бъдещо развитие е разработването и изследването на лифтинг схеми и техните софтуерни или хардуерни реализации на нови ортогонални мултифилтри.

В това научно изследване някои от резултатите са постигнати при обработка на тестови изображения с ниво сиво. Но в съвременният свят и особено в комуникациите се обработват RGB изображения. Следователно, друго направление за бъдещо развитие е разработване и изследване на предимствата и недостатъците на мултифилтрите при обработка на цветни изображение или видео.

## НАУЧНИ И НАУЧНО–ПРИЛОЖНИ ПРИНОСИ В ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

**Научни приноси**

1. Разработени са три метода за директно получаване на скаларни и векторни функции: смяна на базиса [т.2.1], директен метод [т.2.2], и метод на външно скаларно произведение [т. 2.3].
2. Разработен е авторско произведение на матричен филтър на Алперт [т. 3.1].
3. Разработени са два авторски ортогонални мултимасщабиращи функции с точни стойности чрез метода на БМБ за спектрално разлагане и техните допълващи ортогонални мултиуейвлетни функции [т. 5.1.4.2 (А)];

**Научно – приложни приноси**

1. Разработени са мащабиращи и мултимасщабиращи функции от линеен  $B$  – сплайн [т. 2.1.3.1, т. 2.2.1, и т. 2.3.1], квадратичен  $B$  – сплайн [т. 2.1.2.1, т. 2.1.3.2], кубичен Ермитов сплайн [т. 2.1.2.2, т. 2.1.3.3, т. 2.2.2, и т. 2.3.2], квинтик Ермитов сплайн [т. 2.1.3.4], и Лежандър полиноми [т. 2.1.3.5, т. 2.2.3, и т. 2.3.3] чрез използване на разработените метод чрез смяна на базиса, директен метод, и метод чрез външното скаларно произведение.
2. Разработени са *авторски численни метода* за решаване на НМУ чрез класическия и бърз метод на Бауер за спектрално разлагане (*Алгоритъм 1* - за изчисляване на бърз метод на Бауер [т.4.2] и *Алгоритъм 2* - за изчисляване на точен метод на Бауер [т.4.2]), сравнителен анализ на вградените функции 'dare' и 'idare' в Maple и Matlab за решаване на ОДАУР, и са получени ортогонални мултимасщабиращи функции по метода на неподвижната точка и метода на Нютон [т.5.1.4.2(А)], [т.4.3.1] - [т.4.3.3], [т.4.4], и [т.4.5.1].
3. Разработена и изследвана е авторска лифтинг схема на мултифилтърна банка на Алперт с различно квантуване на коефициента  $\sqrt{3}$  за анализ и възстановяване на изображение с ниво на сиво [т.5.2.1].
4. Реализирани са модулите без умножение върху препрограмируема интегрална схеми на фирмата Xilinx от сериите Virtex и Spartan за перфектно възстановяваща биортогонална  $5/3$  филтърна банка [т.5.3].

**СПИСЪК НА АВТОРСКИТЕ ПУБЛИКАЦИИ И ЦИТИРАНИЯ СВЪРЗАНИ С  
ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД**

**Kolev V.**, Multiplierless modules for forward and backward integer wavelet transform, In *Proceedings of the 4th international conference on Computer systems and technologies: e-Learning*, pp. 284-289. 2003. <https://doi.org/10.1145/973620.973667>

**Цитирана в:**

1. Bohra A., Izharuddin I., Farooq O. and Ghani F., FPGA based implementation of discrete wavelet transform, Proceeding of the 12-th Inter. Conf. on Aerospace Sciences&Aviation Technology Conference, 29-31 May, vol.12, Article 44, 2007.
2. Akshay N., Harish B. and Dhanorkar S., Multiplierless Design for Multilevel Forward and Inverse 2D Discrete Wavelet Transform, IJCA Proc. on Intern. Conf. and workshop on Emerging Trends in Technology (ICWET), vol. 10, pp. 15 – 21, 2011.
3. Naregalkar A., Harish B., Dhanorkar S., Raju B. L., FPGA implementation of multiplierless 5/3 LeGall discrete wavelet transform using lifting approach, Proc. of the Inter. Conf. & Workshop on Emerging Trends in Technology, February 25-26, pp. 1066-1071, 2011, Mumbai, India.
4. Akshay N., Satish B., and Raju B., Implementation of 3D DWT With 5/3 LeGall Filter For Image Processing, Inter. Journal on Comp. Science and Eng., vol. 4, no.5, pp.729-734, 2012.

**Kolev V.**, *Уейвлет и мултиуейвлетни ортогонални филтри*, Научни трудове на Русенски университет, том 46, серия 3.1, стр. 97 – 101, 2007, [ISSN 1311 – 3321](#).

**Kolev V.**, *Universal representation of orthogonal wavelet and multiwavelet filters*, Втора научна конференция с международно участие, Висше училище – колеж “Телематика”, стр. 197 – 214, 2008, [ISBN 978–954–8638–51–7](#)

**Kolev V.**, *Orthogonal Multifilters Image Processing of Astronomical Images from Scanned Photographic Plates*, Proceedings of the 11th International Conference on Computer Systems and Technologies and Workshop for PhD Students in Computing on International Conference on Computer Systems and Technologies, ACM International Conference Proceeding Series 471, pp. 490 – 495, 2010, [DOI: 10.1145/1839379](#)

**Цитирана в:**

1. Alkhidhr H. A., Correspondence between Multiwavelet Shrinkage/Multiple Wavelet Frame Shrinkage and Nonlinear Diffusion, PhD Thesis, University of Missouri – St. Louis, May, 2017.

**Kolev V.**, Cooklev T., Keinert F., *Design of a simple orthogonal multiwavelet filter by matrix spectral factorization*, Circuits, Systems and Signal Processing, vol. 39, pp. 2006 – 2041, 2020, Springer, IF 1.681, SJR 0.39, Q3(WoS), [DOI:10.1007/s00034-019-01240-9](#).

**Цитирана в:**

1. Gupta G., Xiao X., and Bogdan P., Multiwavelet-based Operator Learning for Differential Equations, M. Ranzato and A. Beygelzimer and P.S. Liang and J.W. Vaughan and Y. Dauphin (Eds), (NeurIPS 2021) NeurIPS: Proceedings of the 34th Advances in Neural Information Processing Systems Conference, December 06 - 14. 2021, Vancouver, Canada, 2021.
2. Gupta G., Dealing with unknown unknowns, PhD Thesis, University of Southern California, 2022. <http://guptagaurav.me/docs/dissertation.pdf>
3. Yan X., Wu H.-C., Wang Q., Yin C., Li P., Computationally Efficient Multiwavelets Construction Method with New Signal – Dependent - Multiplicity Determination Scheme, Circuits Systems and Signal Processing, vol. 41, pp. 5084–5107, 2022.
4. Geronimo J.S., Woerdeman H.J., and Wong C.Y., The autoregressive filter problem for multivariable degree one symmetric polynomials, Acta Scientiarum Mathematicarum, vol. 89, pp. 509–532, 2023.
5. Yang G., Wu Z., Nie M., Yan X., Jiang F., 基于 CWGAN-SLM 的多小波 OFDM 系统峰均比抑制算法研究(Research on PAPR reduction algorithm based on CWGAN-SLM for multi-wavelet OFDM system), Journal on Communications, vol. 44, no. 4, pp. 99 – 110, 2023.

**Kolev V.**, Cooklev T., Keinert F., *Bauer's Spectral Factorization Method for Low Order Multiwavelet Filter Design*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 441, Elsevier, 115713, 2024. IF 2.4, SJR 0.8, Q1(WoS), DOI: [10.1016/j.cam.2023.115713](https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115713)

**БИБЛИОГРАФИЯ**

- [1] Богданова Б., Анализ на финансови времеви редове чрез трансформация с вълнички, Монография, Ди Ем Ай Дивелопмънт ЕООД, София, 2015. ISBN 978-954-939-930-1.
- [2] Богданова Б., Недев Б., Анализ на цикличните компоненти на борсовия индекс S&P500 чрез трансформация с вълнички, Икономически и социални алтернативи, брой 4, стр. 95 – 105, 2019.
- [3] Велчев Ю., Алгоритми за компресия на електрокардиографски сигнали, ТУ-София, EUT+ Academic Press, 2022, ISBN: 978-619-92237-2-7.
- [4] Манчева В., Даскалов П., Уейвлит базиран подход за синтез на признаци за класифициране на здрави и заразени с Фузариум царевични зърна, Научни трудове на Русенски университет, том 50, серия 3.1, стр. 208 – 215, 2011.
- [5] Методиев К., Определяне на когнитивното натоварване на оператор БЛА чрез измерване разширението на зеницата, Proceedings of 17<sup>th</sup> Intern. Scientific Conference Space, Ecology, Safety, 20–22 October 2021, Sofia, Bulgaria, стр. 139 – 144.
- [6] Недев Б., Сплайн-функциите – Теория и приложения, Годишник на Стопанския факултет на СУ „Св. Климент Охридски, том 19, по. 1, pp.129-146, 2020.
- [7] Трифонов Т., Иванов И., Статистически анализ и моделиране чрез уейвлети, сп. Статистика, бр.2, стр. 91-101, 2005.
- [8] Йорданов С., Иванов С., Тодоров Т., Михалев Г., Интелигентна система за окачествяване на хранителни продукти базирана на ESP32 и газови сензори, сп. Информатика и иновативни технологии, по. 2-3, стр. 53–63, 2019.
- [9] Турсунов Д. А., Применение сплайн-вейвлетов для решения интегро-дифференциальных уравнений, Известия АлтГУ., по.1, 2011.
- [10] Турсунов Д. А., Применение кубических мультвейвлетов к численному решению дифференциальных уравнений второго порядка с условием Неймана, Вестник ОшГУ., по 3., 2012.
- [11] Турсунов Д.А., Шумилов Б.М., Кудуев А.Ж., Турсунов Э.А., Мультвейвлеты седьмой степени, ортогональные с производными второго порядка. Вестник ОшГУ, по. 3, 2012.
- [12] Anderson B., Continuity of the spectral factorization operation, Math. Appl. Comput., vol.4, no.2, pp. 139 – 156, 1985.
- [13] Узунов А, Детекция на говор в системи за разпознаване на диктори, Дисертация, ИИКТ- БАН, 2020.
- [14] Anderson B., Hitz K., Diem N., Recursive algorithm for spectral factorization, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 21, no.6, pp. 742 – 750, 1974.
- [15] Alpert B., A class of bases in  $L^2$  for the sparse representation of integral operators, SIAM J. Math. Anal., vol. 24, no.1, pp. 246 - 262, 1993.
- [16] Alpert B., Beylkin G., Gines D., and Vozovoi L., Adaptive solution of partial differential equations in multiwavelet bases, J. Comput. Phys., vol. 182, no. 1, pp.149-190, 2002.
- [17] Ahlberg, Nielson, and Walsh, The Theory of Splines and Their Applications, 1967.
- [18] Arnold W.I., Laub A.J., Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic riccati equations, Proc. IEEE, vol. 72, pp. 1746 – 1754, 1984.
- [19] Birkhoff D., Fluid dynamics, reactor computations, and surface representation, in “A History of Scientific Computation”, S. Nash, Ed., 1990.
- [20] Barclay S., Continuity of the spectral factorization mapping, J. Lond. Math. Soc., vol. 2, no. 70, pp. 763–779, 2004.

- [21] Bartels, Beatty, and Barsky, An Introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling, 1987.
- [22] Battle G., A block spin construction of ondelettes, part I: Lemarid functions, *Comm. Math. Phys.*, vol. 110, pp. 601 – 615, 1987.
- [23] Bauer F.L., Ein direktes iterations verfahren zur Hurwitz-zerlegung eines polynoms, *Archiv Elektrische Uebertragung*, vol. 9, pp. 285–290, 1955.
- [24] Bauer F.L., Beitrage zur entwicklung numerischer verfahren fur programmgesteuerte rechenanlagen, II. Direkte faktorisierung eines polynoms. Sitzung Bericht Bayerischen Akademische Wissenschaften, pp. 163–203, 1956.
- [25] Beylkin G., Coifman R., Rokhlin V., Fast wavelet transforms and numerical algorithms. I, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 44, pp. 141 – 183, 1991.
- [26] Birkhoff G. and de Boor C., Piecewise polynomial interpolation and approximation, *Approximation of Functions* (H. L. Garabedian, ed.), Elsevier, New York, pp. 164 – 190, 1965.
- [27] Boche H. & Pohl V., Calculating the spectral factorization and outer functions by sampling-based approximations – Fundamental limitations, *Journal of Approximation Theory*, vol. 257, 105450, 2020.
- [28] Bogert B. P., Healy J. R. and Tukey J. W, The quefrency analysis of time series for echoes cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum, and saphe cracking, *Proc. of the Symposium on Time Series Analysis*, pp. 209 -243, 1963.
- [29] Callier F.M., On polynomial spectral factorization by symmetric extraction, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 30, no. 5, pp. 453 – 464, 1985.
- [30] Charoenlarnopparut C., One-dimensional and multidimensional spectral factorization using Gröbner basis approach. in *Asia-Pacific Conference on Communications (2007)*, pp. 201 – 204, 2007.
- [31] Chen X. and Parks T. W., Design of optimal minimum phase FIR filters by direct factorization, *Signal Processing*, vol. 10, pp. 369 – 383, 1986.
- [32] Cheung K.-W., Cheung C.-O., Po L.-M., Novel multiwavelet-based integer transform for lossless image coding, in *ICIP'99*, vol. 1, pp. 444–447, Kobe, Japan, 1999.
- [33] Childers D.G., Skinner D.P., Kemerait R.C., The cepstrum: a guide to processing, *Proc.of the IEEE*, vol.65, no 10, pp. 1428 – 1443, 1977.
- [34] Chui C., *Introduction in wavelets*, Elsevier, Academic Press, 2001.
- [35] Chui C.K. and Lian J., A study on orthonormal multiwavelets, *J. Appl. Numer. Math.*, vol. 20, pp. 272–298, 1996.
- [36] Chui C. K, and J. Wang, A cardinal spline approach to wavelets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 113, no. 3, pp. 785 – 793, 1991.
- [37] Cohen A., Daubechies I., P.Vial, Wavelets on the interval and fast wavelet transforms, *Appl. Comp. Harmon.Anal.*, vol.1, pp. 54 – 81, 1993.
- [38] Cooklev T., Nishihara A., Kato M. and Sabalatsh M., Two - channel multifilter banks and multiwavelets, *IEEE Int. Conf. ASSP*, pp. 2769–2773, 1996.
- [39] Cotronei M., Montefusco L. B., and Puccio L., Multiwavelet analysis and signal processing, *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, vol. 45, no. 8, pp. 970–987, 1998.
- [40] Cui L. and Cong R., Construction for a class of interpolation multiscaling functions with dilation factor  $a \geq 3$ , *Comp. and Math. with Appl.*, vol. 56, pp. 2948 – 2956, 2008.
- [41] Dahmen W., Wavelet methods for PDEs—some recent developments, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 128, pp.133–185, 2001.
- [42] Davis P., B-splines and Geometric design, *SIAM News*, vol.29, no. 5, 1996.



- [43] Daubechies I., Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [44] Daubechies I., Cohen A., Plonka G., Regularity of refinable function vectors, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol.3, no. 3, pp. 295 – 324, 1997.
- [45] Dijkema T.J., Schwab C., and Stevenson R., An adaptive wavelets method for solving high-dimensional elliptic PDEs, *Constr. Approx.*, vol. 30, pp. 423 – 455, 2009.
- [46] Djokovic I. and Vaidyanathan P. P., On optimal analysis/synthesis filters for coding gain maximization, *IEEE Ttrans. On Signal Processing*, vol. 44, no. 5, 1996.
- [47] Donoho D.L., Dyn N., and Levin D., Smooth Multiwavelets Duals of Alpert Bases by Moment-Interpolating Refinement, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol.9, pp. 166–203, 2000.
- [48] Donoho D.L., Johnstone I.M., Ideal spatial adaption via wavelet shrinkage, *Biometrika*, vol. 81, no. 3, pp. 425 – 455, 1994.
- [49] Donovan G.C., Geronimo J.S., and Hardin D.P., Orthogonal polynomials and the construction of piecewise polynomials smooth wavelets, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 30, pp. 1028-1056, 1999.
- [50] Donovan G.C., Geronimo J.S., Hardin D.P., and Massopust P.R., Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions, *SIAM J. Math. Anal.*, vol.27, pp. 1158– 1192, 1996.
- [51] Donovan G.C., Geronimo J.S., and Hardin D.P., Intertwining multiresolution analyses and the construction of piecewise polynomial wavelets, *SIAM J. Math. Anal.*, vol.27, pp. 1791–1815, 1996.
- [52] Donovan G., Geronimo J. S., Hardin D. H., A class of orthogonal multiresolution analyses in 2D, in “Mathematical methods for curves and surfaces”, Edited by M. Daehlen, T. Lyche, L. L. Schumaker, pp.99 – 110, 1995.
- [53] Dritschel M.A., On factorization of trigonometric polynomials, *Integral Equ. Oper. Theory*, 49(1), pp. 11–42, 2004.
- [54] Du B., Xu X., Dai X., Minimum-phase FIR precoder design for multicasting over MIMO frequency selective channels. *J. Electron. (China)*, vol. 30, no. 4, pp. 319 – 327, 2013.
- [55] Garnett J.B., Bounded Analytic Functions, Academic Press, 1981.
- [56] Georgiou T.T., Khargonekar P.P., Spectral factorization of matrix-valued functions using interpolation theory, *IEEE Trans. Circuit. Syst.*, vol.36, no.4, pp.568 – 574, 1989.
- [57] Geronimo J. S., Hardin D. H. and Massopust P. R., Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions, *J.Approx. Theory*, vol. 78, pp. 373–401, 1994.
- [58] Goodman T.N.T., Micchelli CA, Rodriguez G, Seatzu S., Spectral factorization of Laurent polynomials, *Advances in Computational Mathematics*, vol. 7, pp. 429 – 445, 1997.
- [59] Ephremidze L., Janashia G., Lagvilava E., A new efficient matrix spectral factorization algorithm., *SICE Annu. Conf.* 2007, pp. 20 – 23, 2007.
- [60] Ephremidze L., Janashia G., and Lagvilava E., A simple proof of the matrix-valued, Fejer-Riesz theorem, *Journal of Fourier Analysis and Applic.*, 15(1), pp.124-127, 2009.
- [61] Ephremidze L., Saied F., Spitkovsky I., On the algorithmization of Janashia-Lagvilava matrix spectral factorization method. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 64(2), pp.728–737, 2018.
- [62] Frazier M. W., An Introduction to wavelets through linear algebra, 1999.
- [63] Hardin D.P., Kessler B., and Massopust P.R., Multiresolution analyses and fractal functions, *J. Approx. Theory*, vol. 71, pp. 104–120, 1992.
- [64] Hardin D. P., Marasovich J.A., Biorthogonal multiwavelets on  $[-1,1]$ , *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 7, pp. 34–53, 1999.
- [65] Hardin D. P., and Roach D. W., Multiwavelet prefilters I: orthogonal prefilters preserving approximation order  $p \leq 2$ , *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, vol.45, no. 8, pp.1106 - 1112, 1998.

- [66] Heil C., Strang G., and Strela V., Approximation by translates of refinable functions, *Numer. Math.*, vol.73, no.1, pp. 75 - 94, 1996.
- [67] Heisenberg W., Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik* (in German), vol. 43, no. 3 – 4, pp. 172 – 198, 1927.
- [68] Hildebrandt K., Schulz C., von Tycowicz C., Polthier K., Interactive spacetime control of deformable objects, *ACM Trans. on Graph.*, vol. 31, no. 4, pp. 71:1 – 71:8, 2012.
- [69] Hsung T.C., Sun M.C., Lun D.P.K., Siu W.C., Symmetric prefilters for multiwavelets, *IEE Proc.-Vision, Image and Signal Proc.*, vol. 150, no. 1, pp. 59 –68, 2003.
- [70] Hsung T.-C., Lun D. P., Shum Y.-H., Ho K. C., Generalized discrete multiwavelet transform with embedded orthogonal symmetric prefilter bank, *IEEE Trans. Signal Proc.*, 1(55), pp. 5619-5629, 2007.
- [71] Fejér L., Über trigonometrische polynome. *J. Reine Angew. Math.*(Crelles J.),vol.146, pp. 53–82, 1916.
- [72] Jacob B., Winkin J., Zwart H., Continuity of the spectral factorization on a vertical strip, *Systems Control Lett.*, vol. 37, pp. 183 – 192, 1999.
- [73] Jia R.-Q., Liu S.-T. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval, *Advances Computational Mathematics*, vol. 25. 2006.
- [74] Jiang Q., On the regularity of matrix refinable functions, *SIAM J. Math. Anal.*, vol.29, pp. 1157–1176, 1998.
- [75] Jiang Q., On the design of multifilter banks and orthogonal multiwavelet bases, *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 46, no. 12, pp. 3292–3303, 1998.
- [76] Femandes F. and Burrus S., Multiwavelet systems with disjoint multiscaling functions, *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 3, pp.1205-1208, 1999.
- [77] Femandes F. and Burrus S., *M*-band multiwavelet systems, *Proc. IEEE ICASSP*, 1999.
- [78] Fischer R.F.H., Sorted spectral factorization of matrix polynomials in MIMO communications. *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, no.6, pp. 945 – 951, 2005.
- [79] Gan L., Ma K.-K., On minimal lattice factorizations of symmetric-antisymmetric multifilterbanks, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 53, no. 2, pp. 606 – 621, 2005.
- [80] Hardin D. P., Hogan T. A, and Sun Q., The matrix-valued Riesz lemma and local orthonormal bases in shift-invariant spaces, *Advances in Computational Mathematics*, 20(4), pp.367-384, 2004.
- [81] Hansen M., Christensen L.P.B., Winther O., Computing the minimum-phase filter using the QL factorization, *IEEE Trans. Signal Process.*, 58(6), pp. 3195 – 3205, 2010.
- [82] Kalathil S., Elias E., Prototype filter design approaches for near perfect reconstruction cosine modulated filter banks:a review, *J. Signal Process. Syst.*, 81(2), pp.183–195, 2015.
- [83] Kemerait R., Childers D., Signal detection and extraction by cepstrum techniques, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, no.6, pp. 745 – 759, 1972.
- [84] Kishore A., Chaitali C., A VLSI architecture for lifting-based forward and inverse wavelet transform, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(4), pp.966–977, 2002.
- [85] **Kolev V.**, Multiplierless modules for forward and backward integer wavelet transform, In *Proceedings of the 4th international conf. on Computer systems and technologies: e-Learning*, pp. 284-289. 2003.
- [86] **Kolev V.**, Уейвлет и мултиуейвлетни ортогонални филтри, *Научни трудове на Русенски университет, том 46, серия 3.1, стр. 97 – 101, 2007.*
- [87] **Kolev V.**, *Universal* representation of orthogonal wavelet and multiwavelet filters, *Втора научна конференция с международно участие, Висше училище – колеж “Телематика”, стр. 197–214, 2008.*
- [88] **Kolev V.**, Orthogonal multifilters image processing of astronomical images from scanned photographic plates, *Proc. of the 11th Inter.Conf. on Comp. Systems and Technologies and Workshop for PhD Students*

- in Computing on Inter. Conf. on Comp. Systems and Technologies, ACM Inter. Conf. Proc.Series 471, pp.490–495, 2010.
- [89] **Kolev V.**, Cooklev T., Keinert F., Design of a simple orthogonal multiwavelet filter by matrix spectral factorization, *Circuits, Systems and Signal Proc.*, 39(4),pp.2006–2041, 2020.
- [90] **Kolev V.**, Cooklev T., Keinert F., Bauer's spectral factorization method for low order multiwavelet filter design, *Journal of Comp. and Applied Math.*, vol. 441, 115713, 2024.
- [91] Koosis P., *Introduction to spaces*, Cambridge University Press, 1980.
- [92] Konstantinov M., Pasheva V., Petkov P., Numerical Issues in using MATLAB, *Числени аспекти при използване на MATLAB*, Union of Bulgarian Mathematicians, 41(1), pp. 239 – 246, 2012.
- [93] Konstantinov M., Todorov V., Pelova G., Boneva J., Using MATLAB in technical universities, *Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians Albena*, April 6–10, pp. 347 – 353, 2010.
- [94] Krein M.G., Integral equations of the half–line with kernel depending upon he difference of the arguments, *Uspechi Mat. Nauk.*, 13(5), pp. 3–120, 1958 (*Russian*); English translation, AMS translations, vol. 22, pp. 163 – 288. 1962.
- [95] Kucera V., *Discrete linear control: The polynomial approach*, John Wiley, 1979.
- [96] Lebrun J. and Vetterli M., Balanced multiwavelets: Theory and design, *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 46, no. 4, pp. 1119 – 1125, 1998.
- [97] Lebrun J., and Vetterli M., High-order balanced multiwavelets: theory, factorization, and design, *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol.49, no. 9, pp. 1918 – 1930, 2001.
- [98] Lewis A. S. and Knowles G., A 64 Kb/s video codec using the 2-D wavelet transform, in *Proc. Data Compression Conf.*, Snowbird, UT, 1991.
- [99] Li B. and Peng L., Balanced multiwavelets with interpolatory property, *IEEE Trans. Image Proc.*, vol.20, no. 5, pp. 1450-1457, 2011.
- [100] Li Y. and Yang S., Construction of paraunitary symmetric matrix and parameterization of symmetric and orthogonal multiwavelets filter banks, *Acta Math. Sinica, Chinese Series.*,53(2), pp. 279 – 290, 2010.
- [101] Lian J., Armlets and balanced multiwavelets: flipping filter construction, *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 53, issue 5, pp. 1754 – 1767, 2005.
- [102] Malyshev A.N., On the acceleration of an algorithm for polynomial factorization. *Dokl. Math.*, vol. 88, no.2, pp. 586 – 589, 2013.
- [103] Malyshev A.N., Sadkane M., The Bauer-type factorization of matrix polynomials revisited and extended. *Comput. Math. Math. Phys.*, 58(7), pp. 1025 – 1034, 2018.
- [104] Massopust P., Ruch D., and Van Fleet P., On the support properties of scaling vectors, *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, vol.3, no. 3, pp.229 – 238, 1996.
- [105] Meyer Y., Ondelettes sur l'intervalle, *Rev. Mat. Iberoamericana*, vol.7, pp.115–133, 1991.
- [106] Micchelli C. A., Sauer T., Regularity of multiwavelets, *Adv.Comp.Math.*,vol.7, pp. 455–545, 1997.
- [107] Mohammadi F. and Hosseini M.M., A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 8, pp. 1787 – 1796, 2011.
- [108] <http://www.xilinx.com/webpack/index.htm#MXE>
- [109] Moir T.J., Toeplitz matrices for LTI systems, an illustration of their application to Wiener filters and estimators. *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 49, no.4, pp. 800 – 817, 2018.
- [110] Oppenheim A.V., *Discrete– time signal processing*, Prentice Hall, NJ, 1989.

- [111] Orszag S. A., Spectral methods for problems in complex geometries, *Journal of Computational Physics*, vol.37, pp.70 - 92, 1980.
- [112] Plonka G. and Strela V., Construction of multiscaling functions with approximation and symmetry, *SIAM J. Math. Anal. Appl.*, vol. 29, pp. 481 - 510, 1998.
- [113] Pommaret J.F., Quadrat A., Generalized Bezout identity, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, vol. 9, pp. 91 – 116, 1998.
- [114] Riesz F., Über ein problem des Herrn Carathéodory. *J. Reine Angew. Math (Crelles J.)*, vol.146, pp. 83–87, 1916.
- [115] Rissanen J. and Barbosa L., Properties of infinite covariance matrices and stability of optimum predictors, *Information Sciences*, vol. 1, pp.221 - 236, 1969.
- [116] Rissanen J, Kailath T., Partial realization of random systems, *Automatica*, vol. 8, pp. 389–396, 1972.
- [117] Rissanen J., Algorithms for triangular decomposition of block Hankel and Toeplitz matrices with application to factoring positive matrix polynomials, *Mathematics of Computation*, vol.27, pp. 147–154, 1973.
- [118] Rieder P. and Nossek J., Smooth multiwavelets based on two scaling functions, *Proc. of the IEEE Inter. Sym. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 309 – 312, 1996.
- [119] Rieder P., Parameterization of symmetric multiwavelets, *Proc.ICASSP*,vol.3, pp. 2461-2465, 1997.
- [120] Rosenblum M., and Rovnyak J., *Hardy classes and operator theory*, Oxford University Press, 1985.
- [121] Rudin W., The extension problem for positive-definite functions. *Ill. J. Math.*, 7(3), pp.532 – 539, 1963.
- [122] Sayed A. H., Kailath T., A survey of spectral factorization methods, *Numerical Linear Algebra with Applications*, vol.8, no.6 - 7, pp. 467 – 496., 2001.
- [123] Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.*, 4(1), pp. 45 – 99 and no.2, pp.112 – 141, 1946.
- [124] Shannon C.E., Communication in the presence of noise, *Proc. IRE*, 37(1), pp.10–21, 1949.
- [125] Shen L. and Tan H., On a family of orthonormal scalar wavelets and related balanced multiwavelets, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, issue 7, pp. 1447 - 1452, 2001.
- [126] Shen L. X., Than H.H., and Than J.Y., Symmetric-antisymmetric orthogonal multiwavelets and related scalar wavelet, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 8, pp. 258 - 279, 2000.
- [127] Smith M. J. T. and Barnwell III T. P., Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders, *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 34, no. 3, pp. 434 – 441, 1986.
- [128] Soman K.P., Ramachandran K.I, and Resmi N.G., *Insight into wavelets: From theory to practice*, New Delhi, 3Ed., 2010.
- [129] Strang G. and Nguyen T., *Wavelet and Filter banks*, Cambridge Press, 1996.
- [130] Strang G. and Strela V., Short wavelets and matrix dilation equations, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.45, no. 1, pp. 108 – 115, 1995.
- [131] Strang G. and Strela V., Orthogonal multiwavelets with vanishing moments, *J. Optical Engineering*, vol.33, no. 7, pp. 2104 - 2107, 1994.
- [132] Strela V., *Multiwavelets: Theory and Applications*, MIT, 1996.
- [133] Strela V., Walden A. T., Orthogonal and biorthogonal multiwavelets for signal denoising and image compression, *SPIE Proceedings*, vol. 3391, pp.96 – 107, 1998.
- [134] Sweldens W., The lifting scheme: a construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 29, no. 2, pp. 511 – 546, 1998.
- [135] Tan H. H., Shen L. X., and Tham J. Y., New biorthogonal multiwavelets for image compression, *Signal Process.*, vol. 48, pp. 45–65, 1999.

- [136] Tham J., Shen L., Lee S., and H. Tan, Good multifilter properties: A new tool for understanding multiwavelets, *Inter. Conf. on Imaging Science Systems and Technology*, pp. 52 – 59, 1998.
- [137] Tham J., Shen L., Lee S., and Tan H., A General approach for analysis and application of discrete multiwavelet transforms, *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 48, no. 2, pp. 457 – 464, 2000.
- [138] Trenas M. A., Opez J. L, and Zapataa E. L., Configurable architecture for the wavelet packet transform, *Journal of VLSI Signal Processing*, vol.32, no.3, pp.255–273, 2002.
- [139] Vaidyanathan P. P., *Multirate systems and filter banks*, Prentice-Hall, NJ, 1993.
- [140] Wasin S. and Jianzhong W., Estimating the support of a scaling vector, *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, vol.18, no. 1, pp. 63-73, 1997.
- [141] Wang Z., McWhirter J.G., Weiss S., Multichannel spectral factorization algorithm using polynomial matrix eigenvalue decomposition, in *49th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pp. 1714 – 1718, 2015.
- [142] Wilson G. Factorization of the covariance generating function of a pure moving average process. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 6, pp. 1 – 7, 1969.
- [143] Wua G., D. Lib, Xiaoa H. and Liuc Z., The  $M$  - band cardinal orthogonal scaling function, *Appl. Math. and Comp.*, vol. 215, no. 9, pp. 3271 – 3279, 2010.
- [144] Xia X. G., Geronimo J. S., Hardin D. P., and Suter B.W., Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms, *IEEE Trans. on Signal Process.*, 44(1), pp. 25 - 35, 1996.
- [145] Yang S.Z., Cheng Z.X., and Wang H.Y., Construction of biorthogonal multiwavelets, *Journal Math. Anal. Appl.*, vol. 276, pp. 1 – 12, 2002.
- [146] Yousefi S. A., Numerical solution of Abel's integral equation by using Legendre wavelets, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 175, no. 1, pp. 574 – 580, 2006.
- [147] Yousefi S. A., Legendre wavelets method for solving differential equations of Lane–Emden type, *Applied Mathematics and Computation*, 181(2), pp. 1417 - 1422, 2006.
- [148] Yin S.S., Zhou Y., Chan S.C., An efficient method for designing of modulated filter banks with causal stable IIR filters, *J. Signal Process. Syst.*, vol. 78, no.2, pp. 187 – 197, 2015.
- [149] Youla D.C., Kazanjian N.N., Bauer-type factorization of positive matrices and the theory of matrix polynomials orthogonal on the unit circle, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 25, no. 2, pp. 57–69, 1978.
- [150] Young D. M., *Garrett Birkhoff and applied mathematics*, *Notices of the AMS*, vol. 44, no. 11, pp. 1446 - 1449, 1997.
- [151] Zhou D.-X., Interpolatory Orthogonal multiwavelets and refinable Functions, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.50, no. 3, pp. 520 – 527, 2002.
- [152] Paley R.E.A.C., and Wiener N., *Fourier transforms in the complex domain*, vol. 19, AMS, 1934.
- [153] <https://www.xilinx.com/support/download/index.html/content/xilinx/en/downloadNv/vivado-design-tools/archive-ise.html>

# Abstracts of Dissertations

Number 5, 2024

---

INSTITUTE OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES  
BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ИНСТИТУТ ПО ИНФОРМАЦИОННИ И КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ

---

Брой 5, 2024

# Автореферати на дисертации